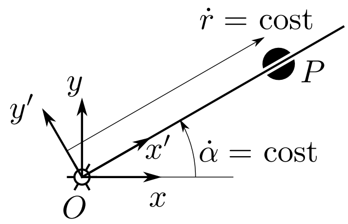
MECCANICA APPLICATA ALLE MACCHINE

Allievi meccanici AA.2015-2016 prova del 21-07-2016

Problema 1.1

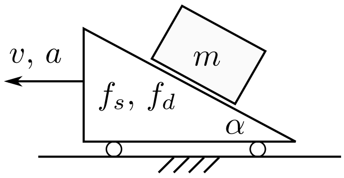


Una massa puntiforme (punto P) si muove lungo un'asta priva di massa che ruota intorno ad una cerniera in O. Note α ed r e le loro derivate, calcolare:

- l'accelerazione del punto P e disegnarla;
- la potenza delle forze d'inerzia.

$\alpha = 30\,\text{deg}$, $\dot{\alpha} = 2\,\text{rad/s}$, $\ddot{\alpha} = 0\,\text{rad/s}^2$
$r = 0.5\,\text{m}$, $\dot{r} = 0.3\,\text{m/s}$, $\ddot{r} = 0\,\text{m/s}^2$, $m = 10\,\text{kg}$

Problema 1.2

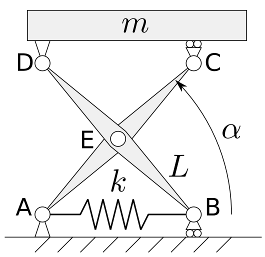


Il sistema rappresentato in figura, posto nel piano verticale, è costituito da un cuneo che scorre lungo una guida orizzontale scabra. Sul piano inclinato del cuneo è appoggiata una massa m. Nota la velocità v e l'accelerazione a del cuneo, calcolare:

- il coefficiente d'attrito statico f_s perchè la massa m non slitti.
- l'accelerazione della massa m nel momento in cui slitti e il coefficiente di attrito dinamico sia f_d

$m = 2\,\text{kg}$,
$\alpha = 30\,\text{deg}$,
$v = 1\,\text{m/s}$,
$a = 5\,\text{m/s}^2$,
$f_d = 0.2$

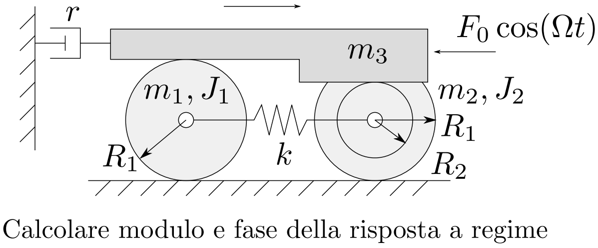
Problema 1.3



Il meccanismo a pantografo in figura, posto nel piano verticale, è costituito da due aste di massa trascurabile di lunghezza L incernierate tra loro in mezzeria in E. Una molla di rigidezza k collega l'estremo incernierato in A con l'estremo B collegato tramite un carrello ad una guida orizzontale. La parte superiore del meccanismo è costituito da una massa m incernierata in D all'asta BD e collegata tramite un carrello in C all'asta AC. Calcolare k tale che il sistema si trovi nella configurazione di equilibrio statico per $\alpha_0 = \pi/4\,\text{rad}$.

$L = 2\,\text{m}$, $m = 5\,\text{kg}$, $l_0 = L/2$

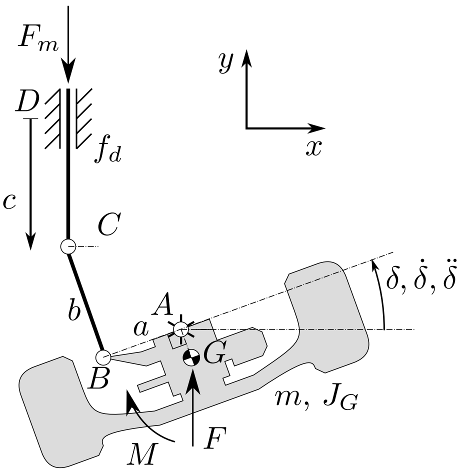
Problema 1.4



Il sistema di corpi rigidi in figura è posto nel piano verticale. Questo è composto da due dischi omogenei di massa m_1 e m_2. Il disco 1 ha raggio R_1 mentre il disco 2 ha raggio maggiore R_1 e raggio minore R_2 che rotolano senza strisciare su una guida orizzontale. I centri dei due dischi sono collegati da una molla di rigidezza k. Sopra i dischi poggia una massa m_3 in contatto di rotolamento senza strisciamento. La massa m_3 è collegata a terra tramite uno smorzatore di coefficiente di smorzamento r. Calcolare modulo e fase della risposta a regime del sistema dovuta alla forzante armonica F applicata alla massa m_3.

$m_1 = m_2 = m_3 = m = 10\,\text{kg}$, $J_1 = J_2 = 0.1\,\text{kg m}^2$, $R_1 = 0.7\,\text{m}$, $R_2 = R_1/2$,
$k = 200\,\text{N/m}$, $r = 5\,\text{Ns/m}$, $F_0 = 2\,\text{N}$, $\Omega = 15\,\text{rad/s}$

Problema 2

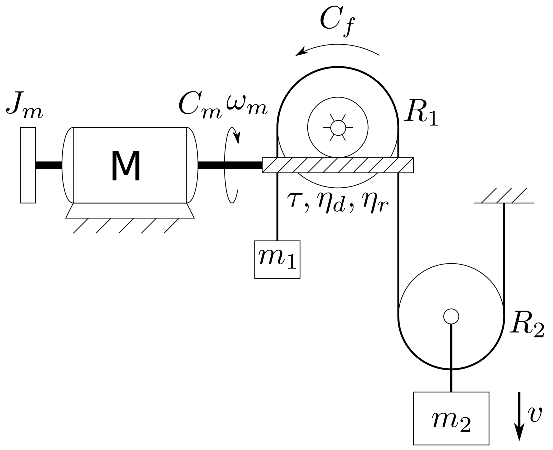


Il sistema meccanico in figura, posto nel piano orizzontale, rappresenta il sistema di sterzo di un veicolo. Esso è composto dal gruppo ruota di massa m, momento d'inerzia baricentrico J_G che è incernierato al telaio nel punto A; su di esso sono applicate una forza F e un momento M noti. Il vettore $(G-A)$ è perpendicolare al vettore $(A-B)$ e lungo g. Il gruppo ruota è poi incernierato in B al braccetto di sterzo, di massa trascurabile, che è poi incernierato in C alla cremagliera, anch'essa di massa trascurabile. La cremagliera scorre in un manicotto D con coefficiente di attrito dinamico f_d.

Considerando nota la posizione del sistema e utilizzando la coodinata libera δ, $\dot{\delta}$, $\ddot{\delta}$, si richiede:

1. l'equazione che lega lo spostamento della cremagliera c alla rotazione δ;
2. la velocità e l'accelerazione del punto C;
3. la forza $\vec{F}_m$ che garantisce il moto assegnato del sistema;
4. le reazioni vincolari della cerniera B.

Problema 3



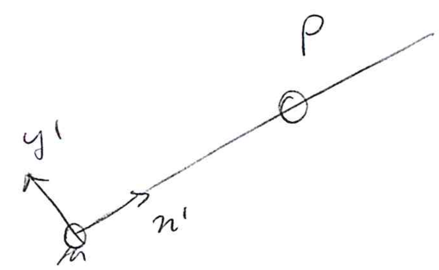
$m_2 = 50\,\text{kg}$
$m_1 = 10\,\text{kg}$
$R_1 = 0.6\,\text{m}$
$R_2 = 0.2\,\text{m}$
$\eta_d = 0.9$
$\eta_r = 0.75$
$J_1 = 1\,\text{kg m}^2$
$J_m = 0.1\,\text{kg m}^2$
$\tau = 1/10$

La macchina in figura è composta da un motore di inerzia J_m e coppia motrice $C_m = C_0\left(1 - \frac{\omega_m}{\omega_s}\right)$. Il motore è collegato ad una trasmissione di rapporto di trasmissione τ e rendimento diretto e retrogrado rispettivamente η_d e η_r. Alla trasmissione è calettata una puleggia di raggio R_1 su cui si avvolge senza strisciare una fune inestensibile che sorregge da un lato la massa m_1 e dall'altro si avvolge senza strisciare su una seconda puleggia, di massa trascurabile, di raggio R_2 per poi vincolarsi a terra all'estremo opposto di tale puleggia. Al centro della puleggia 2 è vincolata tramite una fune inestensibile una massa m_2.

Si chiede di calcolare:

1. supponendo il sistema fermo e il motore spento, calcolare la coppia frenante C_f, applicata alla puleggia 1, che tiene in equilibrio il sistema;
2. l'accelerazione della massa m_2 quando, sempre a motore spento, viene rilasciato il freno ($C_f = C_m = 0$), discutere in maniera esaustiva la condizione di moto;
3. la velocità della massa m_2 dopo 5 secondi a partire dalla condizione precedente;
4. la coppia del motore C_m necessaria a frenare la massa m_2 con una decelerazione di 1 m/s^2.

1.1)

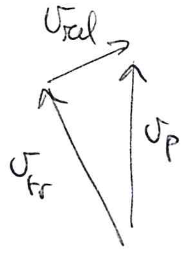


$$\vec{v}_P = \vec{v}_{tr} + \vec{v}_{rel}$$

$\lVert$	?	$\dot{\alpha} r$	$\dot{r}$
$\angle$	?	$\perp (P-O)$	$/\!/ (P-O)$

$$\vec{v}_{tr} = \dot{\alpha}\vec{k} \wedge (P-O) = \dot{\alpha} r(-\sin\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j})$$

$$\vec{v}_{rel} = \dot{r}\,\vec{i}\,' = \dot{r}(\cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j})$$



$$\vec{v}_P = \dot{\alpha} r(-\sin\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j}) + \dot{r}(\cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j})$$

$$\begin{cases} v_{Px} = -\dot{\alpha} r \sin\alpha + \dot{r}\cos\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{3}{10}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -0{,}24 \text{ m/s} \\ v_{Py} = \dot{\alpha} r \cos\alpha + \dot{r}\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{2} = 1{,}02 \text{ m/s} \end{cases}$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{tr,n} + \vec{a}_{tr,t} + \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{cor}$$

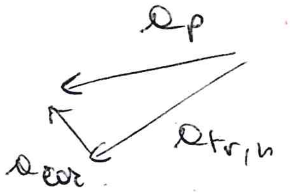
?	$\dot{\alpha}^2 r$	0	0	$2\dot{\alpha} v_{rel}$
?	$/\!/ -(P-O)$	/	/	$\perp (P-O)$

$$\vec{a}_{tr,n} = -\dot{\alpha}^2 (P-O) = -\dot{\alpha}^2 r(\cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j})$$

$$\vec{a}_{tr,t} = \ddot{\alpha}\vec{k} \wedge (P-O) = 0$$

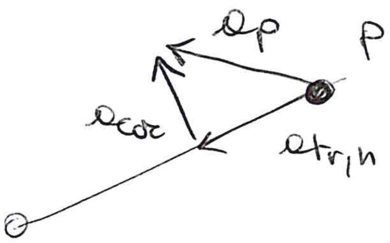
$$\vec{a}_{rel} = \ddot{r}\,\vec{i}\,' = 0$$

$$\vec{a}_{cor} = 2\dot{\alpha}\vec{k} \wedge \vec{v}_{rel}$$



$$\vec{a}_P = -\dot{\alpha}^2 r(\cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}) + 2\dot{\alpha}\vec{k} \wedge \dot{r}(\cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j})$$

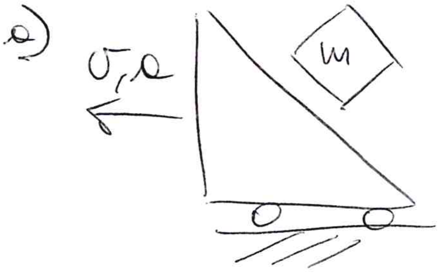
$$\begin{Bmatrix} a_{Px} \\ a_{Py} \end{Bmatrix} = \begin{cases} -\dot{\alpha}^2 r\cos\alpha - 2\dot{\alpha}\dot{r}\sin\alpha = -2{,}33 \text{ m/s}^2 \\ -\dot{\alpha}^2 r \sin\alpha + 2\dot{\alpha}\dot{r}\cos\alpha = 0{,}04 \text{ m/s}^2 \end{cases}$$

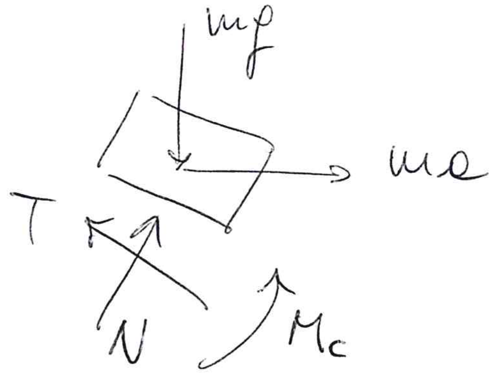


$$W_{in} = m\,\vec{v}_P \cdot \vec{a}_P = m\begin{pmatrix} v_{Px} & v_{Py}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{Px} \\ a_{Py}\end{pmatrix} = 6 \text{ W}$$

1.2)

a)





$$N = mg\cos\alpha - ma\sin\alpha$$

$$T = mg\sin\alpha + ma\cos\alpha$$

$$T \leq f_s N$$

$$g\sin\alpha + a\cos\alpha \leq f_s g\cos\alpha - f_s a\sin\alpha$$

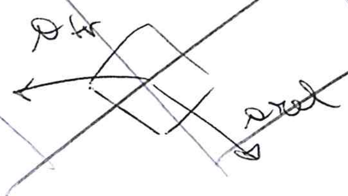
$$f_s \geq \frac{g\sin\alpha + a\cos\alpha}{g\cos\alpha - a\sin\alpha} = \frac{9{,}235}{5{,}996} = 1{,}54$$

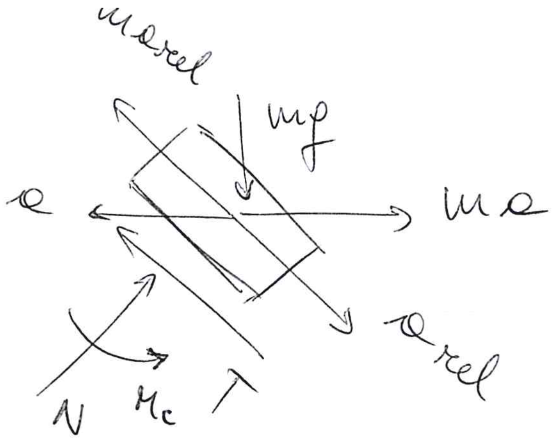
b)

$$T = f_d N$$

$$\begin{cases} m(g + a_y) = N\cos\alpha + T\sin\alpha \\ m a_x = N\sin\alpha - T\cos\alpha \end{cases}$$

$$F + N\cos\alpha - T\sin\alpha - Ma = 0$$





$$\begin{cases} T = f_d N \\ T = -m a_{rel} + mg \sin\alpha + ma \cos\alpha \\ N = mg\cos\alpha \quad ma \sin\alpha \end{cases}$$

$$N = m(g\cos\alpha \quad a\sin\alpha) = 11.992 \text{ N}$$

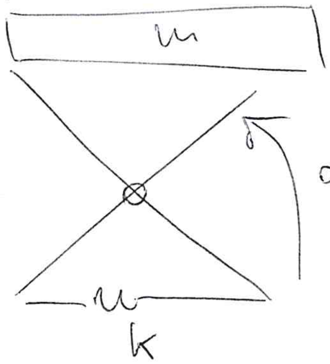
$$T = f_d N = 2.398 \text{ N}$$

$$a_{rel} = -\frac{T}{m} + g\sin\alpha + a\cos\alpha = 8.036 \text{ m/s}^2$$

$$a_{m_x} = a_{rel}\cos\alpha - a = 2{,}05 \text{ m/s}^2$$

$$a_{m_y} = -a_{rel}\sin\alpha = -4{,}07 \text{ m/s}^2$$

1.3)



$$\delta L_g = m\vec{g} \cdot \delta \vec{z}_m = -mgL\cos\alpha\,\delta\alpha$$

$$z_m = L\sin\alpha$$

$$\frac{\partial z_m}{\partial \alpha} = L\cos\alpha$$

$$\delta L_k = -k(\Delta e)\cdot\delta e$$

$$\Delta e = L\cos\alpha - l_0 \qquad \delta L_k = -k(L\cos\alpha - l_0)(-L\sin\alpha)$$

$$\frac{\partial e}{\partial \alpha} = -L\sin\alpha$$

$$\cancel{mgL\cos\alpha + kL^2\sin\alpha\cos\alpha - kL\sin\alpha\, e_0} = 0$$

$$-mgL\cos\alpha + kL\sin\alpha(L\cos\alpha - e_0) = 0$$

$$k = \frac{mg\cancel{L}\cos\alpha}{\cancel{L}\sin\alpha(L\cos\alpha - e_0)} = 118{,}4\ \text{N/m}$$

1.4) $$E_c = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2$$

$$v_1 = \frac{\dot{x}}{2} \qquad \omega_1 = \frac{\dot{x}}{2R_1}$$

$$v_2 = \frac{R_1}{R_1+R_2}\dot{x} \qquad \omega_2 = \frac{\dot{x}}{R_1+R_2}$$

$$v_3 = \dot{x}$$

$$E_c = \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{m_1}{4} + m_2\frac{R_1^2}{(R_1+R_2)^2} + m_3 + \left(\frac{1}{2}m_1R_1^2\right)\frac{1}{4R_1^2} + \left(\frac{1}{2}m_2R_2^2\right)\frac{1}{(R_1+R_2)^2}\right)}_{m_{eq}}\dot{x}^2$$

$$m_{eq} = \frac{m}{4} + m\frac{R^2}{\left(\frac{3}{2}R\right)^2} + m + \frac{J}{4R^2} + \frac{J}{\left(\frac{3}{2}R\right)^2}$$

$$= \frac{m}{4} + \frac{m\,4}{9} + m + \frac{J}{4R^2} + \frac{J\,4}{9R^2}$$

$$=$$

$$V = \frac{1}{2}k\Delta\ell^2$$

$$\Delta\ell = \left(-\frac{1}{2} + \frac{R}{\frac{3}{2}R}\right)x = \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right)x = \frac{1}{6}x$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{k}{36}x = k_{eq}x$$

$$D = \frac{1}{2}r\dot{\Delta\ell}_r^2 \qquad \Delta\ell_r = x \qquad \dot{\Delta\ell}_r = \dot{x}$$

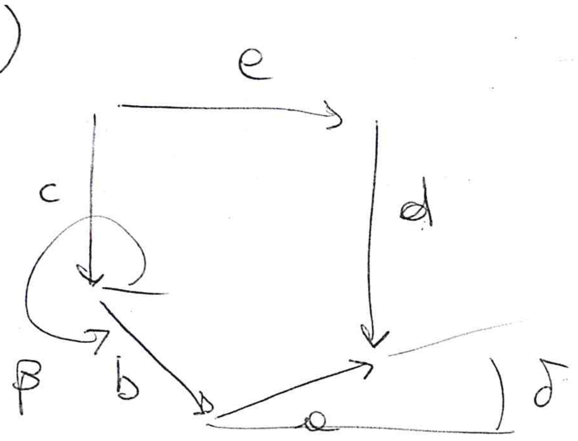
$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = r\dot{x}$$

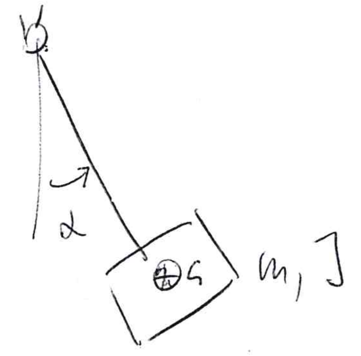
$$|X_0| = \frac{F_0}{\sqrt{(k_{eq} - m_{eq}\Omega^2)^2 + \Omega^2 r_{eq}^2}}$$

$$Q = -F_0\cos(\Omega t)$$

$$\varphi = \operatorname{atan}\left(\frac{-r_{eq}}{k_{eq} - m_{eq}\Omega^2}\right)$$

7.1)





$$\begin{cases} e = b\cos\beta + a\cos\delta \\ -c + b\sin\beta + a\sin\delta = -d \end{cases} \rightarrow \quad \beta = \operatorname{acos}\left(\frac{e - a\cos\delta}{b}\right)$$

$$c = d + b\sin\beta + a\sin\delta$$

$$\begin{cases} 0 = -b\dot\beta\sin\beta - a\dot\delta\,\cancel{\cos}\sin\delta \\ -\dot c + b\dot\beta\cos\beta + a\dot\delta\cos\delta = 0 \end{cases} \qquad \dot\beta = \frac{-a\dot\delta\sin\delta}{b\sin\beta}$$

$$\dot c = b\dot\beta\cos\beta + a\dot\delta\cos\delta$$

$$\vec{v}_c = \dot c\, e^{i\frac{3}{2}\pi} = -\dot c\,\vec{J}$$

$$\begin{cases} 0 = -b\ddot\beta\sin\beta - b\dot\beta^2\cos\beta - a\ddot\delta\sin\delta - a\dot\delta^2\cos\delta \\ -\ddot c + b\ddot\beta\cos\beta - b\dot\beta^2\sin\beta + a\ddot\delta\cos\delta - a\dot\delta^2\sin\delta = 0 \end{cases}$$

$$\ddot\beta = \frac{-b\dot\beta^2\cos\beta - a\ddot\delta\sin\delta - a\dot\delta^2\cos\delta}{b\sin\beta}$$

$$\ddot c = b\ddot\beta\cos\beta - b\dot\beta^2\sin\beta + a\ddot\delta\cos\delta - a\dot\delta^2\sin\delta$$

2.7)

$$W + W' = \frac{dE_c}{dt}$$

$$\vec{v}_G = \dot{\delta}\vec{k} \wedge (G-A)$$

$$\vec{a}_G = \underbrace{\ddot{\delta}\vec{k} \wedge (G-A)}_{a_{Gt}} - \underbrace{\dot{\delta}^2 (G-A)}_{a_{Gn}}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} J_G \omega^2 = \frac{1}{2} m (\dot{\delta} l_{GA})^2 + \frac{1}{2} J_G \dot{\delta}^2$$

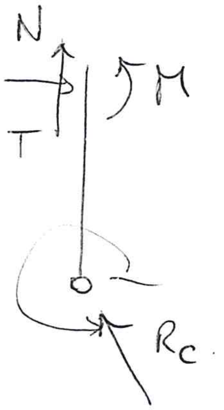
$$\frac{dE_c}{dt} = m v_G a_{Gt} + J_G \dot{\delta}\ddot{\delta}$$

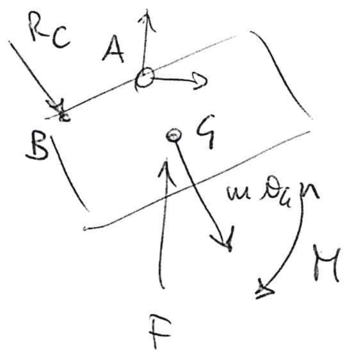
$$W = F_m \dot{c} + \vec{F} \cdot \vec{v}_G + \vec{M} \cdot \dot{\delta}\vec{k}$$

$$= F_m \dot{c} + F v_{Gy} - M\dot{\delta}$$

$$v_{Gy} = \dot{\delta} l_{GA} \cos\delta$$

$$W' = - f_d |N_D| \dot{c}$$





$\Downarrow$

$$N = R_C \sin\left(\beta - \frac{3}{2}\pi\right)$$

$$R_C a = M - F l_{GA} \sin\delta$$

$$N = \frac{M - F l_{GA} \sin\delta}{a} \sin\left(\beta - \frac{3}{2}\pi\right)$$

$M = 50\ kg$

$m = 10\ kg$

$R_1 = 0,6$

$R_2 = 0,2$

$\eta_D = 0,9$

$\eta_R = 0,75$

$J_1 = 1$

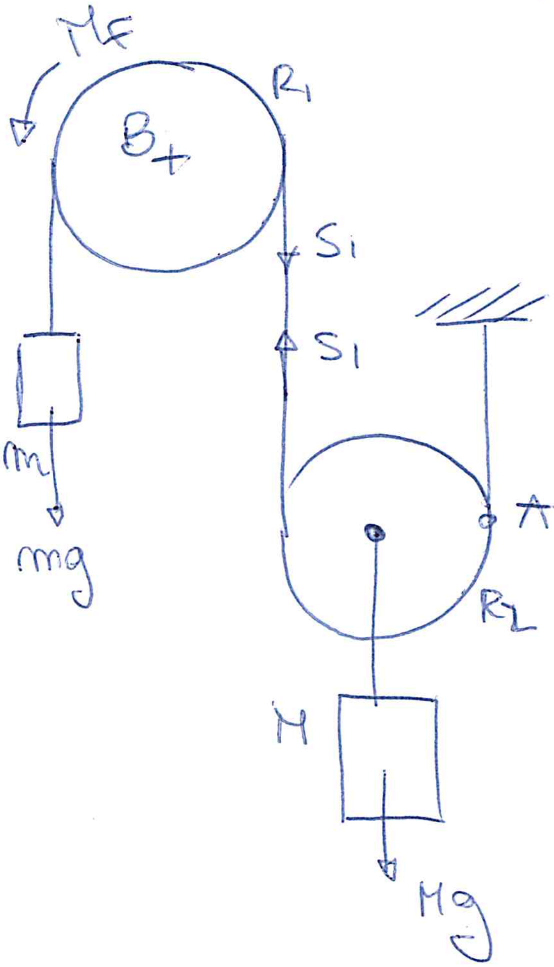
$J_m = 0,1$

$\tau = 1/50$

①

Supponendo sistema fermo e motore scollegato la coppia frenante M_f da applicare alla puleggia 1 per mantenere il sistema in equilibrio.

~~app~~



$E_C = \emptyset$ STATICO

·) $\sum M_A^{DAM} = \emptyset$

$$S_1 2R_2 = Mg R_2$$

$$S_1 = \frac{Mg}{2}$$

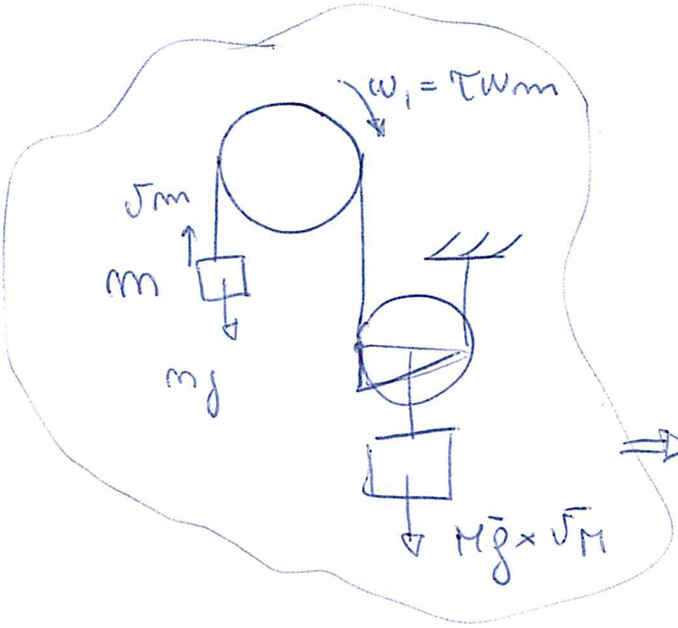
·) $\sum M_B^{D1} = \emptyset$

$$S_1 R_1 = M_f + mgR_1$$

$$M_f = S_1R_1 - mgR_1 = \left(\frac{M}{2} - m\right)gR_1$$

$$= (25-10)g \cdot 0{,}6 = 88{,}3 \text{ Nm}$$

② Acc ~~del sistema~~ della massa M supponendo di rilasciare il freno M_f. (discussione tipo di moto)



$\Rightarrow W_u^u$

Senza M_f il sistema non è più in equilibrio
↓
massa M scende

·) $v_m = R_1\omega_1 = \tau\omega_m R_1 = 2v_M$

·) $v_M = \frac{v_m}{2} = \frac{\tau\omega_m R_1}{2}$

$$\omega_1 = \frac{2v_M}{R_1} \qquad \omega_m = \frac{2v_M}{\tau R_1}$$

$$-W_u^u + M\bar{g} \times \bar{v}_M + m\bar{g} \times \bar{v}_m = M v_M a_M + m v_m a_m + J_1 \omega_1 \dot{\omega}_1$$

$$W_u^u = \underbrace{Mg v_M - mg 2 v_M}_{>0} \underbrace{- M v_M a_M - m 4 v_M a_M + - J_1 \frac{4 v_M a_M}{R_1^2}}_{\text{spunto} \sim 0} \quad m_u^* v_M a_M$$

Retrogrado

J_m $\Rightarrow W_u^m = -J_m \omega_m \dot{\omega}_m < 0$
$\Rightarrow$ potenza entra nel motore

$W_m = \varnothing$ (mot. scollegato)

$W_p = -(1-\eta_R)(W_u^U)$

$W_u = (M - 2m) g v_M$

$$\frac{dE_c}{dt} = m_u^* v_M a_M + J_m \omega_m \dot{\omega}_m$$

$$= \quad '' \quad + J_m \frac{4}{\tau^2 R_1^2} v_M a_M$$

$$\Rightarrow \cancel{-W_u^U} + \eta_R W_u^U + \cancel{(M-2m) g v_M} = m_u^* v_M a_M + J_m \frac{4}{\tau^2 R_1^2} v_M a_M$$

$$\eta_R (M-2m) g \cancel{v_M} = \eta_R m_u^* \cancel{v_M} a_M + J_m \frac{4}{\tau^2 R_1^2} \cancel{v_M} a_M$$

$$a_M = \frac{(M-2m)\eta_R g}{\eta_R m_u^* + 4\frac{J_m}{\tau^2 R_1^2}}$$

$$= \frac{(M-2m)\eta_R g}{\eta_R \left(M + 4m + 4J_1/R_1^2\right) + 4\frac{J_m}{\tau^2 R_1^2}} = \cancel{0{,}87}\ 1{,}18 \ m/s^2$$

(3')
Velocità raggiunta dalla massa M in $t = 5\,s$

$$a_M = \text{cost}$$

$$v(\hat{t}) = a_M \hat{t} = 0{,}077 \cdot 5 = \cancel{0{,}39}\ 5{,}9\ m/s$$

(4) M_f^* da applicare all'albero motore per fermare la caduta con $a_F =$
in ~~...~~ ⇒ SEMPRE RETROGRADO

$$W_{cm} = -C_f\,\omega_m = -C_f \frac{2 v_M}{\tau R_1}$$

$$\eta_R (M - 2m) g\, \cancel{v_M} - C_f \frac{2 \cancel{v_M}}{\tau R_1} = \eta_R\, m_u^*\, \cancel{v_M}\, a_M^f + J_m \frac{4}{\tau^2 R_1^2} \cancel{v_M}\, a_M^f$$

$$\cancel{a_M^f = \frac{\eta_R (M - 2m) g - \frac{C_f 2}{\tau R_1}}{\eta_R m_u^* + 4 \frac{J_m}{\tau^2 R_1^2}}}$$

$$\cancel{t_F = \frac{v(\hat{t})}{a_M^f} = \frac{v(\hat{t}) \cdot \left(\eta_R m_u^* + 4 \frac{J_m}{\tau^2 R_1^2}\right)}{\eta_R (M - 2m) g - \frac{2 C_f}{\tau R_1}}}$$

$$C_f = \frac{\tau R_1}{2}\left[\eta_R (M-2m) g - \eta_R m_u^* a_M^F - J_m \frac{1}{\tau^2 R_1^2} a_1^f\right]$$

$$= \cancel{18{,}45\ \text{Nm}} \quad 12{,}23$$