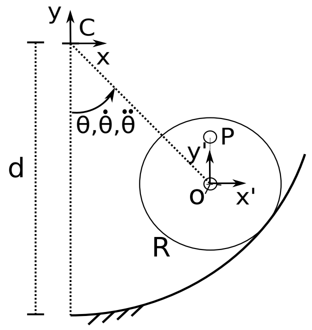
MECCANICA APPLICATA ALLE MACCHINE

Allievi meccanici AA.2015-2016 prova del 26-09-2016

Problema 1.1

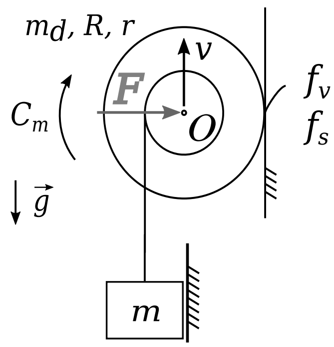
Il disco di raggio R rappresentato in figura rotola senza strisciare su una guida circolare con centro in C. **Per l'atto di moto si chiede ci calcolare per il punto P, solidale al disco, i vettori velocità ed accelerazione relativa rispetto alla terna traslante $ox'y'$ ed i vettori velocità ed accelerazione assoluta**. Noti: $R = 1m$; $d = 3m$; $\theta = pi/6, \dot{\theta} = 1rad/s, \ddot{\theta} = 0.5rad/s$ $\vec{OP} = 2/3\vec{j}'$.



Problema 1.2

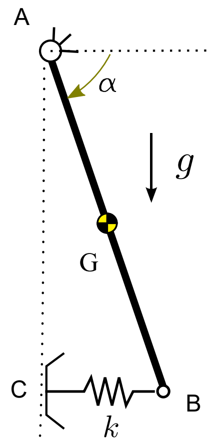
Il meccanismo rappresentato in figura si muove sul piano verticale. Esso è costituito da un disco circolare disco omogeneo di massa $md = 1kg$ e raggio $R = 2m$. Il disco si muove senza strisciare su una guida verticale caratterizzata da resistenza al rotolamento con coefficiente $fv = 0.05$, una forza $\vec{F} = 200N$ preme il disco alla guida. Sul disco si avvolge una fune intorno ad un profilo circolare di raggio $r = 0.5m$, alla fune è collegata una massa $m = 5kg$. si chiede di

1. **calcolare la coppia C_m necessaria a far muovere ad una velocità v costante ed in direzione da figura il sistema**;
2. **noto $fs = 0.75$, coefficiente di attrito statico disco guida, si chiede di verificare la condizione di aderenza disco-guida**;



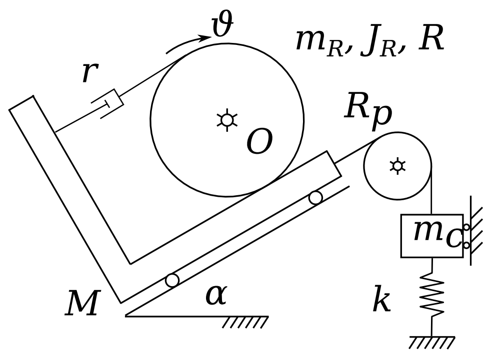
Problema 1.3

Il sistema rappresentato in figura, posto su un piano verticale, è in equilibrio statico. Esso è costituito da un'asta di massa m incerierata a terra in a e collegata ad una molla veritcale in B. La molla è collgata a terra in C mediante un pattino. **Usando il PLV o le equazioni Lagrange, calcolare la lunghezza della molla indeformata ℓ_0 (molla scarica) affinché α sia uguale a 30 deg nella posizione di equilibrio**. Usare i seguenti dati AB = 1 m, AG = AB/2, k = 100 N/m, m = 5 kg.

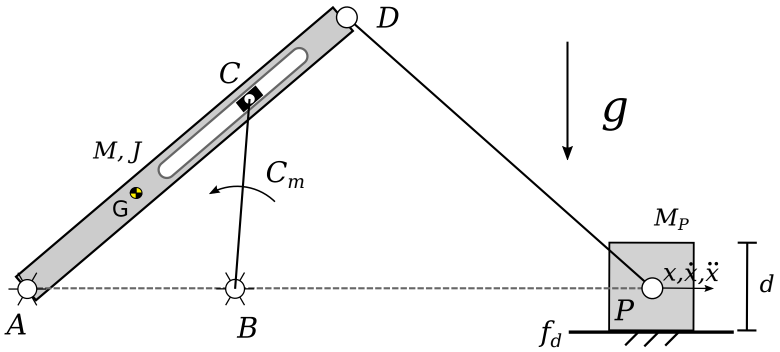


Problema 1.4

Il sistema rappresentato in figura giace nel piano orizzontale. Un disco omogeneo, di massa m_R, raggio R e momento d'inerzia baricentricoJ_R incernierato a terra in O, rotola senza strisciare su un carrello di massa M libero di muoversi lungo un piano inclinato $\alpha = 30°$ ed a sua volta collegato tramite uno smorzatore con costante di smorzamento d al disco. Inoltre, una fune inestensibile collega il carrello ad una puleggia di massa trascurabile e raggio R_p . La puleggia movimenta la massa m_c vincolata a terra tramite una molla di rigidezza k. Noti $M = 10kg$, $m_R = 3kg$, $J_R = 0.1kgm^2$, $m_c = 2kg$, $R_p = 0.2m$, $R = 1m$, $k = 100N/m$. **Determinare il valore dello smorzatore d affinchè sistema risulti criticamente smorzato**



Problema 2

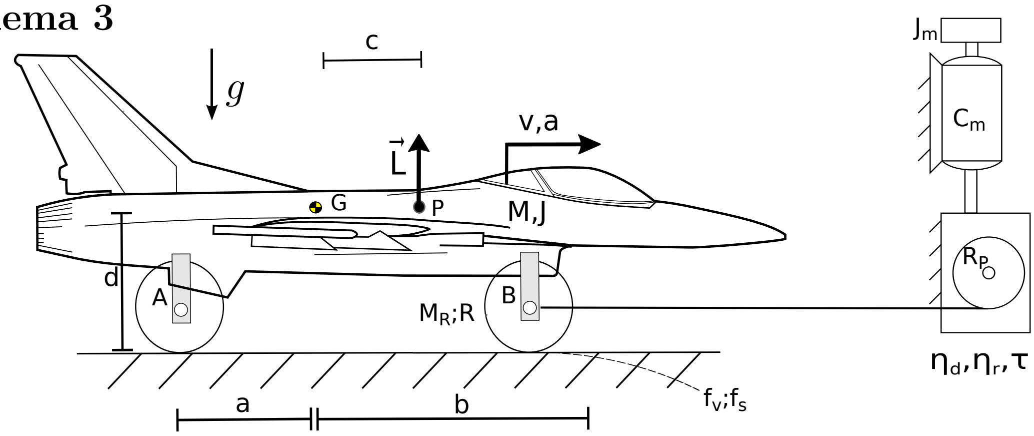


Il sistema meccanico illustrato in figura giace in un piano verticale. Esso è formato dalle aste AD, DP e BC, dal corsoio con centro in C e dal corpo rigido rettangolare con centro in P. L'asta AD ha massa M ed ha baricentro in G, il suo momento di inerzia baricentrico vale J, le aste DP e BC hanno massa trascurabile. Il corsoio con centro in C è privo di massa e scorre senza attrito. Il corpo rigido rettangolare ha massa M_p e baricentro in P. **Esso è inoltre vincolato a terra tramite un vincolo di tipo pattino caratterizzato dalla presenza di attrito dinamico con coefficiente f_d.**

Nell'atto di moto, considerando note masse ed inerzie del sistema e nota posizione del sistema x, la velocità $\dot{x}$ e l'accelerazione $\ddot{x}$ del corsoio si chiede di:

1. determinare i vettori **velocità ed accelerazione angolare** dell'**asta AD**;
2. determinare il **vettore velocità angolare** dell'**asta BC**;
3. determinare il **valore della coppia** C_m applicata all'asta BC con verso in figura il moto assegnato;

Problema 3

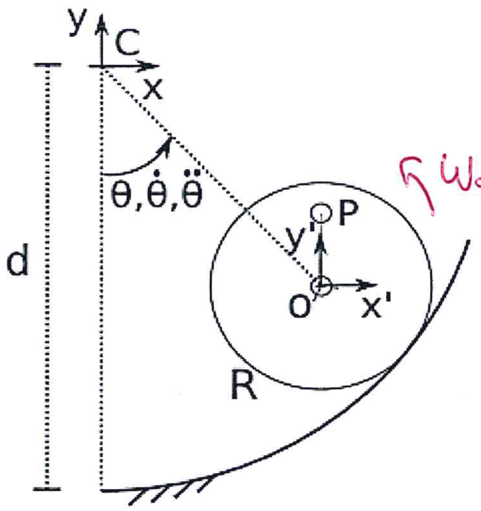


In figura è schematizzato un sistema a catapulta per aerei. In prima approssimazione l'aeromobile viene schematizzato come un corpo rigido di massa $M = 20000kg$, baricentro in G e momento di inerzia baricentrico $J_G = 160000kg * m^2$. L'aereo si muove grazie a due ruote di massa $M_R = 100kg$ e raggio $R = 1m$ in contatto senza strisciamento con il suolo, coefficiente di attrito statico $f_s = 1$, con resistenza al rotolamento con coefficiente $f_v = 0.05$. A causa del moto del velivolo stesso viene generata nel punto P una forza aerodinamica portante di valore $L = K_L * v^2$ dove $K_L = 20kg/m$ e v e la velocità del velivolo , La forza $\vec{L}$ ha verso come in figura.

Il sistema di catapulta è qui schematizzata come un gruppo motore-trasmissione con coppia motrice C_m ed inerzia lato motore $J_m = 100kg * m^2$ rendimenti di trasmissione $\eta_d = 0.9$ ed $\eta_r = 0.8$ e rapporto di trasmissione $\tau = 1 : 10$. Il gruppo motore-trasmissione è collegato ad una puleggia di massa trascurabile e raggio $R_P = 2m$ su cui si avvolge una fune inestensibile collegata al centro della ruota anteriore del velivolo. Nota la curva di coppia del motore $Cm = Cm_0 * (1 - \frac{w_m}{w_0}$ con $Cm0 = 2000Nm$ e $w_s = 720rad/s$ trovare:

1. l'accelerazione del sistema allo spunto **trascurando la resistenza al rotolamento**;
2. la tensione della fune nelle condizioni al punto 1;
3. la velocità a regime del sistema **considerando la resistenza al rotolamento**;

1.1



$\dot\omega_d, \omega_d$

T.M.R.

$$\bar{V}_{ASS} = \bar{V}_{TR} + \bar{V}_{REL}$$

$\bar{V}_{TR} \to$ MOTO CIRC. CENTRO C
RAGGIO $(d-R)$
VEL. ANG $\dot\theta$

$\bar{V}_{REL} \to$ " " CENTRO O
RAGGIO $|OP|$
VEL ANG ω_d

$$\left(\omega_d = -\frac{\dot\theta(d-R)}{R} = -\frac{1(3-1)}{1} = -2 \text{ rad/s}\right)$$

$$\bar{V}_{REL} = \omega_d \bar{k} \wedge (\bar{OP}) = -2\bar{k} \wedge \left(\frac{2}{3}\bar{j}'\right) = \frac{4}{3}\bar{i}' = \frac{4}{3}\bar{i} \ (m/s)$$

$$\bar{V}_{TR} = \dot\theta \bar{k} \wedge (\bar{OC}) = \underbrace{\dot\theta}_{1}\bar{k} \wedge \left[\underbrace{(d-R)}_{2}(\operatorname{sen}\theta\,\bar{i} - \cos\theta\,\bar{j})\right]$$

$$= 2(\underbrace{\cos\theta}_{\sqrt{3}/2}\bar{i} + \underbrace{\operatorname{sen}\theta}_{1/2}\bar{j}) = \sqrt{3}\,\bar{i} + \bar{j}$$

$$\boxed{\bar{V}_{ASS} = \left(\frac{4}{3} + \sqrt{3}\right)\bar{i} + \bar{j}}$$

$$\bar a_{ASS} = \bar a_{TR} + \bar a_{REL} + \cancel{a_{cor}}$$

$$\downarrow$$

$$0$$

$$(\bar\omega_{x'y'} = \bar 0)$$

$$* \ \dot\omega_d = -\ddot\theta \frac{(d-R)}{R} = \frac{-0{,}5\cdot 2}{1} = -1 \ \text{rad/s}^2$$

$$\bar a_{REL} = \overset{*}{\dot\omega_d}\, \bar k \wedge (\overline{OP}) - \omega_d^2 (\overline{OP})$$

$$= -1\,\bar k \wedge \left(\frac{2}{3}\bar j'\right) - 2^2\left(\frac{2}{3}\bar j'\right) = \frac{2}{3}\bar i' - \frac{8}{3}\bar j' =$$

$$= \frac{2}{3}\bar i - \frac{8}{3}\bar j$$

$$\bar a_{TR} = \ddot\theta\, \bar k \wedge (\overline{OC}) - \dot\theta^2 (\overline{OC}) = \overset{+0{,}5}{\ddot\theta}\, \bar k \wedge \left[\overset{2}{(d-R)}(\operatorname{sen}\theta\, \bar i - \cos\theta\, \bar j)\right]$$

$$- \underbrace{\dot\theta^2}_{1}\left[\underbrace{(d-R)}_{2}(\operatorname{sen}\theta\, \bar i - \cos\theta\, \bar j)\right]$$

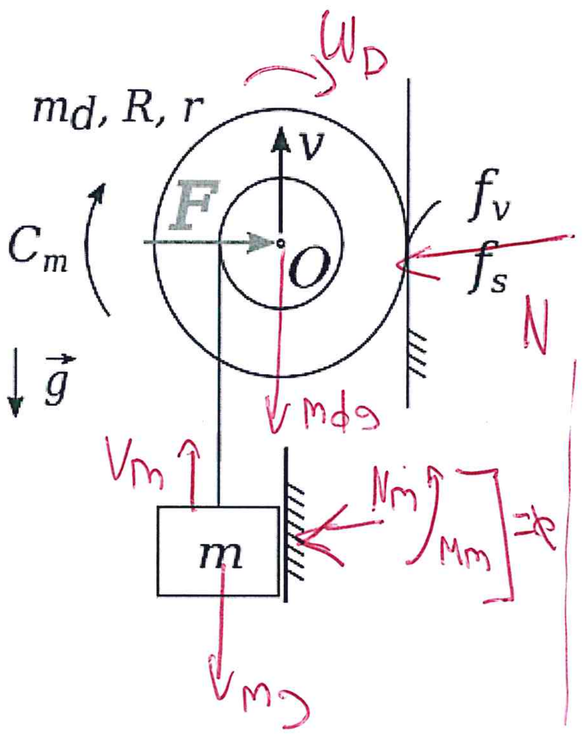
$$= 1(\cos\theta\, \bar i + \operatorname{sen}\theta\, \bar j) - 2(\operatorname{sen}\theta\, \bar i - \cos\theta\, \bar j) =$$

$$= (\cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta)\,\bar i + (\operatorname{sen}\theta + 2\cos\theta)\,\bar j =$$

$$\bar a_{TR} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)\bar i + \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right)\bar j$$

$$\bar a_{ASS} = \left(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)\bar i + \left(-\frac{8}{3} + \frac{1}{2} + \sqrt{3}\right)\bar j = 0{,}53\,\bar i - 0{,}43\,\bar j$$

1.2



Ⓐ

VEL COSTANTE

$$W_{EXT} + W_{DISS} = 0$$

$$W_{EXT} = C_M \omega_D - m_d g v - m g v_m$$

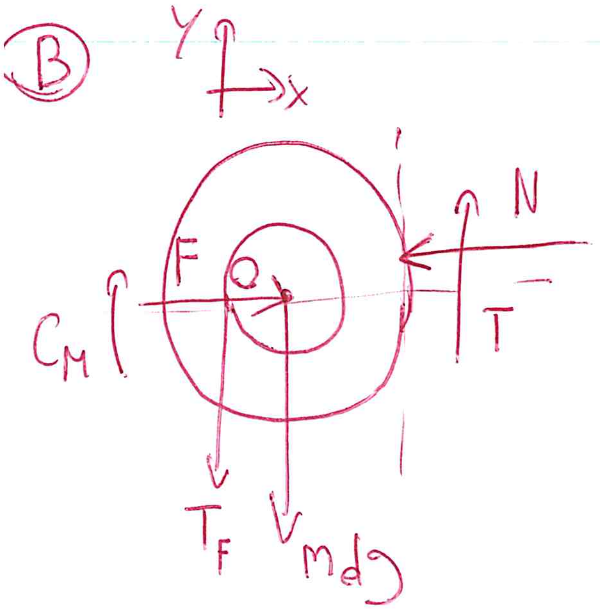
$$W_{DISS} = -f_v R |N| |\omega_D| \quad (N = F)$$

$$\omega_D = v/R \qquad v_m = \omega_D (R+r) = v \frac{(R+r)}{R}$$

$$C_M \frac{\cancel{v}}{R} - m_d g \cancel{v} - m g \cancel{v} \frac{(R+r)}{R} - f_v R F \frac{\cancel{v}}{R} = 0$$

$$C_M = \left(\overbrace{m_d g}^{9,81} + \overbrace{m g \frac{(R+r)}{R}}^{61,3} + \overbrace{f_v \frac{RF}{R}}^{10} \right) R = 162,2 \ Nm$$

B



$F_x = 0$)

$N = F = 200$

$M_O = 0$

$$-C_M - \underbrace{T}_{F} r + N f_V R + T R = 0$$

$(mg) = 5 \cdot 9{,}81$

↓

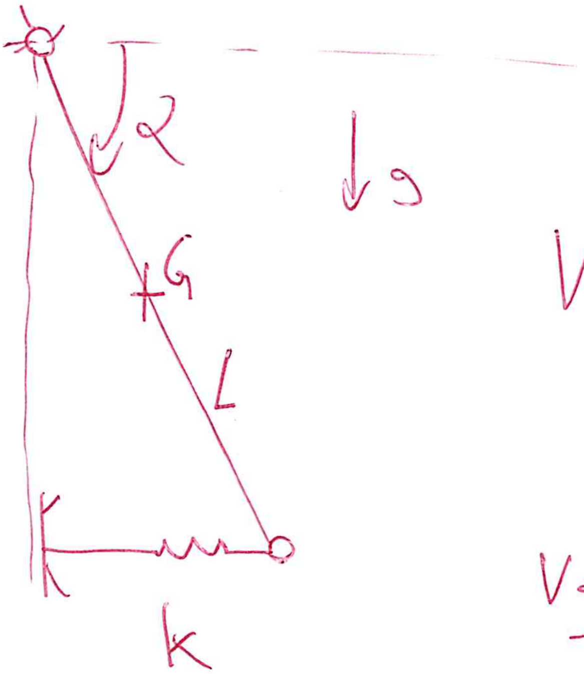
DA EQ MASSA m

$$T = \frac{C_M}{R} + T_F - N f_V = 120{,}15 \text{ N}$$

$$\frac{|T|}{|N|} = \frac{120{,}15}{200} = 0{,}60 < 0{,}75$$

OK

1.B



$$V_{EL} = \frac{1}{2} k \Delta l^2$$

$$\Delta l = L\cos\alpha - l_0$$

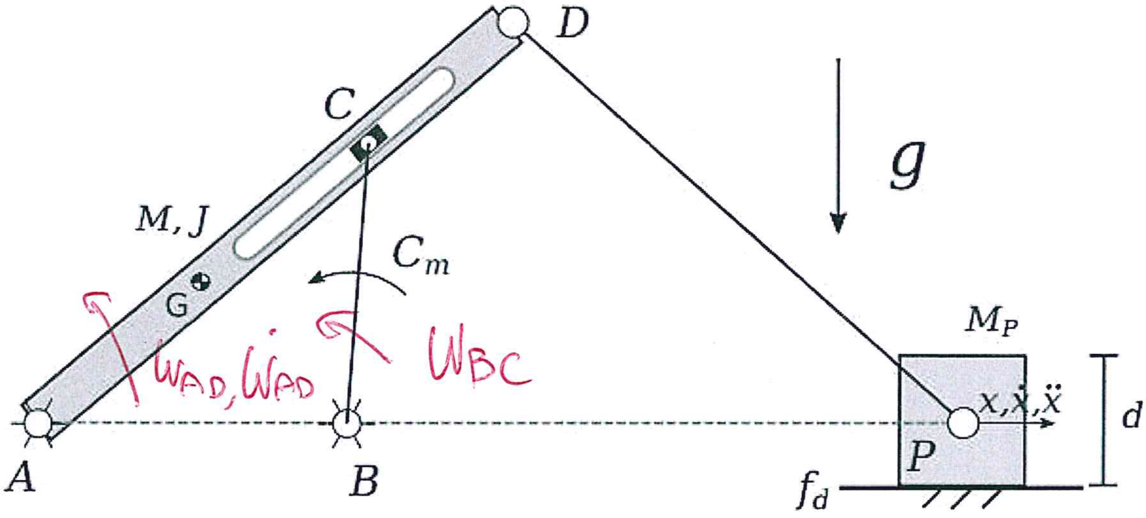
$$V_g = mgh_G = mg\left(-\frac{L}{2}\operatorname{sen}\alpha\right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = k\left(L\cos\alpha - l_0\right)\left(-L\operatorname{sen}\alpha\right) - mg\frac{L}{2}\cos\alpha = 0$$

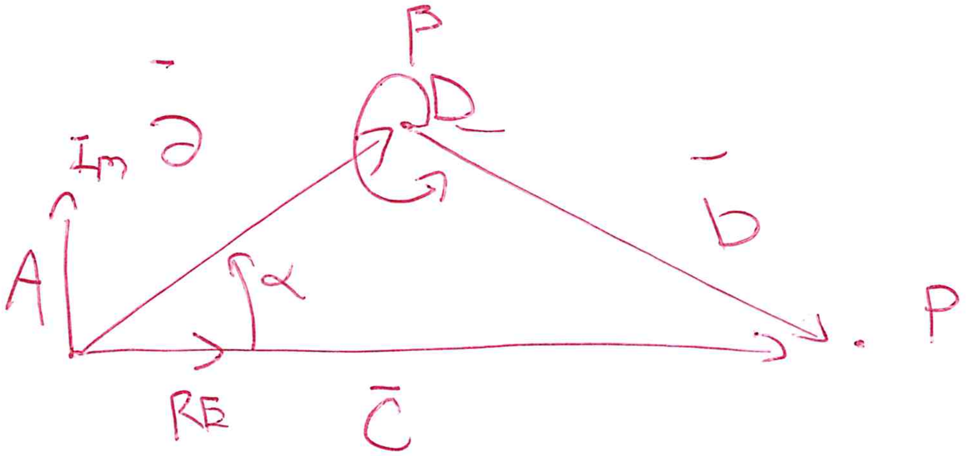
$$l_0 = -\left(\frac{\overset{5}{\boxed{mg}}\frac{L}{2}\cos(30)}{\left(-\underset{1}{\boxed{L}}\operatorname{sen}(30)\right)\underset{100}{\boxed{k}}}\right) + L\cos(30) = 0{,}44\,m$$

②

①



Ⓐ $\omega_{AD}, \dot{\omega}_{AD}$



Eq CHIUSURA

$\bar{a} + \bar{b} = \bar{c}$

	M	A
$\bar{a}$	a	α
$\bar{b}$	b	β
$\bar{c}$	c	$\gamma = 0$

I CHIUSURA (MAN CENT)

3 VAR (α, β, c)

POS

C NOTA

$\dot{c} = \dot{x}$

$\ddot{c} = \ddot{x}$

$$
\begin{cases}
RE: & a\cos\alpha + b\cos\beta = c \\
IM: & a\sin\alpha + b\sin\beta = 0
\end{cases}
\rightarrow \alpha, \beta
$$

VEL

$$i a\dot{\alpha} e^{i\alpha} + i b\dot{\beta} e^{i\beta} = \dot{c}$$

$$\begin{array}{l} \text{RE} \\ \\ \text{IM} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} -a\dot{\alpha}\,\mathrm{sen}\,\alpha - b\dot{\beta}\,\mathrm{sen}\,\beta = \dot{c} \\ \\ a\dot{\alpha}\cos\alpha + b\dot{\beta}\cos\beta = 0 \end{array} \right] \Rightarrow \dot{\alpha}, \dot{\beta} = f(c, \dot{c}) = f(x, \dot{x})$$

ACC

$$i a\ddot{\alpha} e^{i\alpha} - a\dot{\alpha}^2 e^{i\alpha} + i b\ddot{\beta} e^{i\beta} - b\dot{\beta}^2 e^{i\beta} = \ddot{c}$$

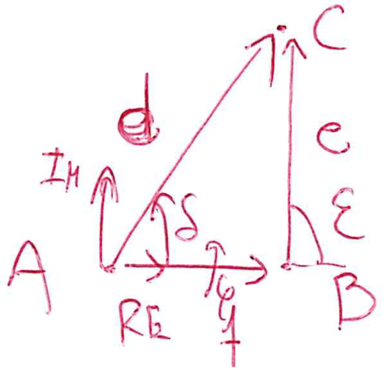
$$\begin{array}{l} \text{RE} \\ \\ \text{IM} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} -a\ddot{\alpha}\,\mathrm{sen}\,\alpha - a\dot{\alpha}^2\cos\alpha - b\ddot{\beta}\,\mathrm{sen}\,\beta - b\dot{\beta}^2\cos\beta = \ddot{c} \\ \\ a\ddot{\alpha}\cos\alpha - a\dot{\alpha}^2\,\mathrm{sen}\,\alpha + b\ddot{\beta}\cos\beta - b\dot{\beta}^2\,\mathrm{sen}\,\beta = 0 \end{array} \right.$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{c} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{array} = f(x, \dot{x}, \ddot{x})$$

$\bar{\omega}_{AD} = \dot{\alpha}\bar{k}$ $\quad \dot{\bar{\omega}}_{AD} = \ddot{\alpha}\bar{k}$

(B) $\omega_{BC} = ?$



$$d e^{i\delta} = f e^{i\varphi} + e^{i\varepsilon}$$

	M	A
$\bar{d}$	d	δ
$\bar{e}$	e	ε
$\bar{f}$	f	$\varphi = \alpha$

3 VAR
d, δ, ε
δ NOTO $= \alpha$

POS

$$\begin{cases} d\cos\delta = +f + e\cos\varepsilon \\ d\,\mathrm{sen}\,\delta = e\,\mathrm{sen}\,\varepsilon \end{cases} \quad \begin{matrix} d \\ \varepsilon \end{matrix} = f(\delta) = f(\alpha)$$

VEL

$$i d \dot{\delta} e^{i\alpha} + \dot{d} e^{i\delta} = i e \dot{\varepsilon} e^{i\varepsilon}$$

$$\begin{cases} -d\dot{\delta}\,\mathrm{sen}\,\delta + \dot{d}\cos\delta = -e\dot{\varepsilon}\,\mathrm{sen}\,\varepsilon \\ d\dot{\delta}\cos\alpha + \dot{d}\,\mathrm{sen}\,\delta = e\dot{\varepsilon}\cos\varepsilon \end{cases} \quad \begin{matrix} \dot{d} \\ \dot{\varepsilon} \end{matrix} = f(\delta, \dot{\delta}) = f(\alpha, \dot{\alpha})$$

$$\bar{\omega}_{BC} = \dot{\varepsilon}\,\bar{k}$$

B

C_M?

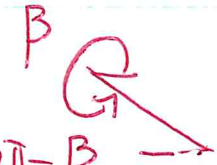
$$W_{EXT} + W_{diss} = \frac{dE_c}{dt}$$

$$W_{EXT} = M\bar{g}\cdot\bar{V}_G^{\,*} + C_M\,\omega_{BC} = -M g V_G^Y + C_M\,\dot{\varepsilon}$$

$$W_{diss} = -f_D\,|N|^{*\&}\,|\dot{x}|$$

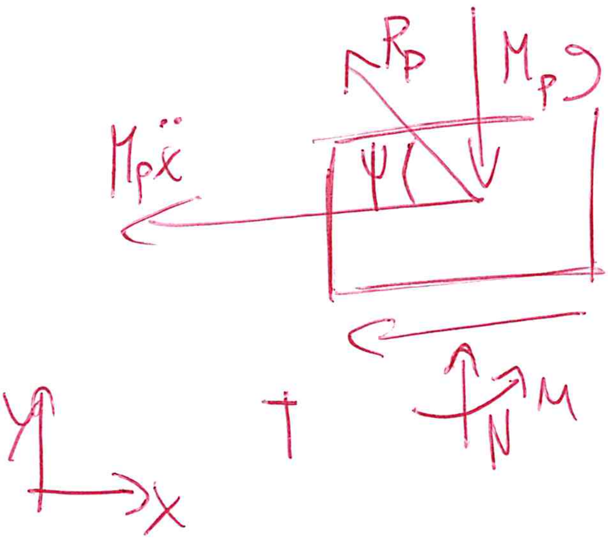
$$\frac{dE_c}{dt} = \underbrace{M\,\bar{a}_G\,\bar{V}_G}_{M|AG|^2\ddot{\alpha}\dot{\alpha}} + M_p\,\ddot{x}\,\dot{x} + \underbrace{J\,\dot{\bar{\omega}}_{AD}\,\bar{\omega}_{AD}}_{J\ddot{\alpha}\dot{\alpha}}$$

$$*\ \bar{V}_G = \dot{\alpha}\,|AG|\,(\cos\alpha\,\bar{i} - \mathrm{Sen}\,\alpha\,\bar{j}) = V_G^X\,\bar{i} + V_G^Y\,\bar{j}$$



$\psi = 2\pi - \beta$

**



$\rightarrow \dot{x}, \ddot{x}$

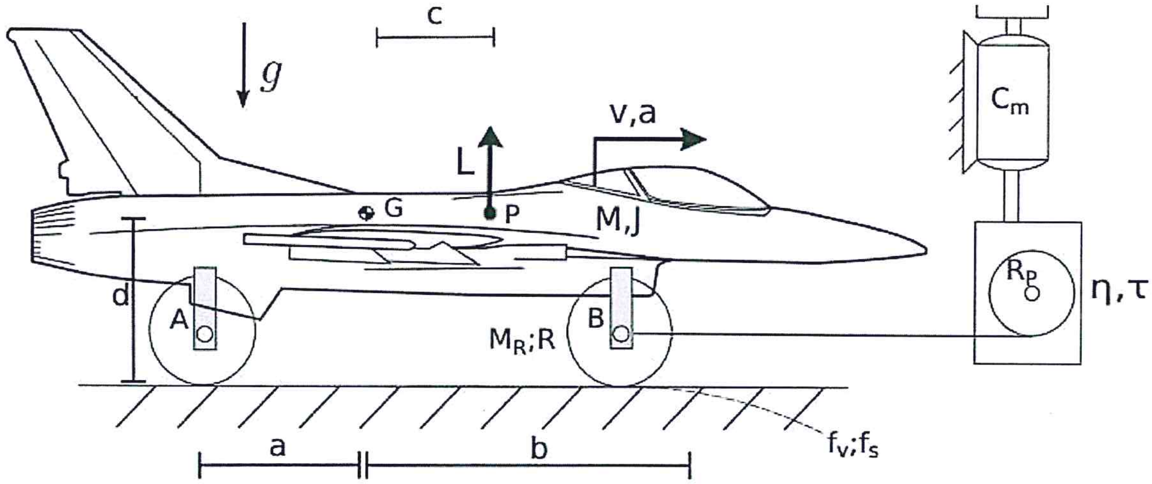
$$\begin{cases} F_x = 0 \\ -M_p \ddot{x} - T - R_p \cos\psi = 0 \\ F_y = 0 \\ N - M_p g + R_p \operatorname{sen}\psi = 0 \\ T = f_D |N| \end{cases}$$

3 EQ 3 INC

T, N, R_p

Eq RIS

$$C_M = \frac{M g V_G^y + f_D |N| |\dot{x}| + M |AG|^2 \ddot{\alpha} \dot{\alpha} + M_p \ddot{x} \dot{x} + J \ddot{\alpha} \dot{\alpha}}{\dot{\varepsilon}}$$



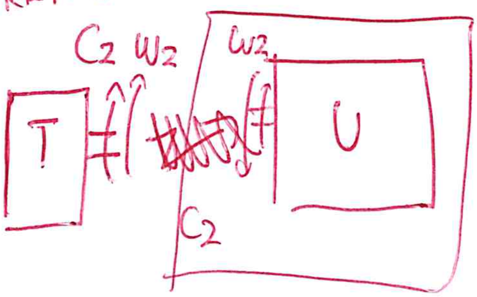
Ⓐ a spunto

$$W_M + W_P + W_U = \frac{dE_c}{dt}$$

$$W_M = C_M^o \omega_M$$

$$W_U = 0$$

$W_P \Rightarrow$ MOTO DIRETTO LATO UT



POT ENTRA NELL'UTILIZZATORE

$$-C_2\omega_2$$

$$-W_2 + \underbrace{\cancel{W_U}}_{0} = \frac{dE_c^U}{dt}$$

$a > 0$

$v = 0^+$

$-W_2 > 0 \rightarrow W_2 < 0$

$$-W_2 = (M + 2M_R)\,a v + 2\,\frac{M_R R^2}{2}\,\frac{a v}{R^2}$$

$$-J_M \dot{\omega}_M \omega_M$$

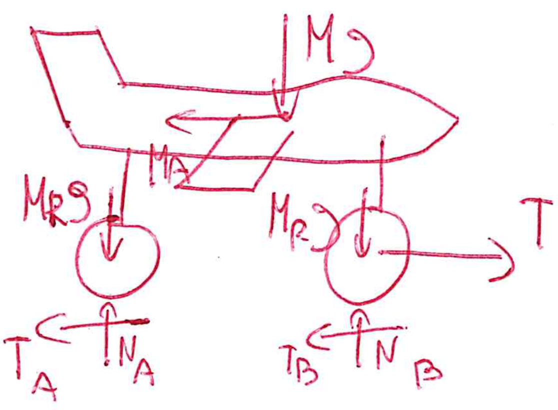
$$\begin{cases} C_M^{\circ}\omega_M - (1-\eta_D)(C_M^{\circ}\omega_M) = (M+3M_R)\, a V + J_m \dot{\omega}_m \omega_m \\ \omega_M = \dfrac{V}{R_p \tau} \qquad \omega_p = \tau\, \omega_M \qquad V = \omega_p R_p = \tau R_p \omega_M \end{cases} \quad (2)$$

$$\eta_D C_M^{\circ} \frac{\cancel{V}}{R_p \tau} = \left(M + 3M_R + \eta_D \frac{J_M}{R_p^2 \tau^2}\right) a \cancel{V}$$

$$a = \frac{\dfrac{\eta_D C_M^{\circ}}{R_p \tau}}{\left(M + 3M_R + \eta_D \dfrac{J_M}{R_p^2 \tau^2}\right)} = \frac{\dfrac{0{,}9 \cdot 2000}{2 \cdot 0{,}1}}{\left(20000 + 300 + 0{,}9 \dfrac{\cdot 100}{2^2 \cdot 0{,}1^2}\right)}$$

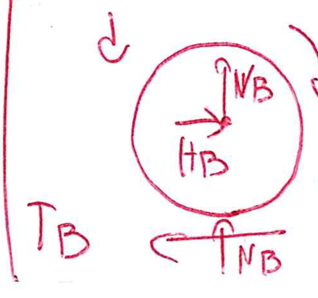
$$= \frac{9000}{22550} \simeq 0{,}4 \ m/s^2$$

B TENSIONE FUNE



$F_x = 0$

$T = M_A + T_A + T_B$



$\dot{\omega}_R = \dfrac{a}{R}$ $\quad J_R \dot{\omega}_R$

$M_B = 0$

$T_B = \dfrac{J_R \dot{\omega}_R}{R}$

$T_A = T_B = 50\ N$ (3)

$T = 2 \cdot T_A + M_A = 2 \cdot 50 + 20000 \cdot 0{,}4 = \underline{\underline{8100\ N}}$

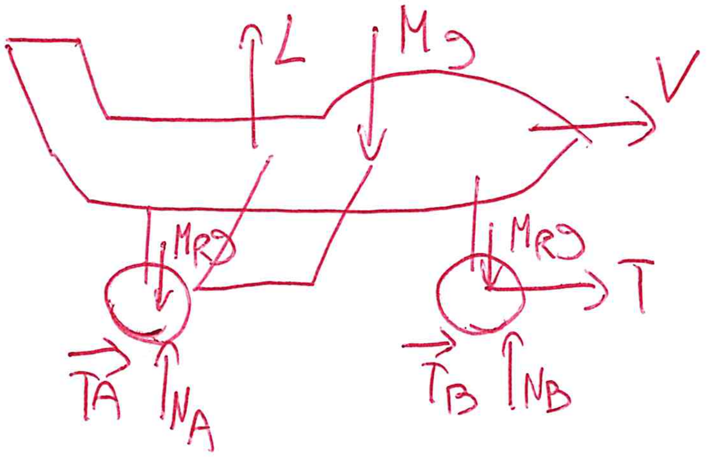
(C)

VELOCITÀ A REGIME

$W_M = C_M \omega_M$

$W_U = -f_V R (N_A + N_B)\,\omega_R = -f_V (N_A + N_B) V = -f_V (Mg \overset{2M_Rg}{\vee} - k_L V^2) V$

$\frac{dE_C}{dt} = J_M \dot{\omega}_M \omega_M + (M + 3M_R) a V = 0$



$N_A + N_B = Mg - L + 2M_R g$

$= Mg - K_L V^2 + 2M_R g$

$W_M < 0 \Rightarrow$ MOTO DIRETTO

$$W_p = -(1-\eta_D)\, C_M\, \omega_M$$

Eq MOTO

$$\eta_D C_M \omega_M - f_V (Mg - K_L V^2) V = 0$$

$$\begin{cases} \eta_D C_M \dfrac{\cancel{V}}{\tau R_p} - f_V \left(\overset{+2M_R}{M_V} g - K_L V^2\right) \cancel{V} = 0 \\ C_M = C_M^0 \left(1 - \dfrac{\omega_M}{\omega_S}\right) = C_M^0 \left(1 - \dfrac{\frac{V}{\tau R_p}}{\omega_S}\right) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$f_V \left(\overset{+2M_R}{M_V} g - K_L V^2\right) \frac{\tau R_p}{\eta_D} = C_M^0 \left(1 - \frac{V}{\tau R_p \omega_S}\right)$$

$$\underbrace{\left(-\frac{\overset{0{,}05}{f_V}\,\overset{20}{K_L}\,\overset{0{,}1}{\tau}\,\overset{2}{R_p}}{\underset{0{,}9}{\eta_D}}\right)}_{a} V^2 + \underbrace{\left(\frac{\overset{2000}{C_M^0}}{\tau R_p \omega_S \to 720}\right)}_{b} V + \underbrace{\left(\frac{f_V\, \overset{+2M_R}{M_V} g\, \tau R_p}{\eta_D} - C_M^0\right)}_{c} = 0$$

$$-0{,}22\,v^2 + 13{,}9\,v + 201{,}8 = 0$$

$$v = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-13{,}9 \pm \sqrt{13{,}9^2+4\cdot 0{,}22\cdot 201{,}8}}{-2\cdot 0{,}22}$$

$$v = 75{,}3\ m/s = 271{,}2\ km/h$$