Metodi Analitici e Numerici per l'Ingegneria	Quarto appello 2 Settembre 2015

DOMANDA 1 Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} -u''(x) + u'(x) + 2u(x) = x \qquad x \in (0,1) \\ u'(0) = 0 \\ u'(1) = 1\,. \end{cases}$$

1. (T) Si scriva la formulazione debole del problema, indicando chiaramente quali sono gli spazi funzionali e con quale motivazione vengono scelti.
2. (E) Si dimostri la continuità della forma bilineare.
3. (T) Si disegnino le funzioni di base dello spazio di elementi finiti lineari definiti su una partizione unifome dell'intervallo $[0,1]$ di passo $h = 1/3$, che approssimano lo spazio funzionale scelto per la formulazione debole.
4. (T) Si scriva l'approssimazione di Galerkin del problema, $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$ ottenuta utilizzando lo spazio degli elementi finiti lineari descritto al punto 2, indicando come gli elementi della matrice A e del vettore $\mathbf{f}$ dipendono dagli elementi della base a elementi finiti.

DOMANDA 2

Si consideri la funzione:

$$f(x) = 2x^3 + (4-\pi)x^2 + 2(1-\pi)x - \pi\,,$$

per $x \in [-3,3]$.

1. (T) Si illustri il metodo di Newton per la ricerca di zeri di una funzione, spiegando da dove deriva il metodo.
2. (T) Si riporti la formula modificata per la ricerca di zeri multipli.
3. (M) Si traccino i grafici della funzione $f(x)$ e della derivata $f'(x)$ nella stessa figura.
4. (M) Dopo aver stimato dal grafico gli zeri di $f(x)$, si implementi con Matlab il metodo di Newton scegliendo opportunamente il punto di partenza e la tolleranza.
5. (M) Sapendo che le radici sono $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = \pi/2$, si valuti la convergenza del metodo nei due casi e quindi l'opportunità di utilizzare il metodo modificato per una delle radici. Se valutato conveniente (anche dall'osservazione del grafico di $f(x)$) si utilizzi il metodo modificato per una delle radici e se ne valuti la convergenza.

DOMANDA 3 Si consideri la funzione $f : [1/2, 2] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \sin^2(\pi\, x) - \sin(\pi\, x)$$

e l'integrale

$$\int_{1/2}^{2} f(x)\, dx\,.$$

1. (T) Si definisca l'ordine di convergenza e il grado di esattezza di un metodo di approssimazione di integrali.
2. (T) Si scriva la formula del trapezio per il calcolo dell'integrale e si dica qual è il grado di esattezza del metodo.

3. (E) Si calcoli l'integrale approssimato con la formula del trapezio.
4. (T) Si ricavi la formula di quadratura del trapezio composita con nodi equispaziati e si precisi qual è l'ordine di convergenza.
5. (E) Si calcoli analiticamente l'integrale.
6. (M) Si programmi in Matlab l'algoritmo del trapezio suddividendo l'intervallo in N parti uguali.
7. (M) Si calcoli numericamente l'integrale e l'errore per $N = 1, 2, ..., 20$.
8. (M) Si deduca l'ordine di convergenza del metodo, e lo si confronti con il risultato teorico.