Metodi Analitici e Numerici per l'Ingegneria	Appello
Docente:	13 Settembre 2016

TESTO

DOMANDA 1 Si consideri la funzione:

$$f(x) = x^3 + \left(\pi - \frac{4}{\pi^2}\right) x^2 + \left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{4}{\pi}\right) x + \sin x, ,$$

per $x \in [-2, 1/2]$.

1. (T) Si illustri il metodo di Newton per la ricerca di zeri di una funzione, spiegando da dove deriva il metodo.
2. (T) Si riporti la formula modificata per la ricerca di zeri multipli.
3. (E) Si calcoli la derivata $f'(x)$.
4. (M) Si traccino i grafici della funzione $f(x)$ e della derivata $f'(x)$ nella stessa figura.
5. (M) Dopo aver stimato dal grafico gli zeri di $f(x)$, si implementi con Matlab il metodo di Newton e òo si applichi al calcolo degli zeri di $f(x)$ scegliendo opportunamente il punto di partenza e la tolleranza.
6. (M) Sapendo che le radici sono $\alpha_1 = -\pi/2$ e $\alpha_2 = 0$, si valuti la convergenza del metodo nei due casi e quindi l'opportunità di utilizzare il metodo modificato per una delle radici. Se valutato conveniente (anche dall'osservazione del grafico di $f(x)$) si utilizzi il metodo modificato per una delle radici e se ne valuti la convergenza.

DOMANDA 2 Si consideri il problema di Cauchy-Dirichlet:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & (t,x) \in \Omega = (0, +\infty) \times (0, \pi), \\ u(t,0) = 0 & t > 0 \\ u(t,\pi) = 2\pi & t > 0 \\ u(0,x) = \sin x - 2\sin(2x) + 2x & x \in [0,\pi] \end{cases} \tag{1}$$

1. (E) Si risolva il problema col metodo della separazione delle variabili, riportando solamente i passaggi principali.
2. (E) Si calcoli $u_\infty(x) = \lim_{t\to+\infty} u(t,x)$.
3. (T) Sia $u_h(x,t) = \sum_{j=1}^{N_h} u_j(t)\psi_j(x)$ la soluzione approssimata agli elementi finiti del problema (1), e
$$M\mathbf{u}'(t) + A\mathbf{u}(t) = \mathbf{F} \tag{2}$$
il sistema risultante dalla semidiscretizzazione spaziale, dove $[\mathbf{u}(t)]_j = u_j(t)$.
Scrivere le matrici M, A e il vettore $\mathbf{F}$ in funzione delle funzioni $\psi_j(x)$ che costituiscono la base dello spazio a elementi finiti.
4. (E) Si riportino i valori numerici delle matrici M, A e del vettore $\mathbf{F}$ ipotizzando di effettuare la discretizzazione spaziale con elementi finiti lineari definiti su una partizione uniforme dell'intervallo $[0, \pi]$ con passo $h = \pi/4$.
5. (T) Ipotizzando di effettuare la discretizzazione temporale con il metodo di Eulero in avanti, si derivi la condizione sul passo di avanzamento temporale per l'assoluta stabilità del metodo.

DOMANDA 3 Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(t) + y'(t) - 2y(t) = e^{-t}, \quad t > 0 \\ y(0) = y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

1. (E) Sia $Y(s)$ la trasformata di Laplace della soluzione. Si calcoli la trasformata di Laplace dell'equazione.
2. (E) Si calcoli $Y(s)$ risolvendo l'equazione ottenuta al punto 1.
3. (E) Utilizzando il risultato al punto 2, si determini, motivando ogni passaggio, la soluzione $y(t)$ per $t \geq 0$.
4. (T) Si scriva l'equazione come un sistema di primo ordine.
5. (T) Si ricavi il metodo di Eulero in avanti per la soluzione di un problema di Cauchy per un sistema di 2 equazioni differenziali.
6. (M) Si risolva il problema di Cauchy nell'intervallo di tempo $[0, 1]$ usando il metodo di Eulero in avanti con passi di discretizzazione $h = 1/5, 1/10, 1/20, 1/40$. Si riporti il grafico della soluzione numerica ottenuta con $h = 1/40$.
7. (M) Conoscendo il valore esatto $y(1) = \frac{1}{6}e + \frac{1}{3e^2} - \frac{1}{2e}$, si valuti l'andamento dell'errore $e_h = |y(1) - y_h(1)|$ al diminuire del passo di discretizzazione temporale, calcolandolo per i valori di h del punto precedente. Si confronti quanto ottenuto con il risultato teorico (si scriva commento).