Metodi Analitici e Numerici CdL Ingegneria Meccanica 17 luglio 2017	Prof. M.C. Cerutti Prof. P. Zunino	Firma leggibile dello studente
Cognome:	Nome:	Matricola:

ISTRUZIONI

- Riportare le risposte nello spazio indicato.
- Gli esercizi richiedono l'uso di Matlab. Riportare sul foglio esclusivamente gli output richiesti.
- Tempo a disposizione: 2 h 30.

SPAZIO RISERVATO ALLA COMMISSIONE

Esercizio 1	
Esercizio 2	
Esercizio 3	
Matlab	
Totale	

Esercizio 1.

Si consideri il seguente sistema di equazioni lineari $Ax = b$ con

12 punti

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 5 & 3 \\ 7 & 11 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 13 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

e $\mathbf{b} = [1, 3, 5, 7]^T$.

(a) *(2 punti)* Si enunci una condizione necessaria e sufficiente per fattorizzare una matrice A in due matrici L ed U triangolare inferiore (con coefficienti unitari sulla diagonale) e triangolare superiore, rispettivamente.

(b) *(2 punti)* Quale relazione c'è tra il metodo di eliminazione di Gauss (MEG) e le matrici U ed L? In particolare, illustrare come i coefficienti della matrice L vengano calcolati attraverso il MEG.

(c) *(2 punti)* Si descriva un metodo per utilizzare la fattorizzazione LU al fine di risolvere il sistema lineare $Ax = b$. Note le matrici L ed U, quali algoritmi vengono utilizzati per risolvere i sistemi ad esse relativi? Riportare esplicitamente le espressioni di questi algoritmi.

(d) *(2 punti)* Utilizzando Matlab, si verifichi che la matrice dei coefficienti del sistema sopra soddisfa una condizione enunciata al punto (a). Riportare sul foglio i principali comandi utilizzati ed i risultati.

(e) *(1 punto)* Si calcoli la fattorizzazione LU mediante opportuno comando Matlab. Riportare sul foglio le matrici L ed U.

(f) *(3 punti)* Usando Matlab, si risolva il sistema, avendo prima implementato gli algoritmi di cui al punto (c). Riportare sul foglio la soluzione calcolata.

Esercizio 2. Sia $Q = (0,\pi) \times (0,T)$ con $T > 0$ e si consideri il seguente problema:

9 punti

$$
\begin{aligned}
&u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 && \text{in} \quad Q,\\
&u(x,0) = \pi - \sin x - \frac{1}{2}\sin(2x) - 3\,x && \text{in} \quad [0,\pi],\\
&u(0,t) = \pi \text{ e } u(\pi,t) = -2\pi, && \text{in} \quad (0,T).
\end{aligned}
$$

(a) *(4 punti)* Si determini la soluzione $u = u(x,t)$ del problema sopra. *N.B. Non è necessario riportare tutta la separazione di variabili ma solo i passaggi principali. E' necessario però indicare come si calcolano i coefficienti e riportarne il valore finale.*

(b) *(1 punto)* La soluzione u è continua su $\overline{Q}$? Si giustifichi la risposta.

(c) *(2 punti)* Si enunci il principio del massimo per soluzioni dell'equazione:

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 \qquad (x,t) \in Q\,.$$

(d) *(2 punti)* Quanto vale il massimo di u su $\overline{Q}$? *(Se si utilizza un risultato teorico, verificare che ne siano soddisfatte le ipotesi)*

ESERCIZIO 3. Si consideri il problema di Cauchy:

12 punti

$$
\begin{aligned}
y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) &= -e^{-2t}, \; t > 0 \\
y(0) &= 1 \\
y'(0) &= -2 \,.
\end{aligned}
$$

(a) *(2 punti)* Si trasformi l'equazione in un sistema del primo ordine.

(b) *(2 punti)* Si scriva il metodo di Eulero in avanti per la risoluzione del sistema.

(c) *(2 punti)* Scrivere la condizione di assoluta stabilità per il metodo di Eulero applicato al sistema.

(d) *(4 punti)* Si implementi l'algoritmo di Eulero in avanti per sistemi 2×2 e si risolva il problema di Cauchy nell'intervallo di tempo [0,1] con passi di discretizzazione $h = 1/5, 1/10, 1/20, 1/40$. Scrivere la soluzione calcolata al tempo $t = 1$ con usando $h = 1/5$.

(e) *(2 punti)* Sapendo che la soluzione esatta è $y(t) = e^{-2t}$ calcolare e riportare sul foglio l'errore, in norma del massimo, per $h = 1/5, 1/10, 1/20, 1/40$. Verificare l'ordine di convergenza del metodo, il risultato trovato è in accordo con la teoria? Perchè? Scrivere un commento.