MECCANICA APPLICATA ALLE MACCHINE

Allievi meccanici AA.2013-2014 prova del 24-07-2014

Problema 1.1

Data la legge di moto sotto riportata, calcolare i versori tangente e normale alla traiettoria nell'istante $t = 3$ s

$$\vec{s}(t) = (9t)\vec{i} + (3 + 2t^2)\vec{j}$$

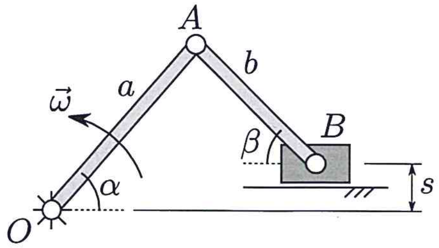
Problema 1.2

Calcolare la velocità del punto B del manovellismo ordinario deviato in figura. **Risolvere utilizzando il teorema dei moti relativi** nell'atto di moto assegnato.

$\omega = 1$ rad/s $\quad a = 2$ m

$\alpha = \pi/4$ rad $\quad b = 2 - \sqrt{2}/2$ m

$\beta = \pi/4$ rad



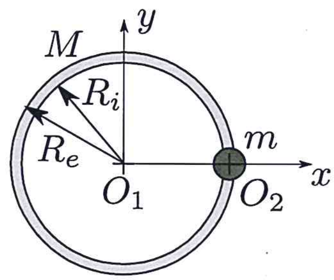
Problema 1.3

Il sistema meccanico in figura è composto da un anello omogeneo di massa M e raggio esterno R_e e raggio interno R_i saldato ad una massa puntiforme di massa m. La distanza tra i due centri O_1O_2 è pari a R.

Determinare il momento d'inerzia complessivo rispetto al polo O_1.

$M = 1$ kg $\quad m = 2$ kg

$R_e = 2.1$ m $\quad R_i = 1.9$ m $\quad R = 2$ m

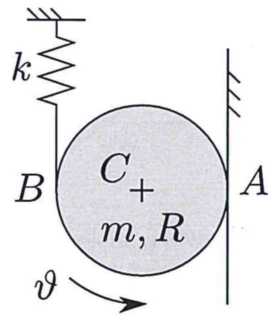


Problema 1.4

Il sistema meccanico, nel piano verticale, riportato in figura è composto da un disco omogeneo di massa m e raggio R che rotola senza strisciare su una guida rettilinea verticale. Sul disco si avvolge una fune inestensibile che collega il disco con l'estremo di una molla di rigidezza k. L'altro estremo della molla è vicolato a terra.

Calcolare la frequenza propria del sistema.

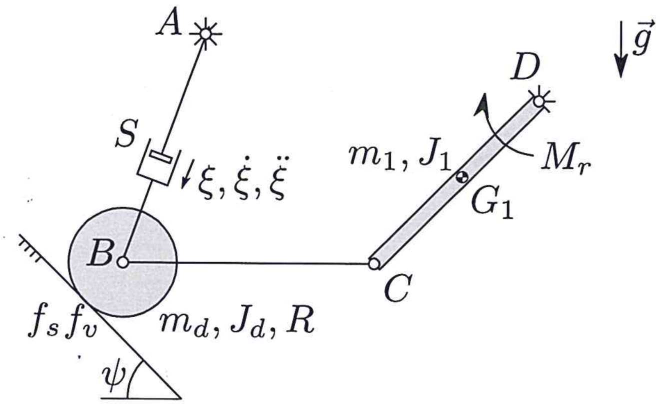
$m = 0.7$ kg $\quad R = 1.3$ m $\quad k = 150$ N/m



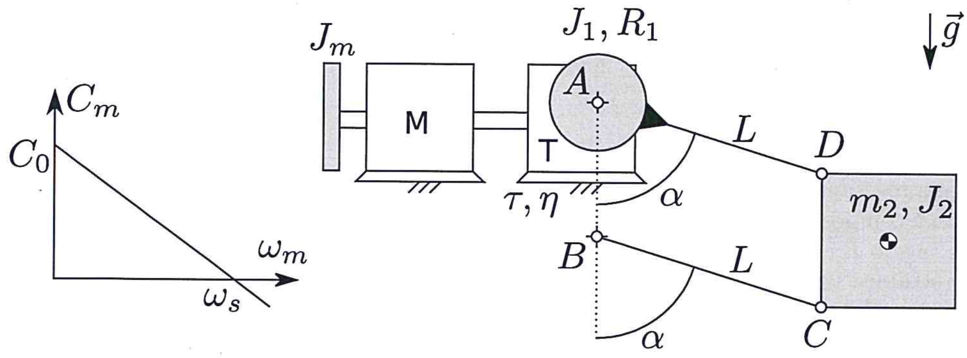
Problema 2

Il sistema meccanico rappresentato in figura, posto nel piano verticale, è composto da un pistone di cui è nota la legge di sfilo ($\xi(t), \dot{\xi} = \text{cost}, \ddot{\xi} = 0$) che è incernierato a terra in A ed è collegato tramite una cerniera al centro di un disco in B. Il disco di massa m_d e momento d'inerzia baricentrico J_d rotola senza strisciare su una guida rettilinea inclinata rispetto all'orizzontale di un angolo ψ; tra disco e guida il coefficiente d'attrito statico è f_s mentre il coefficiente resistenza al rotolamento è f_v. Un'asta priva di massa BC collega il centro del disco con un'asta CD con baricentro in G_1 di massa m_1 e momento d'inerzia baricentrico J_1. L'asta CD è vincolata a terra tramite una cerniera in D. All'asta CD è applicato un momento esterno resistente M_r. Nota la geometria del sistema e nota la legge di sfilo del pistone si chiede:

1. calcolare la velocità e l'accelerazione angolare dell'asta CD;
2. calcolare la pressione all'interno del cilindro idraulico che garantisce il moto assegnato;
3. verificare che non ci sia slittamento tra disco e guida.



Problema 3



Il sistema di movimentazione terra schematizzato in figura è composto da un motore con caratteristica assegnata e inerzia J_m. La trasmissione di rapporto di trasmissione τ e rendimento η è collegata ad una puleggia di raggio R_1 e momento d'inerzia J_1. Alla puleggia è vincolata rigidamente un'asta AD priva di massa di lunghezza L che movimenta una pala (più il suo carico, schematizzati come un unico corpo rigido di massa m_2 e momento d'inerzia baricentrico J_2) ad essa collegata con una cerniera in D. L'asta BC, priva di massa, lunga L e parallela all'asta AD, è collegata in C alla pala tramite una cerniera e in B è collegata a terra tramite un'altra cerniera. L'asta CD è verticale; l'angolo α è compreso tra 0 e π. Si chiede:

1. con pala in salita a velocità costante, determinare l'espressione della coppia resistente riportata all'albero motore e l'angolo α per cui questa risulta massima.
2. allo spunto con pala in salita, calcolare l'accelerazione della massa m_2 nella posizione rappresentata in figura.

1.1 $\vec{s}(t) = 9t\,\vec{i} + (3+2t^2)\,\vec{j}$

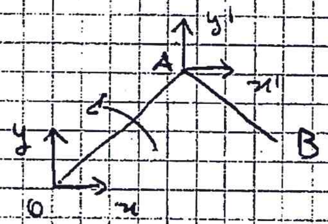
$\vec{v}(t) = 9\vec{i} + 4t\,\vec{j}$

$\vec{\tau} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \qquad \vec{\tau}(t=3s) = \dfrac{9\vec{i}+12\vec{j}}{\sqrt{9^2+12^2}} = \dfrac{3}{5}\vec{i} + \dfrac{4}{5}\vec{j} = 0{,}6\,\vec{i} + 0{,}8\,\vec{j}$

$\vec{k} = \vec{b} \qquad (0,0,1)$

$\vec{n} = \vec{b} \wedge \vec{\tau} = \det\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 3/5 & 4/5 & 0 \end{vmatrix} = -\dfrac{4}{5}\vec{i} + \dfrac{3}{5}\vec{j}$

1.2 Terna traslante in A



$\vec{v}_B = \vec{v}_{rel} + \vec{v}_{tr}$

$\vec{v}_B = v_B\,\vec{i}$

$\vec{v}_{rel} = \vec{\omega}_{AB} \wedge (B-A) = \omega_{AB}\vec{k} \wedge (b\cos\beta\,\vec{i} - b\sin\beta\,\vec{j}) = \omega_{AB} b\cos\beta\,\vec{j} + \omega_{AB} b\sin\beta\,\vec{i}$

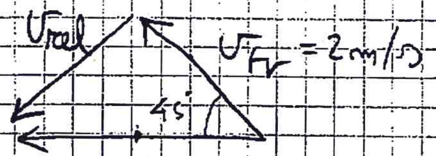
$\vec{v}_{tr} = \vec{v}_A = \vec{\omega} \wedge (A-O) = \omega\vec{k} \wedge (a\cos\alpha\,\vec{i} + a\sin\alpha\,\vec{j}) = \omega a\cos\alpha\,\vec{j} - a\omega\sin\alpha\,\vec{i}$

$v_B\,\vec{i} = (\omega_{AB} b\cos\beta + \omega a\cos\alpha)\,\vec{j} + (\omega_{AB} b\sin\beta - \omega a\sin\alpha)\,\vec{i}$

$$\begin{cases} v_B = \omega_{AB} b\sin\beta - \omega a\sin\alpha & \rightarrow \quad v_B = -\omega a(\sin\alpha + \cos\alpha\tan\beta) \\ 0 = \omega_{AB} b\cos\beta + \omega a\cos\alpha & \rightarrow \quad \omega_{AB} = -\omega\dfrac{a\cos\alpha}{b\cos\beta} \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{v}_B = -\frac{4\sqrt{2}}{2}\,\vec{i}}$$

2,82



$v_B = \cancel{\ } + \dfrac{2}{\sqrt{2}} + \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{2}$

1.3 $J_{O_1} = J_{O_1,anello} + J_{O_1,m}$

$J_{O_1,m} = mR^2 = 8\ kg\,m^2$

$J_{O_1,anello} = \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_{R_i}^{R_e} \rho\, b\, r^3\, dr\, d\theta = \underbrace{\pi\rho b(R_e^2 - R_i^2)}_{M}\ \frac{R_e^2+R_i^2}{2} = M\,\frac{R_e^2+R_i^2}{2} =$

$= 4{,}01\ kg\,m^2$

$J_{O_1} = 12{,}01\ kg\,m^2$

1.4 $E_c = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J_c \omega^2 = \frac{1}{2}\left(mR^2 + J_c\right)\dot{\vartheta}^2$

$v = \dot{\vartheta}R \qquad \omega = \dot{\vartheta}$

$J_{eq} = mR^2 + J_c = 1{,}7745 \ kg\,m^2$

$V = \frac{1}{2} k \Delta\ell^2 = \frac{1}{2}\left(kR^2 4\right)\vartheta^2$

$\Delta\ell = 2R\vartheta$

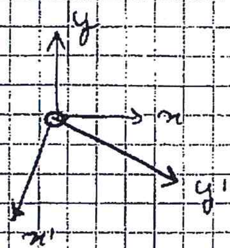
$k_{eq} = 4kR^2 = \cancel{253{,}5} \ Nm/rad \quad 1014$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k^*}{J^*}} = \cancel{11{,}9523} \ rad/s \quad 23{,}95$

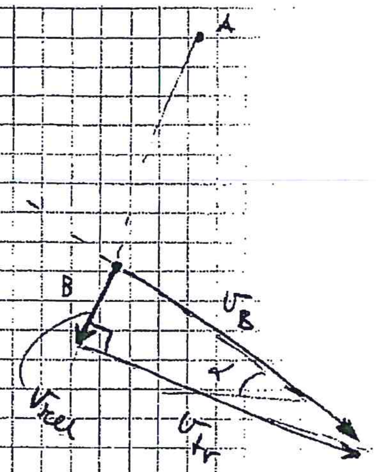
$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \cancel{1{,}9023} \ Hz \quad 3{,}805$

N 2

? 1)



	$\vec{v}_B$	$=$	$\vec{v}_{rel}$	$+$	$\vec{v}_{tr,rot}$
$\Vert$	?		$\dot{\xi}$		?
$\angle$	$/\!/\vec{t}$		$/\!/\vec{i}'$		$\perp (B-A)$



TERNA ROTANTE CENTRO A

$\vec{v}_B = v_B \vec{t}$ $\vec{t}$ versore tangente piano inclinato

$\vec{v}_{rel} = \dot{\xi}\, \vec{i}'$

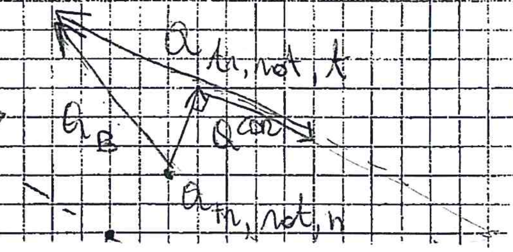
$\vec{v}_{tr,rot} = \vec{\omega}_{AB} \wedge (B-A)$

$v_{tr} = \omega_{AB} \overline{BA} \rightarrow \vec{\omega}_{AB} = \dfrac{v_{tr}}{\overline{BA}} \vec{k}$

	$\vec{a}_B$	$=$	$\vec{a}_{rel}$	$+$	$\vec{a}_{tr,rot,n}$	$+$	$\vec{a}_{tr,rot,t}$	$+$	$\vec{a}_{coriolis}$
$\Vert$	$?(a_B)$		$\ddot{\xi}$		$-\omega_{AB}^2 (B-A)$		$(\dot{\omega}_{AB}\overline{BA})?$		$2\omega_{AB}\dot{\xi}$
$\angle$	$/\!/\vec{t}$		$/\!/(B-A)$		$/\!/-(B-A)$		$\perp (B-A)$		$\perp (B-A)$

? $\vec{a}_B = a_B \vec{t}$

$\vec{a}_{rel} = \ddot{\xi}\, \vec{i}' = 0$ per $\ddot{\xi} = 0$ $\rightarrow$



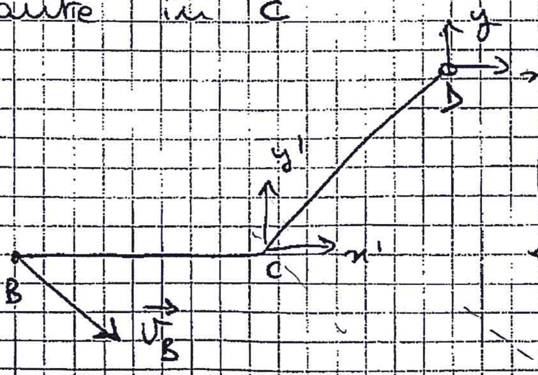
$\vec{a}_{tr,rot,n} = -\omega_{AB}^2 (B-A)$

$\vec{a}_{tr,rot,t} = \dot{\vec{\omega}}_{AB} \wedge (B-A)$

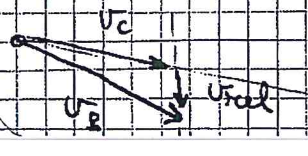
$\vec{a}_{coriolis} = 2\vec{\omega}_{AB} \wedge \vec{v}_{rel}$

$\dot{\vec{\omega}}_{AB} = -\dfrac{|a_{tr,rot,t}|}{\overline{BA}} \vec{k}$

Per calcolare $\vec{\omega}_{CD}$ e $\dot{\vec{\omega}}_{CD}$ studio $\vec{v}_B$ e $\vec{a}_B$ con una terna traslante in C



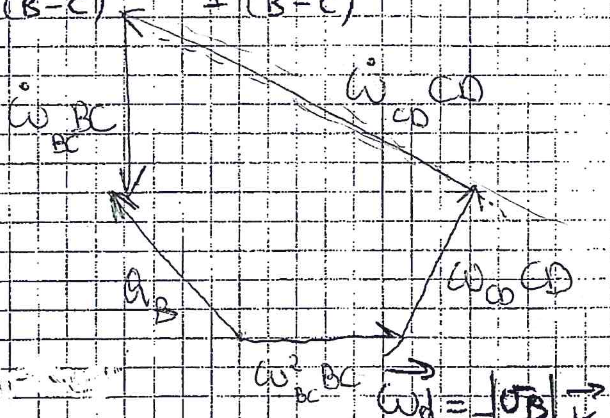
	$\vec{v}_B$	$=$	$\vec{v}_C$	$+$	$\vec{\omega}_{BC} \wedge (B-C)$
$\Vert$	v_B		$(\omega_{CD}\overline{CD})?$		$(\omega_{BC}\overline{BC})?$
$\angle$	$/\!/\vec{t}$		$\perp (C-D)$		$\perp (B-C)$



(SE CONSIDERO CD NON PERPENDICOLANE AL PIANO INCLINATO)

$$\vec{a}_B = \vec{a}^{TR}_{C,n} + \vec{a}^{TR}_{C,t} + \vec{a}_{rel,n} + \vec{a}_{rel,t}$$

$\parallel$	a_B	$\omega_{CD}^2\,\overline{CD}$	$(\dot{\omega}_{CD}\,\overline{CD})$?	$\omega_{BC}^2\,BC$	$(\dot{\omega}_{BC}\,\overline{BC})$?
$\angle$	$\parallel \vec{t}$	$\parallel (C-D)$	$\perp (C-D)$	$\parallel (B-C)$	$\perp (B-C)$



$$\vec{\omega}_d = \frac{|v_B|}{R}\vec{k}$$

$$\vec{v}_{G_1} = \vec{\omega}_{CD} \wedge (G_1 - D) = v_{G_1x}\vec{i} + v_{G_1y}\vec{j}$$

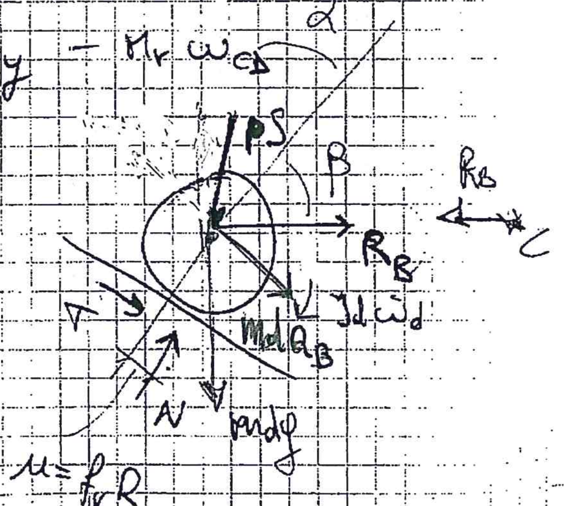
$$\vec{a}_{G_1} = \dot{\vec{\omega}}_{CD} \wedge (G_1 - D) - \omega_{CD}^2 (G_1 - D) = \vec{a}_{G_1 t} + \vec{a}_{G_1 n}$$

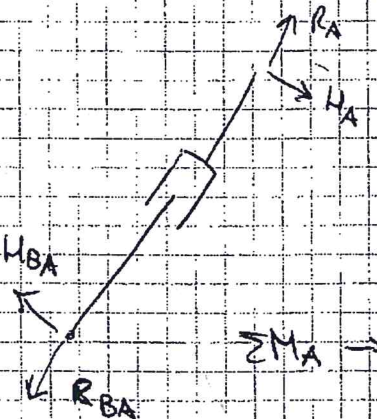
ESPLICITARE ANCHE v_B

2.2) $\Pi + \Pi' = \dfrac{dE_c}{dt}$

$$\Pi = p\int_C \xi\, dy\; v_B \sin\psi - m_1 g\, v_{G_1 y} - M_r\, \omega_{CD}$$

$$\Pi' = - N f_v R\, \omega_d$$





$\Sigma M_A \rightarrow H_{BA} = H_A = 0$

$\Sigma F_{Ax} \rightarrow R_A = R_{AB}$

L'AZIONE TRASMESSA DA ATTUATORE È PURAMENTE ASSIALE

$$\begin{cases} \sum M_B^{DISCO} = \emptyset \quad -J_d\dot{\omega}_d + Nu + TR = \emptyset \\ \sum M_d^{DISCO + ASTA} = \emptyset \quad (+) \end{cases}$$

$$m_d g\, BC + pS\, b_1 + T b_2 - N b_3 + m_d a_B b_4 - J_d \dot{\omega}_d = \emptyset$$

ESPLICITARE b_1, b_2, b_3, b_4

$$N b_3 = pS b_1 + \left(+ \frac{J_d \dot{\omega}_d}{R} - \frac{N f_v \cancel{R}}{\cancel{R}} \right) b_2 + m_d a_B b_4 - J_d \dot{\omega}_d$$

$$N(b_3 + f_v b_2) = pS b_1 + m_d a_B b_4 - J_d \dot{\omega}_d$$

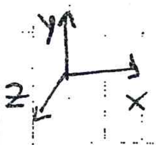
$$N = \frac{pS b_1 + m_d a_B b_4 - J_d \dot{\omega}_d}{b_3 + f_v b_2}$$

$$\Rightarrow \Pi' = - N \cdot f_v R \omega_d$$

(1) NOTI I VERSI DI VELOCITÀ ED ACCELERAZIONE DA ANALISI CINEMATICA

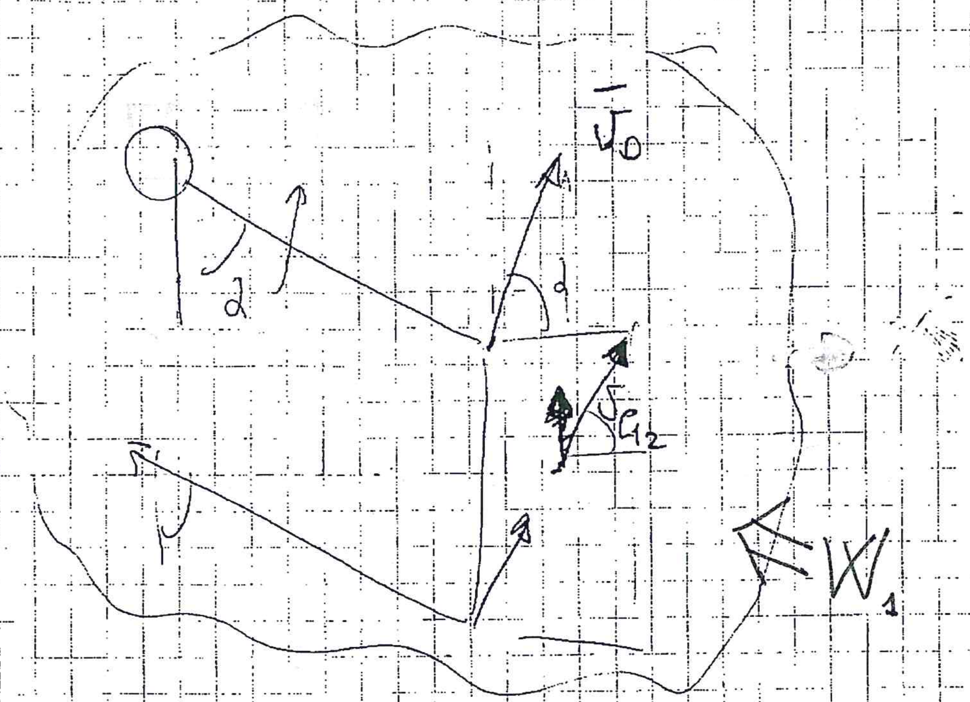
$$\frac{dE_c}{dt} = - m_d v_B a_B - J_d \omega_d \dot{\omega}_d + m_1 v_{G1x} a_{G1x} + m_1 v_{G1y} a_{G1y} - J_1 \omega_1 \dot{\omega}_1$$

(2) SEGNI POSITIVI SECONDO LA TERNA DI RIFERIMENTO



$$\Rightarrow \Pi + \Pi' = \frac{dE_c}{dt} \quad \text{Trovo } p$$

2 3) $|\bar{T}| \le f_s |\bar{N}|$



~~$\bar v_O = \omega_1 R_1 = \tau \omega_m R_1$~~ MASSA m_2 MOTO TRASLATORIO

$$\bar v_O = \omega_1 L = \tau \omega_m L = \bar v_{G2} = \bar v_O$$

$$+W_1 + m_2 \bar g \times \bar v_{G2} = \emptyset$$

$W_1 = + m_2 g \tau \omega_m L \sin\alpha > 0$ MOTO ~~AGEVOLANTE~~ DIRETTO

~~$C_m = m_2 g \tau L \sin\alpha$~~

$$W_p = -(1-\eta_d)(W_m)$$

$$W_m = W_m = C_m \omega_m$$

$$\cancel{W_m} - \cancel{W_m} + \eta W_m - m_2 g \tau \omega_m L \sin\alpha = \emptyset$$

$$C_m \cancel{\omega_m} \eta = m_2 g \tau \cancel{\omega_m} L \sin\alpha$$

$$\boxed{C_m = \frac{m_2 g \tau L \sin\alpha}{\eta}}$$

COPPIA RESISTENTE RIPORTATA ALBERO MOTORE dove c'è MAX?

$$\frac{dC_m}{d\alpha} = \frac{m_2 g \tau L \cos\alpha}{\eta} = \phi$$

$\alpha = 90$ —

2) $W_m + W_p + W_u = \frac{dE_c}{dt}$

ALLO SPUNTO MOTO RIMANE DIRETTO $\Rightarrow$ $\boxed{W_1 = \frac{m_2 g \tau L \operatorname{sen}\alpha}{\eta} + m_2 v_2 a_{42,t} + J_1 \omega_1 \dot{\omega}_1}$

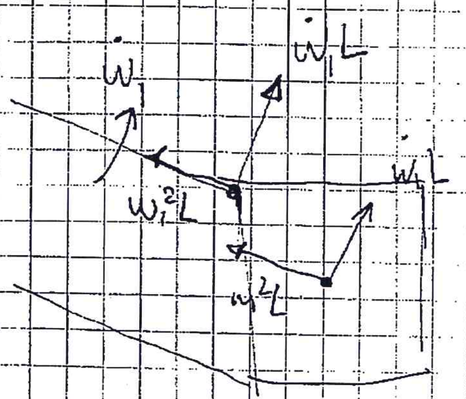
$$E_c = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_m \omega_m^2$$

$W_m = C_m \omega_m$

$W_p = -(1-\eta_d)(C_m \omega_m - J_m \omega_m \dot{\omega}_m)$

$W_u = -m_2 g \tau \omega_m L \cos\alpha$

$$C_m \omega_m \eta_d + J_m \cancel{\omega_m} \dot{\omega}_m - \eta_d J_m \omega_m \dot{\omega}_m + - m_2 g \tau \omega_m L \operatorname{sen}\alpha = m_2 \dot{\omega}_1 \omega_1 L^2 + J_1 \omega_1 \dot{\omega}_1 + J_m \cancel{\omega_m} \dot{\omega}_m$$



$$C_m \omega_m \eta_d \cancel{+} - m_2 g \tau \omega_m L \operatorname{sen}\alpha =$$

$$= \eta_d J_m \omega_m \dot{\omega}_m + m_2 \tau^2 L^2 \omega_m \dot{\omega}_m +$$

$$+ J_1 \tau^2 \omega_m \dot{\omega}_m$$

$$\dot{\omega}_m = \frac{C_m^{\circ} \eta_d - m_2 g \tau L \operatorname{sen}\alpha}{\eta_d J_m + m_2 \tau^2 L^2 + J_1 \tau^2}$$