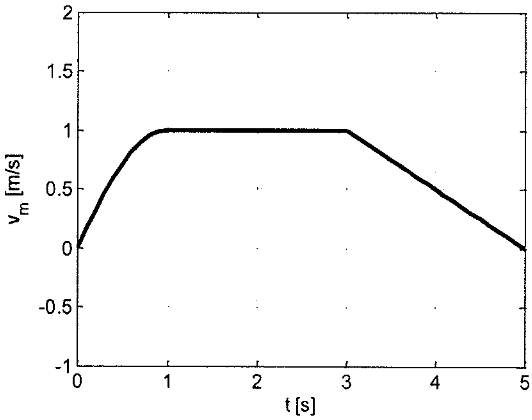
MECCANICA APPLICATA ALLE MACCHINE
Allievi meccanici AA.2012-2013 prova del 24-09-2013

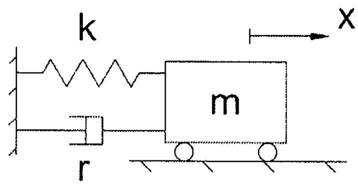
Problema 1.1

Assegnato l'andamento di velocità v(t) in figura, si chiede di rappresentare in forma grafica l'andamento dell'accelerazione nel tempo, indicando gli opportuni valori numerici.
Si noti che nel primo tratto da 0 secondi ad 1 secondo vale $v(t) = \sin\frac{\pi}{2}t$.

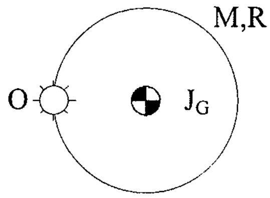


Problema 1.2
Dato il sistema vibrante rappresentato in figura, calcolare il valore minimo che deve assumere la costante di smorzamento r per ottenere una risposta al moto libero non oscillante.

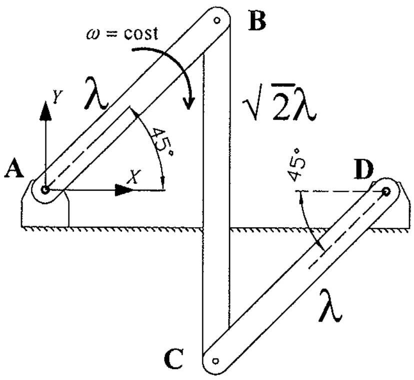
$$\begin{cases} m = 10\,kg \\ k = 1000\,\dfrac{N}{m} \end{cases}$$



Problema 1.3
Determinare il momento d'inerzia intorno al polo O del disco omogeneo rappresentato in figura. M=2 kg, R=0.5 m



Problema 1.4
Determinare velocità e accelerazione (in modulo, direzione e verso) dei punti B e C del sistema in figura, sapendo che l'asta AB ruota di velocità angolare ω=cost con verso indicato. Valori numerici: l=1m. ω=5rad/s.

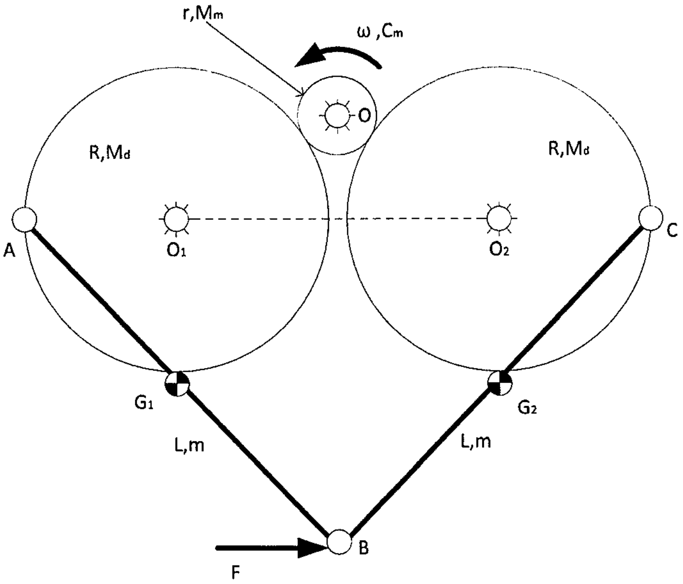


Problema N.2
Il sistema meccanico illustrato in figura giace in un piano verticale. Un disco di massa M_m e raggio r è vincolato a terra attraverso la cerniera O. Su tale disco agisce la coppia motrice C_m tale da mantenere il disco in rotazione a una velocità angolare costante pari a ω.
Al primo disco sono collegati due dischi di raggio R e massa M_d incernierati a terra mediante le cerniere O_1 e O_2. Il disco di raggio r è vincolato ai dischi di raggio R attraverso un vincolo di rotolamento senza strisciamento (si trascuri la resistenza al rotolamento).
Ai dischi di raggio R sono collegate, attraverso due cerniere poste nei punti A e C, due aste omogene di ugual lunghezza L e aventi massa m. Le due aste si uniscono attraverso una cerniera nel punto B.
Sulla cerniera B agisce inoltre un carico concentrato F sempre diretto orizzontalmente.

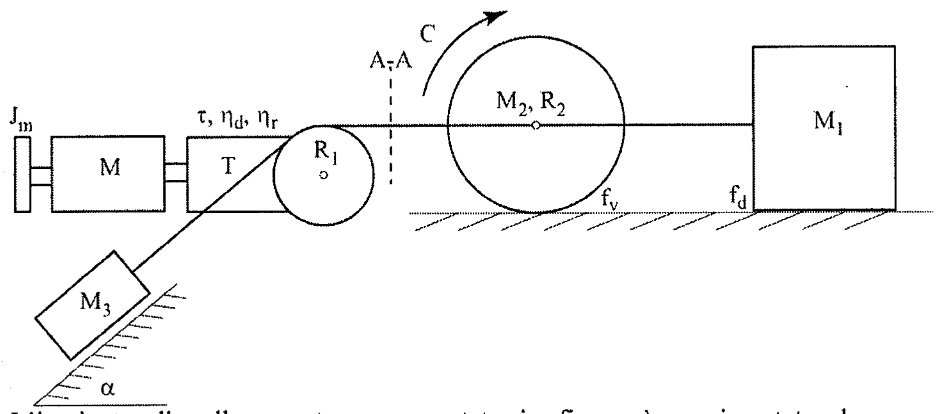
MECCANICA APPLICATA ALLE MACCHINE
Allievi meccanici AA.2012-2013 prova del 24-09-2013

Supponendo note tutte le grandezze geometriche e la posizione del sistema nell'atto di moto rappresentato in figura, si chiede di:

1) determinare i vettori velocità angolare ed accelerazione angolare delle aste AB e BC;
2) determinare i vettori velocità ed accelerazione dei baricentri G1 e G2 relativi alle aste omogenee AB e BC;
3) calcolare la coppia motrice C_m necessaria a garantire le condizioni di moto assegnate;
4) determinare le reazioni vincolari nella cerniera A.



Problema N.3



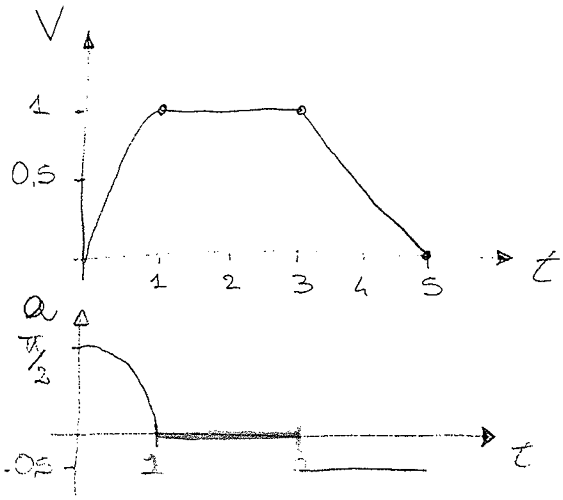
M_1	5 kg
M_2	12 kg
M_3	1 kg
f_v	0.01
f_d	0.3
R_2	3 m
R_1	1 m
C	40 Nm
α	30°

L'impianto di sollevamento rappresentato in figura è movimentato da un motore collegato ad una trasmissione con rendimento $\eta_d=\eta_r=\eta$ e rapporto di trasmissione τ. All'uscita della trasmissione è collegata una puleggia di momento di inerzia trascurabile di raggio R_1. Sulla puleggia si avvolge senza strisciare una fune inestensibile: ad una estremità di questa è collegata una massa M_3 che scorre su un piano inclinato di un angolo α, mentre all'altro capo è collegato un disco di massa M_2 e raggio R_2, che rotola senza strisciare su una guida rettilinea ed a cui è applicata una coppia C nota. Al disco è inoltre vincolata tramite fune inestensibile una massa M_1. Sia assegnato il coefficiente di attrito volvente f_v per il contatto disco guida e quello di attrito dinamico f_d tra massa M_1 e guida. **Noti inoltre i dati in tabella:**

1) Si determini la coppia motrice allo spunto per garantire un'accelerazione della massa M_3 in discesa pari a 0.2 m/s^2.
2) Si determini la coppia motrice C_m per garantire il moto in discesa della massa M_3 in condizioni di regime;
3) Si determini nelle condizioni di moto al punto 1 il tiro della fune nella sezione A-A.

Si discuta per ciascun punto il tipo di moto.

Problema 1.1

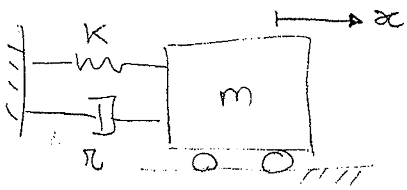


$$a(t) = \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} t$$

$$a(0) = \frac{\pi}{2}$$

$$a(1) = 0$$

Problema 1.2



sistema non oscillante se $h = 1$

$$h = \frac{r}{r_c} = \frac{r}{2 m \omega_0} \quad \text{con} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{1000}{10}} = 10 \ \frac{rad}{s}$$

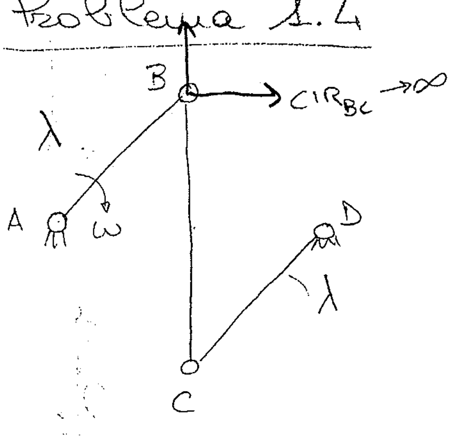
$$r = h \ r_c = h \cdot 2 m \omega_0 = 1 \cdot 2 \cdot 10\,kg \cdot 10 \ \frac{rad}{s} = \boxed{200 \ \frac{Ns}{m}}$$

Problema 1.3

$$J_O = J_G + M \cdot \overline{OG}^2 = \frac{MR^2}{2} + MR^2 = \frac{3}{2} MR^2$$

$$= \frac{3}{2} \cdot 2\,kg \cdot 0{,}5^2\,m^2 = \boxed{0{,}75 \ kg\,m^2}$$

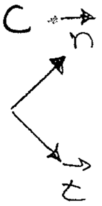
Problema 1.4



TERNA TRASLANTE IN B

$$\vec{v}_C^{\,ASS} = \vec{v}_C^{\,TR} + \vec{v}_C^{\,REL}$$

MOD	$\omega_{CD} CD$	ωAB	$\omega_{BC} BC$
DIR	$\perp CD$	$\perp AB$	$\perp BC$



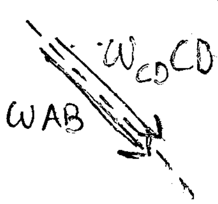
$$\Rightarrow \quad \vec{\omega}_{BC} = 0$$

$$\vec{V}_B = \vec{\omega} \wedge (B-A) = \boxed{\omega \lambda \vec{t}}$$

$$\vec{a}_B = -\omega^2 (B-A) = \boxed{-\omega^2 \lambda \vec{n}}$$

$$\vec{V}_C = \vec{V}_B = \boxed{\omega \lambda \vec{t}}$$

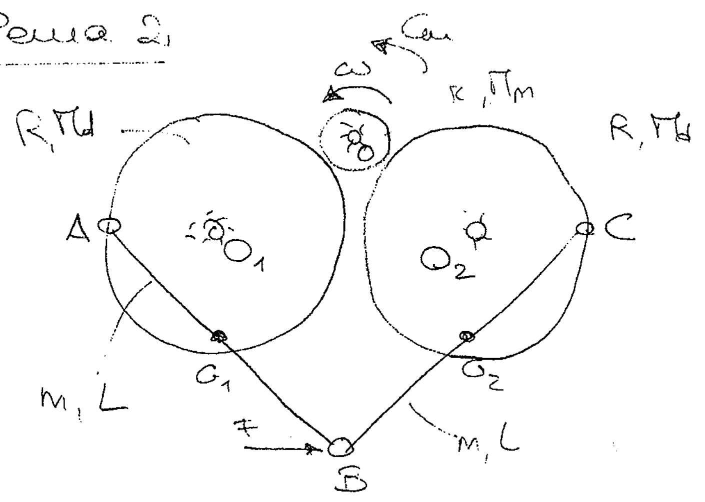
$$\vec{a}_C = \boxed{\omega^2 \lambda \vec{n}}$$



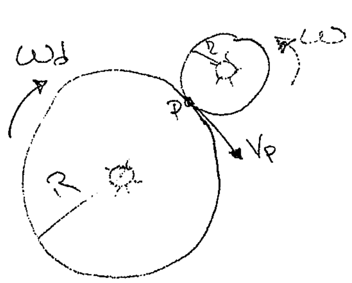
$$\vec{\omega}_{BC} = 0$$

$$\vec{V}_C = \omega \lambda \vec{t} = \omega_{CD} \lambda \vec{t} \Rightarrow \omega_{CD} = \omega$$

Problema 2,

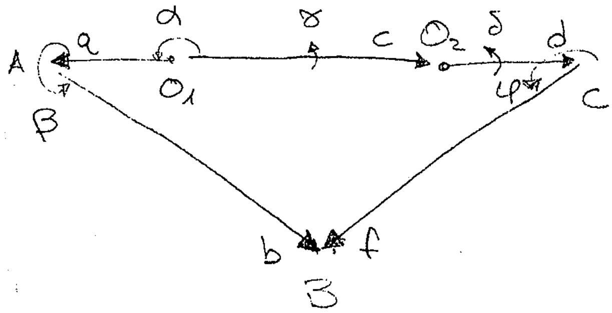


1)



$\vec{\omega}_d = -\omega \frac{r}{R} \vec{K}$

valida anche × l'altro disco



$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d} + \vec{f}$

C	V
a	α → nota (ω_d)
b	β
c, γ	
d	δ → nota (ω_d)
f	φ

$\dot{\alpha} = \dot{\delta} = \omega_d$

$$a e^{i\alpha} + b e^{i\beta} = c e^{i\gamma} + d e^{i\delta} + f e^{i\varphi}$$

$$\begin{cases} a\cos\alpha + b\cos\beta = c\cos\gamma + d\cos\delta + f\cos\varphi \\ a\sin\alpha + b\sin\beta = c\sin\gamma + d\sin\delta + f\sin\varphi \end{cases}$$

↓ Velocità:

$$\begin{cases} -a\dot{\alpha}\sin\alpha - b\dot{\beta}\sin\beta = -d\dot{\delta}\sin\delta - f\dot{\varphi}\sin\varphi \\ a\dot{\alpha}\cos\alpha + b\dot{\beta}\cos\beta = d\dot{\delta}\cos\delta + f\dot{\varphi}\cos\varphi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{\beta} \\ \dot{\varphi} \end{cases}$$

↓ Accelerazioni:

$$\begin{cases} -a\ddot{\alpha}\sin\alpha - a\dot{\alpha}^2\cos\alpha - b\ddot{\beta}\sin\beta - b\dot{\beta}^2\cos\beta = -d\ddot{\delta}\sin\delta - d\dot{\delta}^2\cos\delta - f\ddot{\varphi}\sin\varphi - f\dot{\varphi}^2\cos\varphi \\ a\ddot{\alpha}\cos\alpha - a\dot{\alpha}^2\sin\alpha + b\ddot{\beta}\cos\beta - b\dot{\beta}^2\sin\beta = d\ddot{\delta}\cos\delta - d\dot{\delta}^2\sin\delta + f\ddot{\varphi}\cos\varphi - f\dot{\varphi}^2\cos\varphi \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \ddot{\beta} \\ \ddot{\varphi} \end{cases}$$

$$\vec{\omega}_{AB} = \dot{\beta}\vec{K} \qquad \dot{\vec{\omega}}_{AB} = \ddot{\beta}\vec{K}$$
$$\vec{\omega}_{BC} = \dot{\varphi}\vec{K} \qquad \dot{\vec{\omega}}_{BC} = \ddot{\varphi}\vec{K}$$

2) $\vec{V}_{G1} = \vec{V}_A + \vec{\omega}_{AB} \wedge (G_1 - A)$

$$\vec{V}_A = \overset{=0}{\vec{V}_{O1}} + \vec{\omega}_d \wedge (A - O_1) = -\omega\frac{r}{R}\vec{K} \wedge (-R\vec{i}) = \omega r\vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_{G1} = \omega r\vec{j} + \dot{\beta}\vec{K} \wedge \left(\frac{L}{2}\cos\beta\vec{i} + \frac{L}{2}\sin\beta\vec{j}\right)$$
$$= \omega r\vec{j} + \frac{L}{2}\dot{\beta}\cos\beta\vec{j} - \frac{L}{2}\dot{\beta}\sin\beta\vec{i} = \boxed{V_{G1x}\vec{i} + V_{G1y}\vec{j}}$$

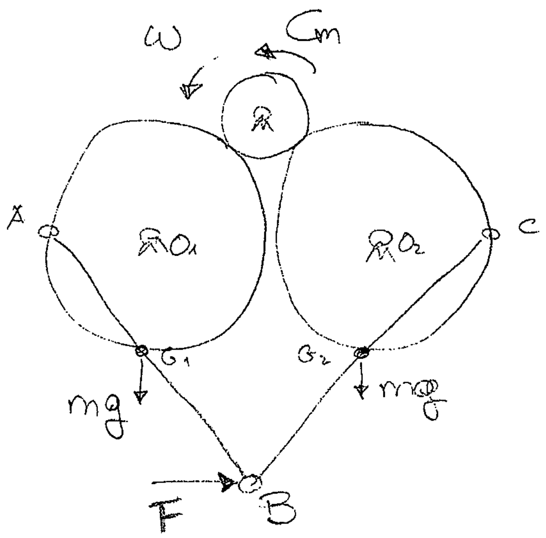
$$\vec{a}_{G1} = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}}_{AB} \wedge (G_1 - A) - \omega_{AB}^2 (G_1 - A)$$
$$\vec{a}_A = \cancel{\vec{a}_{O1}} + \overset{0}{\dot{\vec{\omega}}_d} \wedge (A - O_1) - \omega_d^2 (A - O_1) = +\omega^2\frac{r^2}{R^2}R\vec{i}$$
$$\Rightarrow \vec{a}_{G1} = \omega^2\frac{r^2}{R}\vec{i} + \ddot{\beta}\vec{K} \wedge \left(\frac{L}{2}\cos\beta\vec{i} + \frac{L}{2}\sin\beta\vec{j}\right) - \dot{\beta}^2\left(\frac{L}{2}\cos\beta\vec{i} + \frac{L}{2}\sin\beta\vec{j}\right)$$
$$= \omega^2\frac{r^2}{R}\vec{i} + \frac{L}{2}\ddot{\beta}\cos\beta\vec{j} - \frac{L}{2}\ddot{\beta}\sin\beta\vec{j} - \frac{L}{2}\dot{\beta}^2\cos\beta\vec{i} - \frac{L}{2}\dot{\beta}^2\sin\beta\vec{j}$$
$$= \boxed{a_{G1x}\vec{i} + a_{G1y}\vec{j}}$$

$$\vec{V}_C = -\omega r\vec{j} \qquad \vec{a}_C = -\omega^2\frac{r^2}{R}\vec{i}$$

$$\vec{V}_{G2} = \vec{V}_C + \vec{\omega}_{BC} \wedge (G_2 - C)$$
$$= -\omega r\vec{j} + \dot{\varphi}\vec{K} \wedge \left(\frac{L}{2}\cos\varphi\vec{i} + \frac{L}{2}\sin\varphi\vec{j}\right)$$
$$= -\omega r\vec{j} + \frac{L}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi\vec{j} - \frac{L}{2}\dot{\varphi}\sin\varphi\vec{i} = \boxed{V_{G2x}\vec{i} + V_{G2y}\vec{j}}$$

$$\vec{a}_{G2} = \vec{a}_C + \dot{\vec{\omega}}_{BC} \wedge (G_2 - C) - \omega_{BC}^2 (G_2 - C)$$
$$= -\omega^2\frac{r^2}{R}\vec{i} + \ddot{\varphi}\vec{K} \wedge \left(\frac{L}{2}\cos\varphi\vec{i} + \frac{L}{2}\sin\varphi\vec{j}\right) - \dot{\varphi}^2\left(\frac{L}{2}\cos\varphi\vec{i} + \frac{L}{2}\sin\varphi\vec{j}\right)$$
$$= -\omega^2\frac{r^2}{R}\vec{i} + \frac{L}{2}\ddot{\varphi}\cos\varphi\vec{j} - \frac{L}{2}\ddot{\varphi}\sin\varphi\vec{i} - \frac{L}{2}\dot{\varphi}^2\cos\varphi\vec{i} - \frac{L}{2}\dot{\varphi}^2\sin\varphi\vec{j}$$
$$= \boxed{a_{G2x}\vec{i} + a_{G2y}\vec{j}}$$

3)



$$J_m = \frac{M_m r^2}{2}$$

$$J_{O1} = J_{O2} = \frac{M_d R^2}{2}$$

$$J_{G1} = J_{G2} = \frac{m L^2}{12}$$

$$W_{att} + \overset{=0}{W_{reatt}} = \frac{dE_c}{dt}$$

$$W_{att} = \vec{C}_m \cdot \vec{\omega} + \vec{F} \cdot \vec{V}_B + m\vec{g} \cdot \vec{V}_{G1} + m\vec{g} \cdot \vec{V}_{G2}$$

$$= C_m \omega + F V_{Bx} - mg V_{G1y} - mg V_{G2y}$$

$$E_c = \frac{1}{2} J_{O1} \omega_d^2 + \frac{1}{2} J_{O2} \omega_d^2 + \frac{1}{2} m V_{G1}^2 + \frac{1}{2} J_{G1} \omega_{AB}^2 + \frac{1}{2} m V_{G2}^2 + \frac{1}{2} J_{G2} \omega_{BC}^2 + \frac{1}{2} J_m \omega^2$$

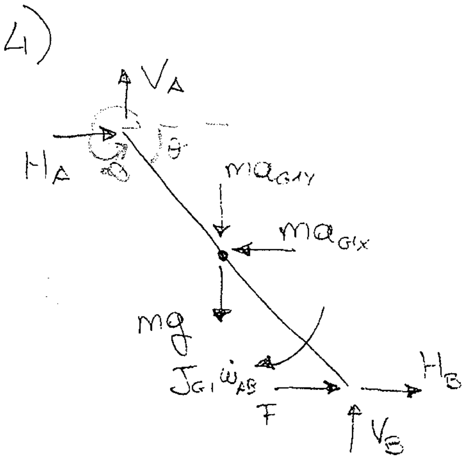
$$\frac{dE_c}{dt} = J_{O1} \omega_d \dot{\omega}_d + J_{O2} \omega_d \dot{\omega}_d + m V_{G1x} a_{G1x} + m V_{G1y} a_{G1y} + J_{G1} \omega_{AB} \dot{\omega}_{AB} +$$
$$+ m V_{G2x} a_{G2x} + m V_{G2y} a_{G2y} + J_{G2} \omega_{BC} \dot{\omega}_{BC} + J_m \omega \dot{\omega}$$

Tutto già calcolato in precedenza, a parte $\vec{V}_B$:

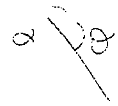
$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega}_{AB} \wedge (B - A)$$
$$\overset{!}{=} \omega r \vec{j} + L\dot{\beta} \cos\beta \vec{j} - L\dot{\beta} \sin\beta \vec{i} = V_{Bx} \vec{i} + V_{By} \vec{j}$$

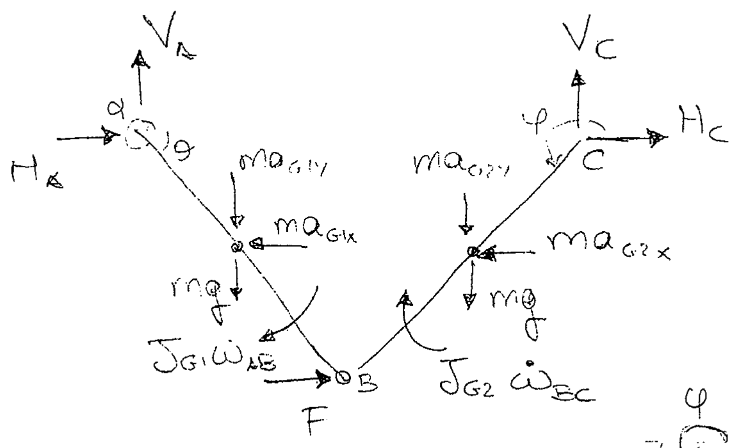
$\Rightarrow$ ricavo C_m!

4)

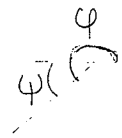


I





II



$$\begin{cases} \sum M_B^{(I)} = 0 \longrightarrow \\ \sum M_C^{(II)} = 0 \longrightarrow \end{cases} \left| \begin{array}{l} H_A \\ V_A \end{array} \right.$$

$$\sum M_B^{(I)} = 0 \qquad \left(\vartheta = 2\pi - \alpha\right)$$

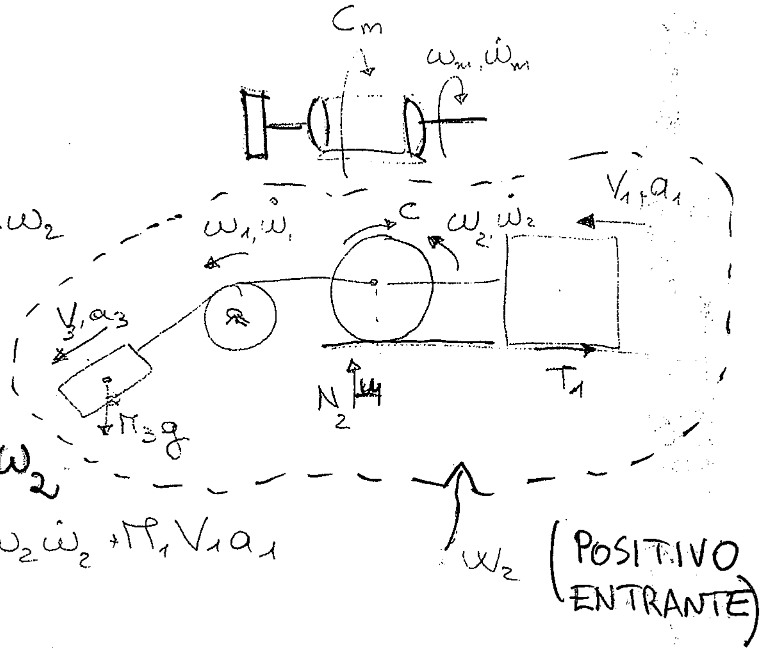
$$-H_A L \sin\vartheta - V_A L \cos\vartheta - \left(mg + ma_{G1y}\right)\frac{L}{2}\cos\vartheta + ma_{G1x}\frac{L}{2}\sin\vartheta + $$
$$- J_{G1}\dot{\omega}_{AB} = 0$$

$$\sum M_C^{(II)} = 0 \qquad \left(\psi = \varphi - \pi\right)$$

$$-\left(m_2 a_{G2x} + ma_{G2x}\right)\frac{L}{2}\sin\psi + \left(mg + ma_{G2y}\right)\frac{L}{2}\cos\psi - J_{G2}\dot{\omega}_{BC} - J_{G1}\dot{\omega}_{AB} +$$
$$+ F L \sin\psi + \left(mg + ma_{G1y}\right)\left(L\cos\psi + \frac{L}{2}\cos\vartheta\right) - V_A\left(L\cos\psi + L\cos\vartheta\right) = 0$$

Problema 3

1) $W_m + W_r + W_p = \frac{dE_c}{dt}$



$W_m = C_m \omega_m$

$W_r = M_3 g \sin\alpha V_3 - C\omega_2 - T_1 V_1 - N_2 u \omega_2$

analisi flusso potenza:

$+W_2 + M_3 g \sin\alpha V_3 - C\omega_2 - TV_1 - N_2 u \omega_2$

$= M_3 V_3 a_3 + J_1 \omega_1 \dot{\omega}_1 + M_2 V_2 a_2 + J_2 \omega_2 \dot{\omega}_2 + M_1 V_1 a_1$

legami cinematici:

$\omega_1 = \tau \omega_m \qquad \dot{\omega}_1 = \tau \dot{\omega}_m \qquad T = f_d N_1 = f_d M_1 g$

$V_3 = R_1 \tau \omega_m \qquad a_3 = R_1 \tau \dot{\omega}_m \qquad N_1 = M_1 g$

$V_1 = V_2 = R_1 \tau \omega_m \qquad a_1 = a_2 = R_1 \tau \dot{\omega}_m$

$\omega_2 = \frac{R_1}{R_2} \tau \omega_m \qquad \dot{\omega}_2 = \frac{R_1}{R_2} \tau \dot{\omega}_m$

$$+W_2 = -M_3 g \sin\alpha R_1 \tau \omega_m + C \frac{R_1}{R_2} \tau \omega_m + f_d M_1 g R_1 \tau \omega_m + M_2 g f_v \cancel{R_2} \tau \omega_m \frac{R_1}{\cancel{R_2}}$$
$$+ \underbrace{\left(M_3 R_1^2 \tau^2 + M_2 R_1^2 \tau^2 + J_2 \frac{R_1^2}{R_2^2} \tau^2 + M_1 R_1^2 \tau^2\right)}_{J^*} \omega_m \dot{\omega}_m$$

$$\underbrace{\left(+M_2 g f_v - M_3 g \sin\alpha + \frac{C}{R_2} + f_d M_1 g\right)}_{+24{,}32} R_1 \tau \omega_m + J^* \omega_m \dot{\omega}_m > 0 \Rightarrow \text{MOTO DIRETTO}$$

$W_p = -(1-\eta_D) W_1 = -(1-\eta_D)(C_m \omega_m - J_m \omega_m \dot{\omega}_m)$

$E_c = \frac{1}{2} J_m \omega_m^2 + \frac{1}{2} M_1 V_1^2 + \frac{1}{2} M_2 V_2^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} M_3 V_3^2$

$\frac{dE_c}{dt} = J_m \omega_m \dot{\omega}_m + J^* \omega_m \dot{\omega}_m$

$$\cancel{C_{m0}\omega_m} + M_3 g \sin\alpha R_1 \tau \cancel{\omega_m} - C\frac{R_1}{R_2}\tau \cancel{\omega_m} - f_d M_1 g R_1 \tau \cancel{\omega_m} - f_v \cancel{R_2} M_2 g \tau \omega_m \frac{R_1}{\cancel{R_2}}$$
$$- (\cancel{1} - \eta_D)(C_{m0}\cancel{\omega_m} - J_m \cancel{\omega_m}\dot{\omega}_m) = J_m \cancel{\omega_m}\dot{\omega}_m + J^* \cancel{\omega_m}\dot{\omega}_m$$

$$\boxed{C_{m0} = \frac{\eta_D (J_m + J^*)\dot{\omega}_m + \left(-M_3 g \sin\alpha + \frac{C}{R_2} + f_d M_1 g + f_v M_2 g\right) R_1 \tau}{\eta_D}} \quad \left(\dot{\omega}_m = \frac{a_3}{R_1 \tau}\right)$$

2) $W_m + W_r + W_p = 0$

$W_m = C_m \omega_m$

$W_r = M_3 g \sin\alpha V_3 - C\omega_2 - T_1 V_1 - N u \omega_2$

analisi flusso potenza:

$+W_2 + W_r = 0 \quad \Rightarrow W_2 = -W_r \quad \Rightarrow$ MOTO DIRETTO

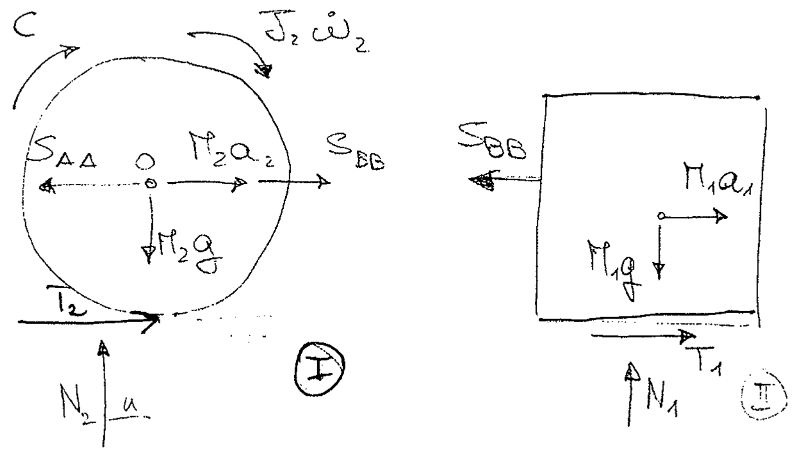
$W_2 > 0$

$W_p = -(1-\eta_D) C_m \omega_m$

$$\cancel{C_m \omega_m} + \left(M_3 g \sin\alpha - \frac{C}{R_2} - f_d M_1 g - f_v M_2 g\right) R_1 \tau \cancel{\omega_m} - (\cancel{1} - \eta_D) C_m \cancel{\omega_m} = 0$$

$$\boxed{C_{m,reg} = \left(\frac{C}{R_2} + f_d M_1 g + f_v M_2 g - M_3 g \sin\alpha\right) \frac{R_1 \tau}{\eta_D}}$$

3)



$S_{BB} = M_1 a_1 + T_1 = M_1 R \tau_1 \dot{\omega}_m + f_d M_1 g \qquad \left(\sum F_H^{(II)} = 0\right)$

$S_{AA} = M_2 a_2 + S_{BB} + T_2 \qquad \left(\sum F_H^{(I)} = 0\right)$

$N_2 = M_2 g \qquad \left(\sum F_V^{(I)} = 0\right)$

$-N_2 u + T_2 R_2 - C - J_2 \dot{\omega}_2 = 0 \rightarrow T_2 \qquad \left(\sum M_o^{(I)} = 0\right)$