Metodi Analitici e Numerici per l'Ingegneria CdL Ingegneria Meccanica Appello 12 luglio 2018	Prof. M.C. Cerutti Prof. L. Dedè	Firma leggibile dello studente
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

ISTRUZIONI

- Riportare le risposte nello spazio indicato.
- Alcuni esercizi richiedono di utilizzare MATLAB; per tali esercizi riportare sul foglio esclusivamente gli output richiesti.
- Utilizzare esclusivamente una penna nera o blu.
- Tempo a disposizione: 2h 45m.

SPAZIO RISERVATO AL DOCENTE

Pre Test	
Esercizio 1	
Esercizio 2	
Esercizio 3	
Totale	

Pre Test

15 punti

1. *(2 punti)* Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 8 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ e si determini la sua fattorizzazione LU *senza pivoting*. Riportare il valore dell'elemento $u_{33} = (U)_{33}$ della matrice triangolare *superiore* U.

$u_{33} = -4$

2. *(2 punti)* Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $A = \text{tridiag}(-9{,}18, -9) \in \mathbb{R}^{100\times100}$ e $\mathbf{b} = (1{,}1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^{100}$, e il metodo del gradiente per l'approssimazione della soluzione $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{100}$. Si calcolino e si riportino: il valore del parametro dinamico ottimale α_0 associato all'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$ usato per determinare l'iterata $\mathbf{x}^{(1)}$ e la terza componente $x_3^{(1)}$ dell'iterata $\mathbf{x}^{(1)} \in \mathbb{R}^{100}$.

$\alpha_0 = 0{,}086\,59 \qquad x_3^{(1)} = 1{,}086\,59$

3. *(1 punto)* Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 37 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$. Quale o quali dei suoi autovalori $\{\lambda_i(A)\}_{i=1}^3$ possono essere approssimati mediante il metodo delle potenze dirette?

solo $\lambda_1(A) = -10$

4. *(2 punti)* Siano assegnati i nodi equispaziati $x_0, x_1, \ldots, x_5$ nell'intervallo $[0{,}5]$ e i corrispondenti valori $y_0 = 1$, $y_1 = 4$, $y_2 = 4$, $y_3 = 1$, $y_4 = 0$ e $y_5 = 0$. Si consideri il polinomio di Lagrange $\Pi_5(x)$ interpolante tali dati ai precedenti nodi e si riporti il valore di $\Pi_5(2.5)$.

$\Pi_5(2.5) = 2{,}550\,781$

5. *(1 punto)* Si consideri la formula di quadratura di Simpson per l'approssimazione dell'integrale $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$, dove $f(x) = 8\,x^3 - x^2 + 1$, $a = 4$ e $b = 5$; si riporti il valore dell'errore $E_s(f)$ associato all'applicazione di tale formula di quadratura.

$E_s(f) = 0$

6. *(1 punto)* Si consideri la funzione $f(x) = 2^{4x} - 1$. Si riporti il valore approssimato di $f'(\overline{x})$ in $\overline{x} = 0$ ottenuto mediate le differenze finite centrate, ovvero $\delta_c f(\overline{x})$, usando il passo $h = \frac{1}{4}$.

$\delta_c f(\overline{x}) = 3$

7. *(1 punto)* Dato il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = -3x(t) - 3\,y(t) \\ y'(t) = \ \ 3\,x(t) - 3\,y(t) & t \in (0, +\infty), \\ x(0) = y(0) = 4, \end{cases}$$

si consideri il metodo di Eulero in avanti (Eulero Esplicito) per la sua approssimazione. Si determini la condizione sul passo h tale da garantire l'assoluta stabilità del metodo.

$$\boxed{0 < h < \tfrac{1}{3}}$$

8. *(2 punti)* Si consideri il problema diffusione–reazione con condizioni al contorno miste:

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{3}\,u''(x) + u(x) = x^4 & x \in (0,1), \\ u(0) = 0, \quad u'(1) = 6. \end{cases}$$

Si consideri la formulazione debole di tale problema che coinvolge un opportuno spazio funzionale V. Si riportino: lo spazio funzionale V scelto e le espressioni della forma bilineare $a(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ e del funzionale lineare $F(\cdot) : V \to \mathbb{R}$.

$$\boxed{V = \{v \in H^1(0,1) \,:\, v(0) = 0\}, \ \ a(u,v) = \int_0^1 \left(\tfrac{1}{3}\,u'\,v' + u\,v\right)\,dx, \ \ F(v) = \int_0^1 x^4\,v\,dx + 2\,v(1)}$$

9. *(1 punto)* Dato il problema diffusione–reazione con condizioni al contorno di Neumann omogenee

$$\begin{cases} -u''(x) + \dfrac{1}{2}\,u(x) = 4\,x + e^{-2\,x} & x \in (0,1), \\ u'(0) = u'(1) = 0, \end{cases}$$

si consideri la sua formulazione debole che coinvolge la forma bilineare $a : V \times V \to \mathbb{R}$, con V un opportuno spazio funzionale. Si calcoli la costante di coercività α associata ad $a(\cdot,\cdot)$.

$$\boxed{\alpha = \tfrac{1}{2}}$$

10. *(1 punto)* Dato il problema diffusione–reazione con condizioni al contorno di Dirichlet omogenee

$$\begin{cases} -3\,u''(x) + u(x) = 5 & x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

si consideri la sua approssimazione mediate il metodo di Galerkin–Elementi Finiti di grado 1 su una griglia con due elementi equispaziati, ovvero di dimensione $h = \frac{1}{2}$. Si calcoli il valore della soluzione approssimata corrispondente al nodo di griglia $x_1 = \frac{1}{2}$, ovvero u_1.

$$\boxed{u_1 = \tfrac{15}{74} = 0{,}202\,703}$$

11. *(1 punto)* Dato il problema diffusione con condizioni al contorno di Dirichlet non omogenee

$$\begin{cases} -u''(x) = 0 & x \in (0,1), \\ u(0) = 5 \qquad u(1) = 3, \end{cases}$$

si consideri la sua approssimazione mediate il metodo di Galerkin–Elementi Finiti di grado 1 su una griglia con 100 elementi equispaziati, ovvero di dimensione $h = \frac{1}{100}$. Si calcoli il valore della soluzione approssimata corrispondente al nodo di griglia $x_{25} = \frac{1}{4}$, ovvero u_{25}.

$$\boxed{u_{25} = \tfrac{9}{2} = 4{,}5}$$

Esercizi

Esercizio 1. Si consideri una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, definita nell'intervallo $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, dotata dello zero $\alpha \in [a,b]$.

10 punti

(a) *(2 punti)* Si riporti con precisione l'algoritmo del metodo di Newton per la ricerca dello zero α di $f(x)$.

(b) *(4 punti)* Si implementi il metodo di Newton nella funzione Matlab® `newton.m` utilizzando il criterio d'arresto basato sulla differenza tra due iterate successive. La struttura della funzione è:

```
function [xvect,N] = newton(x0,nmax,tol,fun,dfun)
```

Si considerino come *input*: il valore dell'iterata iniziale `x0`; il numero massimo di iterazioni consentite `nmax`; la tolleranza sul criterio d'arresto `tol`; la funzione di cui si vuole calcolare lo zero `fun`; la sua funzione derivata `dfun`. Si considerino come *output*: un vettore `xvect` contenente tutte le iterate del metodo; il numero di iterazioni effettuate `N`.

Si utilizzi la funzione Matlab® `newton.m` implementata precedentemente per approssimare lo zero $\alpha \in \mathbb{R}$ della funzione

$$f(x) = \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 e^{(\pi/4 - x)}.$$

Si considerino l'iterata iniziale $x^{(0)} = \dfrac{3\pi + 8}{12}$, la tolleranza `tol`$= 10^{-3}$ e il numero massimo di iterazioni `nmax`$= 100$. Si riportino: il numero N di iterazioni effettuate, il valore approssimato $x^{(N)}$ dello zero, il residuo corrispondente $r^{(N)} = |f(x^{(N)})|$ e i valori delle iterate $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ (si utilizzino almeno 4 cifre decimali e il formato esponenziale per riportare i risultati).

$N =$ 9 $\qquad x^{(N)} =$ 0,785 947 $\qquad r^{(N)} =$ $3{,}005\,931 \cdot 10^{-7}$

$x^{(1)} =$ 0,952 065 $\qquad x^{(2)} =$ 0,861 156

(c) *(3 punti)* Si consideri la funzione $f(x)$ di cui al punto (b) per cui lo zero è $\alpha = \pi/4$. Qual'è l'ordine di convergenza p atteso dal metodo di Newton per la ricerca di α? Si giustifichi la risposta sulla base delle proprietà di convergenza del metodo; si enunci con precisione il risultato teorico corrispondente.

$p =$ 1

È possibile ottenere un ordine di convergenza più alto allo zero α? Come?

(d) *(1 punto)* Si consideri ora la funzione di iterazione $\phi(x) = x - f(x)$, dove la funzione $f(x)$ è data al punto (b). Si mostri che lo zero $\alpha = \pi/4$ di $f(x)$ è anche punto fisso di $\phi(x)$.

Esercizio 2. Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(t) - 3\,y'(t) + 2\,y(t) = 5\,e^{-t} & t \in (0, +\infty), \\ y'(0) = 1, \\ y(0) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

10 punti

(a) *(2 punti)* Si trasformi secondo Laplace il problema di Cauchy (1) con i dati precedenti e, indicata con $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$ la trasformata della soluzione $y(t)$, si ricavi e si riporti l'espressione di $Y(s)$; si motivino i passaggi svolti.

$Y(s) =$ $5/[(s^2 - 3\,s + 2)\,(s + 1)] + 1/(s^2 - 3\,s + 2), \qquad s > 0$

(b) *(2 punti)* Si ricavi e si riporti l'espressione della soluzione $y(t)$ del problema di Cauchy di cui al punto (a) tramite l'antitrasformata di Laplace, ovvero a partire da $Y(s)$ come $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)](t)$.

$y(t) =$ $-\frac{7}{2}\,e^{t} + \frac{8}{3}\,e^{2\,t} + \frac{5}{6}\,e^{-t}, \qquad t \geq 0$

(c) *(1 punto)* Si riscriva il problema di Cauchy (1) in un sistema di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine.

(d) *(2 punti)* Si riporti l'algoritmo (non in stretto linguaggio Matlab®) del metodo di Eulero in avanti (Eulero esplicito) per l'approssimazione di un problema di Cauchy in forma di un sistema di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine; si definisca tutta la notazione utilizzata.

(e) *(3 punti)* Si utilizzi opportunamente Matlab® per risolvere il problema ottenuto al punto (c) nell'intervallo temporale (0,1) mediante il metodo di Eulero in avanti utilizzando il passo di discretizzazione $h = 1/10$; h partiziona tale intervallo in tempi discreti $t_n = n\,h$ per $n = 0{,}1, \ldots, N_h$, dove $N_h = 1/h$.

Si riportino: il valore u_1 dell'approssimazione di $y(t_1)$, il valore v_1 dell'approssimazione di $y'(t_1)$, il valore u_{N_h} dell'approssimazione di $y(1)$ e il valore v_{N_h} dell'approssimazione di $y'(1)$ (si indichino i risultati con almeno 4 cifre decimali).

$u_1 = \frac{1}{10} = 0{,}1$ $\qquad$ $v_1 = \frac{9}{5} = 1{,}8$

$u_{N_h} = 7{,}760\,914$ $\qquad$ $v_{N_h} = 23{,}818\,158$

Esercizio 3. Si consideri il seguente problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione di diffusione

13 punti

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (x,t) \in (0,\pi) \times (0,+\infty), \\ u(0,t) = 4 & t > 0, \\ u(\pi,t) = -4 & t > 0, \\ u(x,0) = g(x) & x \in [0,\pi], \end{cases} \tag{2}$$

dove $g \in C^0([0,\pi])$ è il dato iniziale.

(a) *(3 punti)* Si enunci e si dimostri il teorema di unicità per il problema di Cauchy-Dirichlet (2).

(b) *(1 punto)* Si ricavi e si riporti scriva la soluzione stazionaria $r(x)$ per il problema (2).

$r(x) =$ $-\frac{8}{\pi}x + 4$

(c) *(3 punti)* Si risolva con il metodo di separazione delle variabili il problema (2) riportando i passaggi principali del procedimento e la soluzione $u(x,t)$; si esprima la soluzione in termini dei coefficienti $\overline{A}_n$, per $n \geq 1$, e del dato iniziale $g(x)$ generico.

$u(x,t) =$ $r(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \overline{A}_n \, e^{-n^2 t} \sin(nx)$ $\qquad \overline{A}_n =$ $\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(nx) \, (g(x) - r(x)) \, dx$

(d) *(3 punti)* Posto ora il dato iniziale $g(x) = -\dfrac{16}{\pi^2}x^2 + \dfrac{8}{\pi}x + 4$, si calcolino e si riportino i coefficienti $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$ e $\overline{A}_3$ della serie di cui al punto (c).

$\overline{A}_1 =$ $\frac{128}{\pi^3}$ $\qquad \overline{A}_2 =$ 0 $\qquad \overline{A}_3 =$ $\frac{128}{27}\,\frac{1}{\pi^3}$

(e) *(2 punti)* Per il dato iniziale $g(x)$ del punto (d) si determinino massimo e minimo di $u(x,t)$ nell'insieme $\overline{Q_T} = [0,\pi] \times [0,1]$.

$\max_{\overline{Q_T}} u(x,t) =$ 5 $\qquad \min_{\overline{Q_T}} u(x,t) =$ -4

(f) *(1 punto)* Per il dato iniziale del punto (d) si stabilisca se la soluzione $u(x,t)$ è continua in $[0,\pi] \times [0, +\infty)$.

Soluzione Versione n. 1

1. $u_{33} = -4$
2. $\alpha_0 = 0{,}086\,59 \qquad x_3^{(1)} = 1{,}086\,59$
3. solo $\lambda_1(A) = -10$
4. $\Pi_5(2.5) = 2{,}550\,781$
5. $E_s(f) = 0$
6. $\delta_c f(\overline{x}) = 3$
7. $0 < h < \frac{1}{3}$
8. $V = \{v \in H^1(0{,}1) : v(0) = 0\}$, $a(u{,}v) = \int_0^1 \left(\frac{1}{3}\, u'\, v' + u\, v\right)\, dx$, $F(v) = \int_0^1 x^4\, v\, dx + 2\, v(1)$
9. $\alpha = \frac{1}{2}$
10. $u_1 = \frac{15}{74} = 0{,}202\,703$
11. $u_{25} = \frac{9}{2} = 4{,}5$