

Metodi Analitici e Numerici CdL Ingegneria Meccanica 17 luglio 2017	Prof. M.C. Cerutti Prof. P. Zunino	Firma leggibile dello studente
Cognome:	Nome:	Matricola:

ISTRUZIONI

- Riportare le risposte nello spazio indicato.
- Gli esercizi richiedono l'uso di Matlab. Riportare sul foglio esclusivamente gli output richiesti.
- Tempo a disposizione: 2 h 30.

SPAZIO RISERVATO ALLA COMMISSIONE

Esercizio 1	
Esercizio 2	
Esercizio 3	
Matlab	
Totale	

ESERCIZIO 1.

Si consideri il seguente sistema di equazioni lineari $Ax = b$ con

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 5 & 3 \\ 7 & 11 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 13 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

e $\mathbf{b} = [1, 3, 5, 7]^T$.

- (a) (2 punti) Si enunci una condizione necessaria e sufficiente per fattorizzare una matrice A in due matrici L ed U triangolare inferiore (con coefficienti unitari sulla diagonale) e triangolare superiore, rispettivamente.

12 punti

- (b) (2 punti) Quale relazione c'è tra il metodo di eliminazione di Gauss (MEG) e le matrici U ed L ? In particolare, illustrare come i coefficienti della matrice L vengano calcolati attraverso il MEG.

- (c) (2 punti) Si descriva un metodo per utilizzare la fattorizzazione LU al fine di risolvere il sistema lineare $Ax = b$. Note le matrici L ed U , quali algoritmi vengono utilizzati per risolvere i sistemi ad esse relativi? Riportare esplicitamente le espressioni di questi algoritmi.

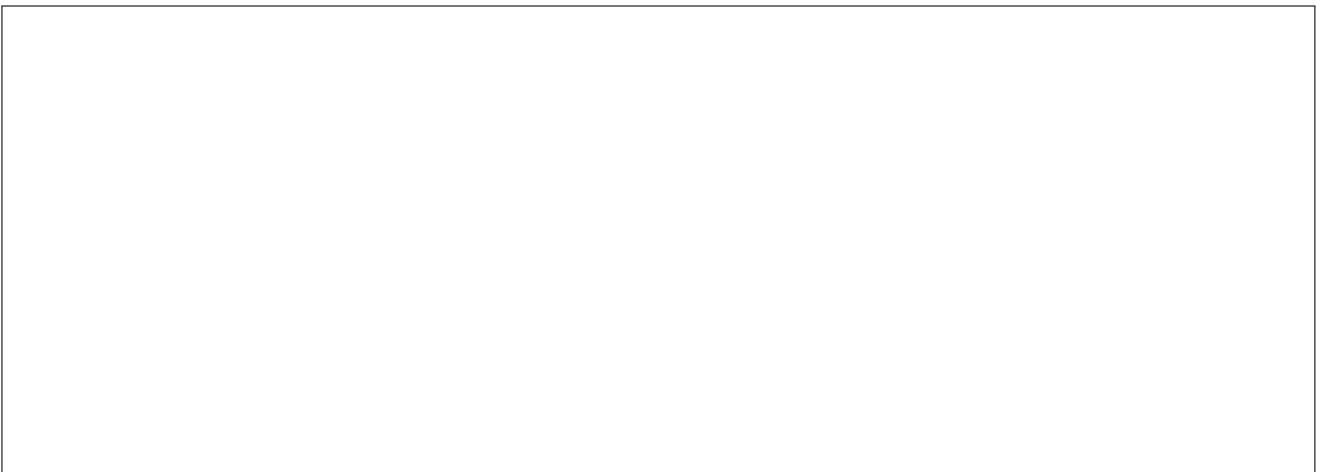
- (d) (2 punti) Utilizzando Matlab, si verifichi che la matrice dei coefficienti del sistema sopra soddisfa una condizione enunciata al punto (a). Riportare sul foglio i principali comandi utilizzati ed i risultati.



- (e) (1 punto) Si calcoli la fattorizzazione LU mediante opportuno comando Matlab. Riportare sul foglio le matrici L ed U .



- (f) (3 punti) Usando Matlab, si risolva il sistema, avendo prima implementato gli algoritmi di cui al punto (c). Riportare sul foglio la soluzione calcolata.



ESERCIZIO 2. Sia $Q = (0, \pi) \times (0, T)$ con $T > 0$ e si consideri il seguente problema:

$$u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0 \quad \text{in } Q,$$

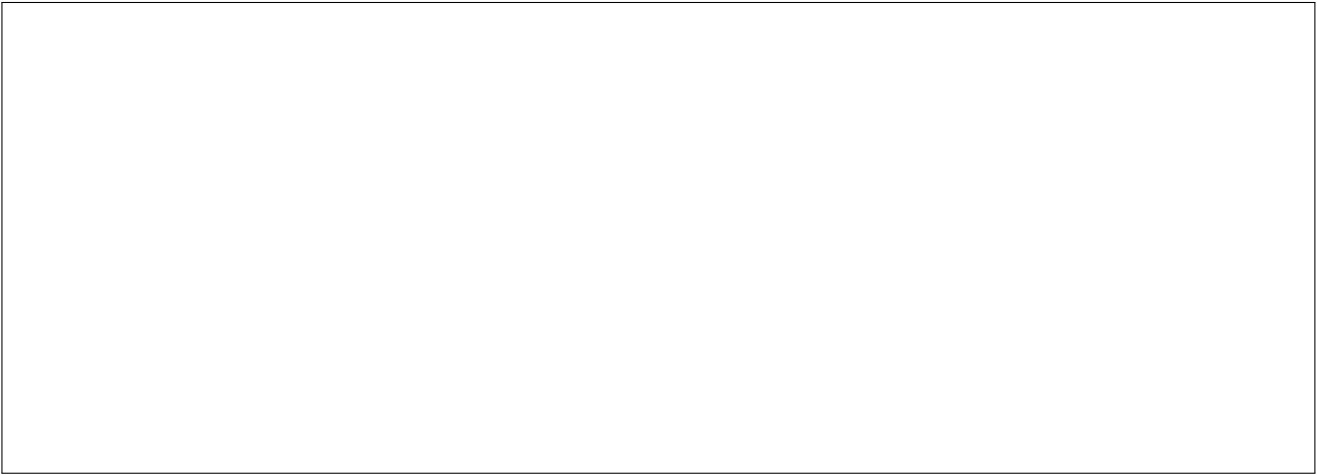
$$u(x, 0) = \pi - \sin x - \frac{1}{2} \sin(2x) - 3x \quad \text{in } [0, \pi],$$

$$u(0, t) = \pi \text{ e } u(\pi, t) = -2\pi, \quad \text{in } (0, T).$$

9 punti

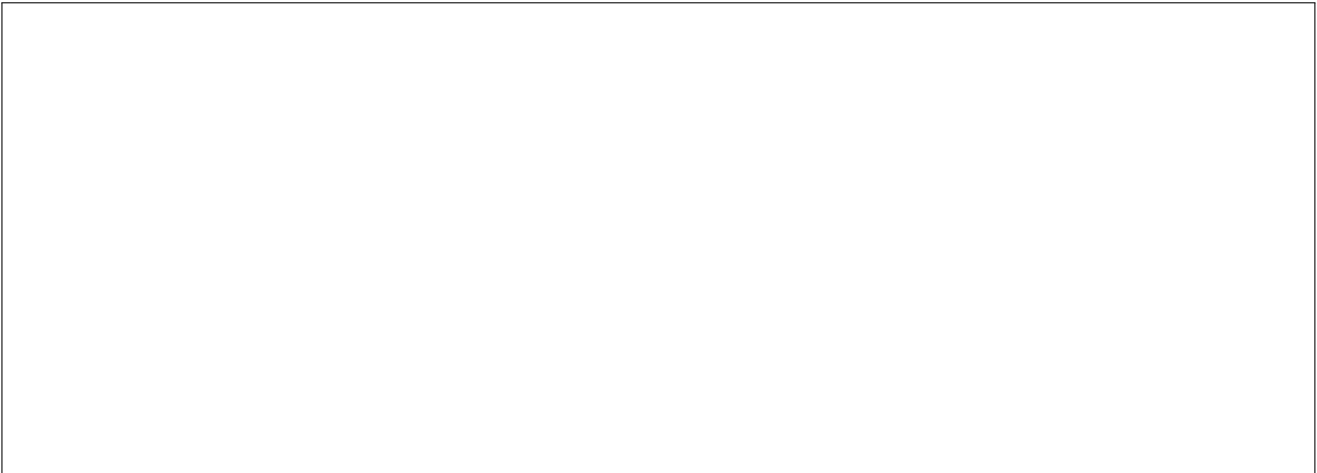
- (a) (4 punti) Si determini la soluzione $u = u(x, t)$ del problema sopra. *N.B. Non è necessario riportare tutta la separazione di variabili ma solo i passaggi principali. E' necessario però indicare come si calcolano i coefficienti e riportarne il valore finale.*

(b) (1 punto) La soluzione u è continua su \overline{Q} ? Si giustifichi la risposta.

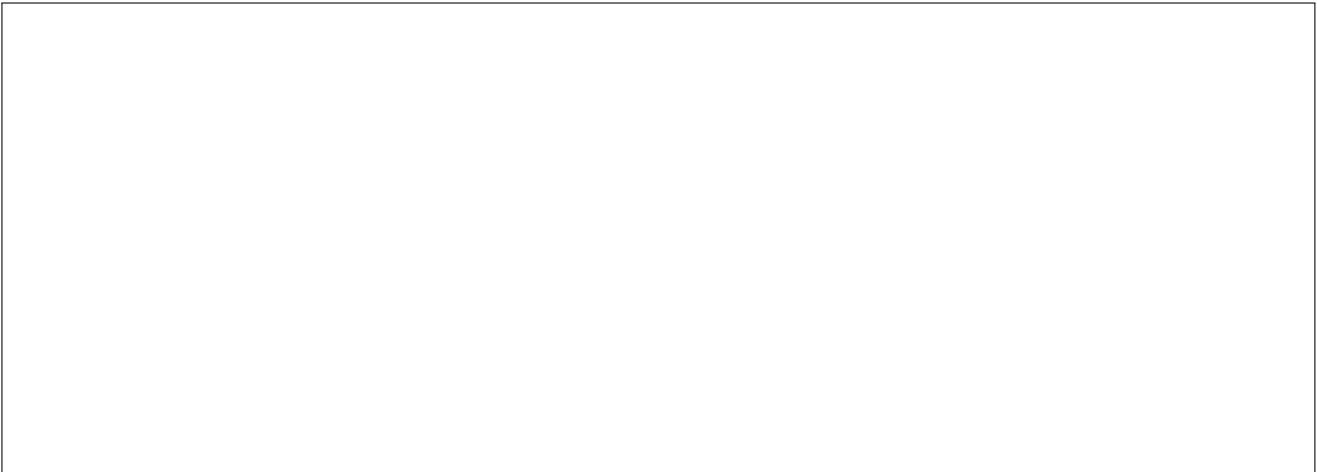


(c) (2 punti) Si enunci il principio del massimo per soluzioni dell'equazione:

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 \quad (x,t) \in Q.$$



(d) (2 punti) Quanto vale il massimo di u su \overline{Q} ? (Se si utilizza un risultato teorico, verificare che ne siano soddisfatte le ipotesi)



ESERCIZIO 3. Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{aligned}y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) &= -e^{-2t}, \quad t > 0 \\y(0) &= 1 \\y'(0) &= -2.\end{aligned}$$

12 punti

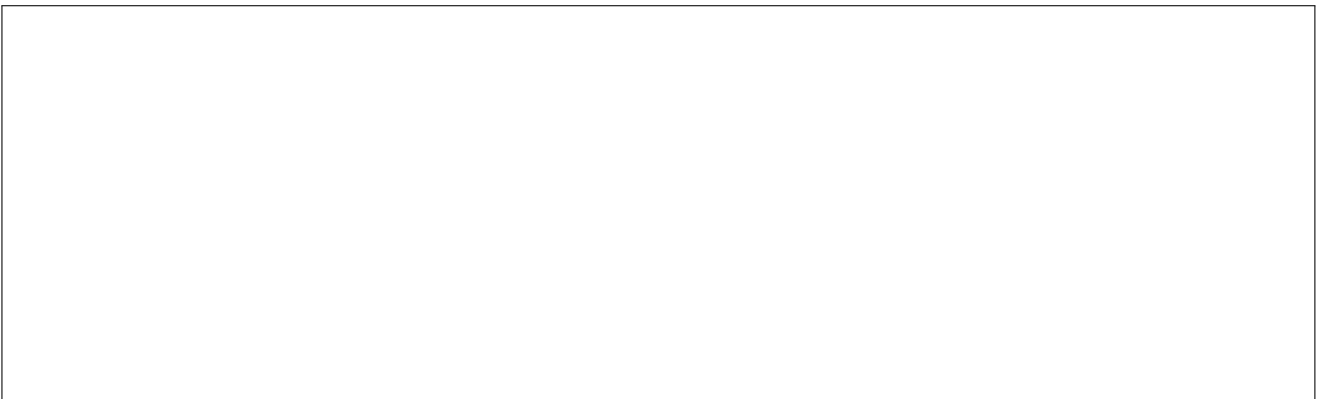
(a) (2 punti) Si trasformi l'equazione in un sistema del primo ordine.

(b) (2 punti) Si scriva il metodo di Eulero in avanti per la risoluzione del sistema.

(c) (2 punti) Scrivere la condizione di assoluta stabilità per il metodo di Eulero applicato al sistema.



(d) (4 punti) Si implementi l'algoritmo di Eulero in avanti per sistemi 2×2 e si risolva il problema di Cauchy nell'intervallo di tempo $[0,1]$ con passi di discretizzazione $h = 1/5, 1/10, 1/20, 1/40$. Scrivere la soluzione calcolata al tempo $t = 1$ con usando $h = 1/5$.



(e) (2 punti) Sapendo che la soluzione esatta è $y(t) = e^{-2t}$ calcolare e riportare sul foglio l'errore, in norma del massimo, per $h = 1/5, 1/10, 1/20, 1/40$. Verificare l'ordine di convergenza del metodo, il risultato trovato è in accordo con la teoria? Perché? Scrivere un commento.

