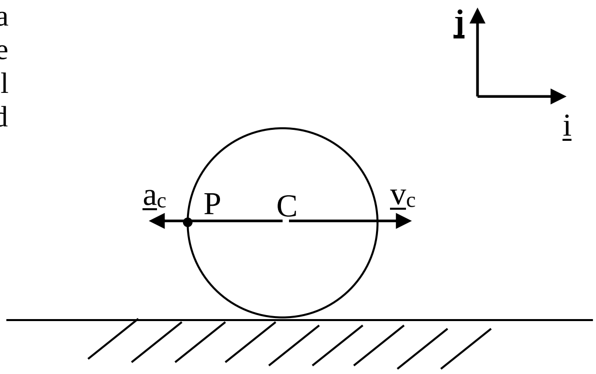
MECCANICA APPLICATA ALLE MACCHINE
Allievi meccanici AA.2012-2013 prova del 16-07-2013

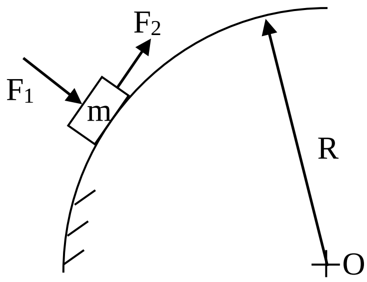
Problema 1.1

Il disco di raggio R=0.5 m rappresentato in figura rotola senza strisciare su una guida orizzontale. Note la velocità $\underline{v}_C=5\underline{i}$ m/s e l'accelerazione $\underline{a}_C= -2\underline{i}$ m/s^2 del centro del disco, si calcolino i vettori velocità ed accelerazione del punto P indicato in figura.



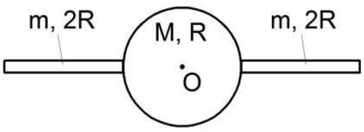
Problema 1.2

Il corpo di massa m=2 kg si muove su una guida circolare fissa di raggio R=2 m e centro O, posta nel piano orizzontale. Sul corpo sono applicate una forza F_1=50 N sempre orientata radialmente rispetto alla guida ed una forza F_2 sempre orientata tangenzialmente alla traiettoria. Calcolare la massima velocità raggiungibile dal corpo perché sia garantita una reazione normale nel contatto tra corpo e guida.



Problema 1.3

Calcolare il momento d'inerzia complessivo J_O del corpo rigido mostrato in figura. Il corpo è costituito da un disco omogeneo di massa *M* e raggio *R* e da due aste omogenee caratterizzate da massa *m* e lunghezza *2R*.



M = 10 kg
m = 5 kg
R = 0.5 m

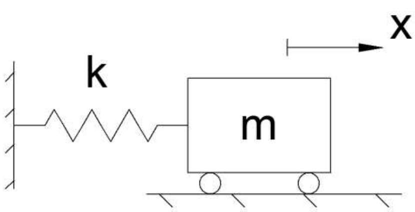
Problema 1.4

Calcolare l'ampiezza del moto libero del sistema vibrante mostrato in figura, date le seguenti condizioni iniziali:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ \dot{x}_0 = V_0 \end{cases}$$

m = 5 kg, k = 500 N/m

V_0 = 1 m/s

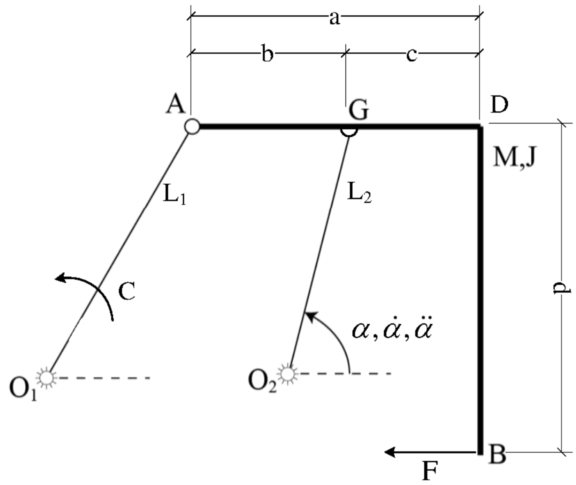


Problema N.2

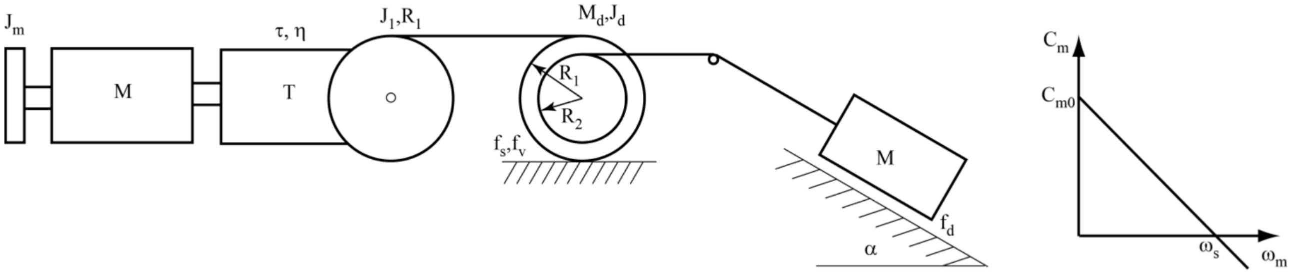
Il sistema meccanico illustrato in figura giace nel piano verticale. L'asta O_1A ha proprietà di massa trascurabili, è lunga L_1 ed è incernierata a terra in O_1. L'estremità superiore di quest'ultima si collega, attraverso una cerniera nel punto A, all'asta a "L" ADB avente baricentro in G e caratteristiche inerziali M e J. Nel punto G è posta una seconda cerniera alla quale è collegata l'asta O_2G anch'essa avente massa e momento d'inerzia trascurabili. La lunghezza dell'asta O_2G è L_2 ed è collegata a terra mediante una cerniera in O_2.
Sull'asta ADB agisce nel punto B una forza F orizzontale diretta come in figura.

Nell'istante considerato, ritenendo note tutte le grandezze geometriche, la posizione del sistema nell'atto di moto considerato, la velocità $\dot{\alpha}$ e l'accelerazione angolare $\ddot{\alpha}$ dell'asta O_2G, si determino i seguenti punti:

1) posizione del centro di istantanea rotazione dell'asta ADB (a livello grafico);
2) i vettori velocità ed accelerazione del punto di applicazione della forza F (punto B dell'asta ADB);
3) il valore della coppia C applicata all'asta O_1A necessaria per garantire l'atto di moto assegnato;
4) le reazioni vincolari in O_1.



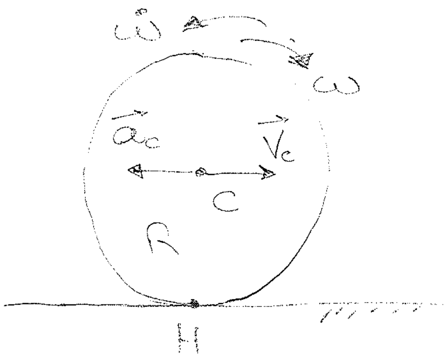
Problema 3



L'impianto di sollevamento rappresentato in figura è movimentato da un motore con curva caratteristica nota, collegato ad una trasmissione ad assi ortogonali con rendimento $\eta_d=\eta_r=\eta$ e rapporto di trasmissione τ. All'uscita della trasmissione è collegata una puleggia di momento di inerzia baricentrico J_1 e raggio R_1. Sulla puleggia si avvolge senza strisciare una fune inestensibile la cui estremità si avvolge, a sua volta senza strisciare, su una seconda puleggia costituita da una coppia di dischi concentrici e rigidamente collegati tra loro di massa complessiva M_d e momento d'inerzia baricentrico J_d, raggio esterno R_1 ed interno R_2. Il disco di raggio maggiore R_1 rotola senza strisciare su un piano orizzontale, si consideri un coefficiente di attrito statico pari a f_s e la resistenza al rotolamento tramite un coefficiente f_v. Sul disco di raggio minore R_2 si avvolge senza strisciare un'ulteriore fune inestensibile collegata ad una massa M che striscia con coefficiente di attrito dinamico f_d su un piano inclinato di un angolo α.
Si chiede di considerare la condizione di moto con massa M in salita e di discutere per ciascun punto la condizione di moto diretto o retrogrado.
1) Si determini la velocità angolare della coppia di dischi di massa M_d in condizione di regime.
2) Partendo dalla condizione 1 si richiede di studiare il caso in cui istantaneamente la coppia motrice C_m si annulli e di calcolare il tempo di arresto del sistema.
3) Si effettui la verifica di aderenza della coppia di dischi di massa M_d nelle condizioni del punto 2.

Problema 1.1

Disco rotola senza strisciare $\Rightarrow$ CIR $\equiv$ H



$$\vec{V}_c = \underbrace{\cancel{\vec{V}_H}}_{=0} + \vec{\omega} \wedge (C-H)$$

$$5\vec{i} = \omega \vec{k} \wedge (R\vec{j}) = -\omega \cdot 0{,}5\,\vec{i}$$

$$\Rightarrow \vec{\omega} = -10\,\vec{k}$$

$$\vec{a}_c = \vec{\dot{\omega}} \wedge (C-H)$$

$$-2\vec{i} = -\dot{\omega}\cdot 0{,}5\,\vec{i} \quad \Rightarrow \quad \vec{\dot{\omega}} = 4\vec{k}$$

$$(P-C) = -R\,\vec{i}$$

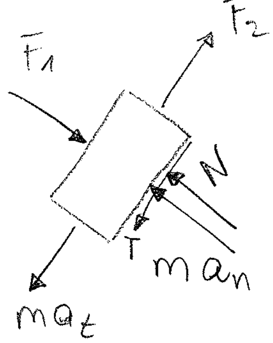
$$\vec{V}_P = \vec{V}_C + \vec{\omega} \wedge (P-C) = 5\vec{i} + (-10\vec{k}) \wedge (-0{,}5\,\vec{i}) = \boxed{5\vec{i} + 5\vec{j}}$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_C + \vec{\dot{\omega}} \wedge (P-C) - \omega^2 (P-C)$$

$$= -2\vec{i} + 4\vec{k} \wedge (-0{,}5\,\vec{i}) - 100\,(-0{,}5\,\vec{i}) = \boxed{48\vec{i} - 2\vec{j}}$$

Problema 1.2

Nel piano orizzontale:



$$\Rightarrow \sum F_{radiali} = 0$$

$$-F_1 + N + ma_n = 0$$

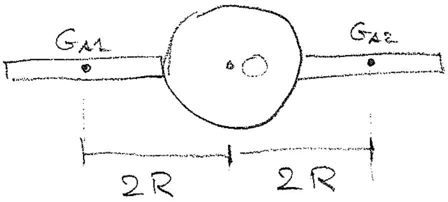
$$\Rightarrow N = F_1 - m\frac{V^2}{R}$$

condiz. limite $N=0 \Rightarrow F_1 - m\frac{V_{max}^2}{R} = 0$

$$\Rightarrow V_{max} = \sqrt{\frac{F_1 R}{m}} = \sqrt{\frac{50\cdot 2}{2}} = \boxed{7{,}07\ \frac{m}{s}}$$

Problema 1.3

$$J_D = \frac{MR^2}{2}$$



$$J_{ASTA} = \frac{m(2R)^2}{12}$$

$$\Rightarrow J_O = J_D + \left[J_{ASTA} + m\cdot(2R)^2\right]\cdot 2$$

$$= \frac{MR^2}{2} + \left(\frac{m4R^2}{12} + m4R^2\right)2$$

$$= \frac{MR^2}{2} + \frac{4mR^2 + 48mR^2}{\cancel{12}\,6}\cdot\cancel{2}$$

$$= \boxed{\frac{MR^2}{2} + \frac{26}{3}mR^2} = 1{,}25 + 10{,}83 = \boxed{12{,}08\ kg\,m^2}$$

Problema 1.4

$$m\ddot{x} + Kx = 0 \quad\Rightarrow\quad x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

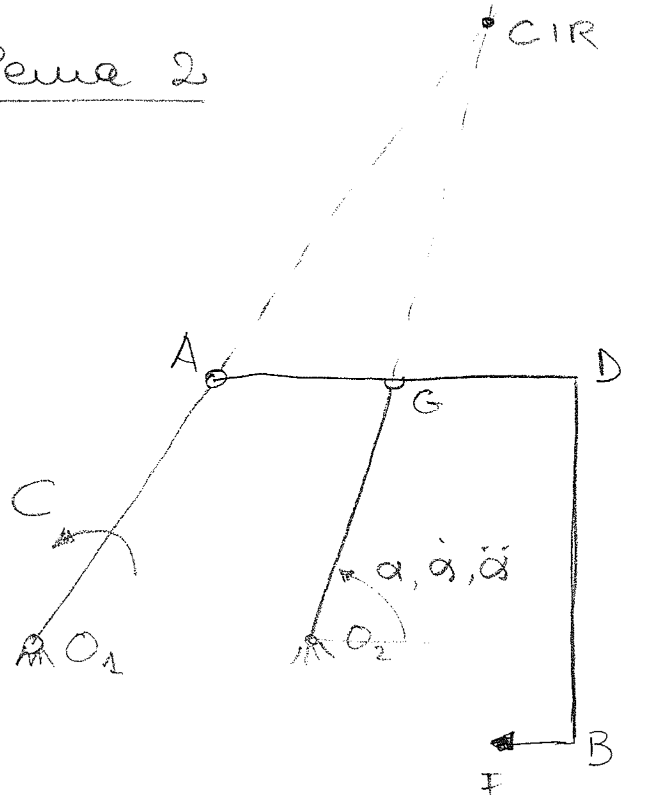
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} = 10\ \frac{rad}{s} \qquad \dot{x}(t) = -A\omega_0\sin\omega_0 t + B\omega_0\cos\omega_0 t$$

$$C.I.\ \begin{cases} x(0) = A = 0 \\ \dot{x}(0) = B\omega_0 = V_0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{l} A = 0\ m \\ B = \dfrac{V_0}{\omega_0} = 0{,}1\ m \end{array}$$

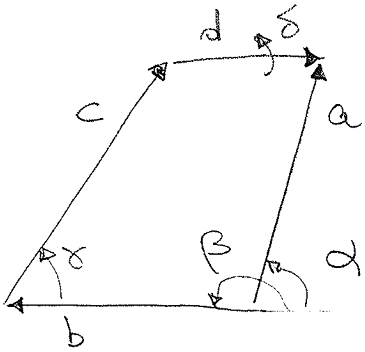
$$\Rightarrow \boxed{x(t) = 0{,}1\sin 10t}$$

Problema 2

1)



2) Equaz. chiusura vettoriale:



C	V
a	α (nota)
b, $\beta=\pi$	
c	γ
d	δ

$$a e^{i\alpha} = b e^{i\beta} + c e^{i\gamma} + d e^{i\delta}$$

$$\begin{cases} a\cos\alpha = b\cos\beta + c\cos\gamma + d\cos\delta \\ a\sin\alpha = b\sin\beta + c\sin\gamma + d\sin\delta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \gamma \\ \delta \end{cases}$$

↓ Velocità

$$\begin{cases} -a\dot\alpha\sin\alpha = -c\dot\gamma\sin\gamma - d\dot\delta\sin\delta \\ +a\dot\alpha\cos\alpha = c\dot\gamma\cos\gamma + d\dot\delta\cos\delta \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dot\gamma \\ \dot\delta = |\vec\omega_{ADB}| \end{cases}$$

↓ Accelerazioni

$$\begin{cases} -a\ddot\alpha\sin\alpha - a\dot\alpha^2\cos\alpha = -c\ddot\gamma\sin\gamma - c\dot\gamma^2\cos\gamma - d\ddot\delta\sin\delta - d\dot\delta^2\cos\delta \\ a\ddot\alpha\cos\alpha - a\dot\alpha^2\sin\alpha = c\ddot\gamma\cos\gamma - c\dot\gamma^2\sin\gamma + d\ddot\delta\cos\delta - d\dot\delta^2\sin\delta \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \ddot\gamma \\ \ddot\delta = |\dot{\vec\omega}_{ADB}| \end{cases}$$

$$\vec{V}_B = \vec{V}_G + \vec{\omega}_{ADB} \wedge (G-B)$$
$$= -a\dot{\alpha}\sin\alpha\,\vec{i} + a\dot{\alpha}\cos\alpha\,\vec{j} + \dot{\delta}\vec{k} \wedge (c\vec{i} - p\vec{j})$$
$$= -a\dot{\alpha}\sin\alpha\,\vec{i} + a\dot{\alpha}\cos\alpha\,\vec{j} + \dot{\delta}c\,\vec{j} + \dot{\delta}p\,\vec{i}$$
$$= (p\dot{\delta} - a\dot{\alpha}\sin\alpha)\vec{i} + (p\dot{\delta} + a\dot{\alpha}\cos\alpha)\vec{j} = \boxed{V_{Bx}\vec{i} + V_{By}\vec{j}}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_G + \dot{\vec{\omega}}_{ADB} \wedge (G-B) - \omega^2 (G-B)$$
$$= (-a\ddot{\alpha}\cos\alpha - a\dot{\alpha}^2\sin\alpha)\vec{i} + (a\ddot{\alpha}\cos\alpha - a\dot{\alpha}^2\sin\alpha)\vec{j} +$$
$$+ \ddot{\delta}\vec{k} \wedge (c\vec{i} - p\vec{j}) - \dot{\delta}^2 (c\vec{i} - p\vec{j})$$
$$= (-a\ddot{\alpha}\cos\alpha - a\dot{\alpha}^2\sin\alpha + p\ddot{\delta} - c\dot{\delta}^2)\vec{i} + (a\ddot{\alpha}\cos\alpha - a\dot{\alpha}^2\sin\alpha + c\ddot{\delta} + p\dot{\delta}^2)\vec{j}$$
$$= \boxed{a_{Bx}\vec{i} + a_{By}\vec{j}}$$

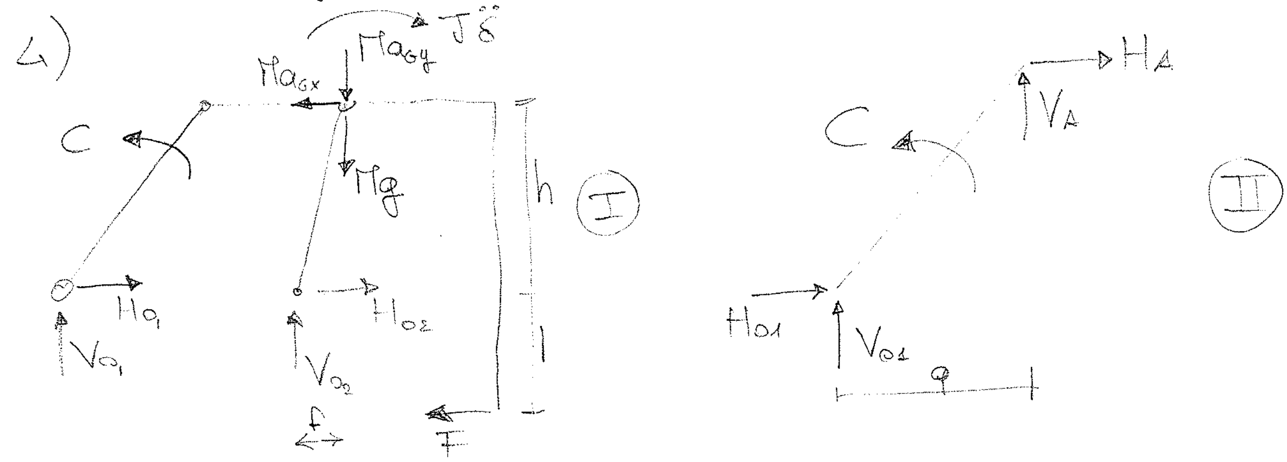
3) $W + \cancel{W'}^{=0} = \dfrac{dE_c}{dt} \longrightarrow$ ricavo C

$$W = \vec{C}\cdot\vec{\dot{\gamma}} + \vec{F}\cdot\vec{V}_B + M\vec{g}\cdot\vec{V}_G = C\dot{\gamma} - F\,V_{Bx} - Mg\,V_{Gy}$$
$$E_c = \frac{1}{2} M V_G^2 + \frac{1}{2} J \dot{\delta}^2$$
$$\frac{dE_c}{dt} = M V_{Gx} a_{Gx} + M V_{Gy} a_{Gy} + J\dot{\delta}\ddot{\delta}$$

dove: $V_{Gx} = -a\dot{\alpha}\sin\alpha \qquad a_{Gx} = -a\ddot{\alpha}\cos\alpha - a\dot{\alpha}^2\sin\alpha$

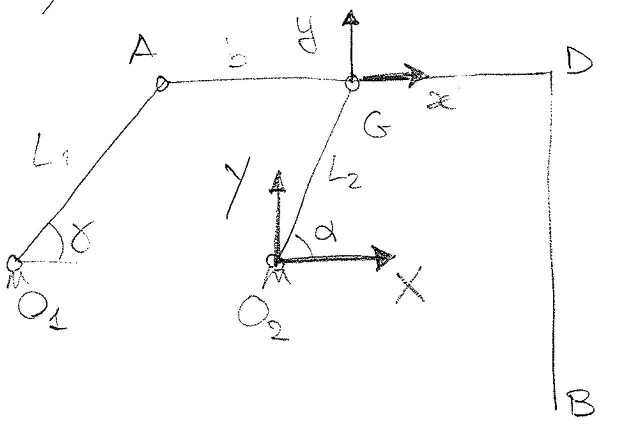
$V_{Gy} = a\dot{\alpha}\cos\alpha \qquad a_{Gy} = a\ddot{\alpha}\cos\alpha - a\dot{\alpha}^2\sin\alpha$

4)



$$\Sigma M_{O_2}^{(I)} = 0 \quad (+)$$
$$-V_{O1}\,\overline{O_1O_2} + C + M a_{Gx} h - (Mg + M a_{Gy}) f - J\ddot{\delta} - F\cdot l = 0 \quad \rightarrow \boxed{V_{O1}}$$
$$\Sigma M_A^{(II)} = 0 \quad (+)$$
$$C + H_{O1} h - V_{O1} q = 0 \quad \rightarrow \boxed{H_{O1}}$$

2) Th moti relativi:

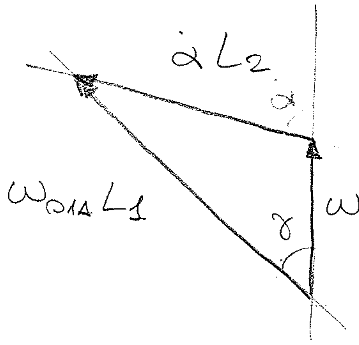


Terna assoluta in O_2

Terna traslante in G

$$\vec{V}_A^{(ass)} = \vec{V}_A^{(tr)} + \vec{V}_A^{(rel)}$$

	$\vec{V}_A^{(ass)}$	$\vec{V}_A^{(tr)}$	$\vec{V}_A^{(rel)}$
M	$\overset{?}{\omega_{O_1A}} L_1$	$\dot{\alpha} L_2$	$\overset{?}{\omega_{ADB}}\ b$
D	$\perp \overline{O_1A}$	$\perp \overline{O_2G}$	$\perp \overline{GA}$



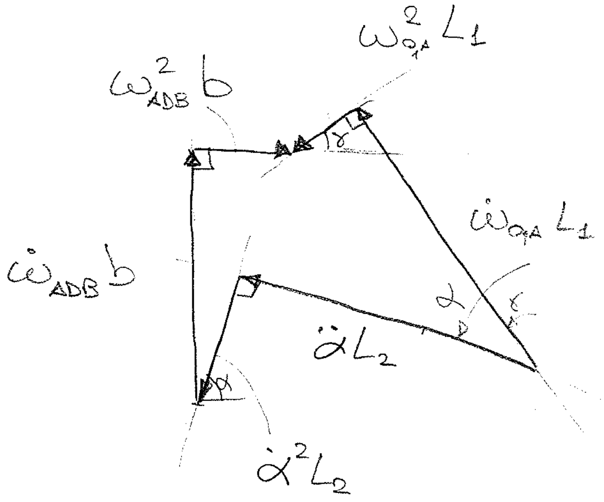
$$\begin{cases} -\omega_{O_1A} L_1 \sin\gamma = \dot{\alpha} L_2 \sin\alpha \\ \omega_{O_1A} L_1 \cos\gamma = \omega_{ADB}\, b + \dot{\alpha} L_2 \cos\alpha \end{cases}$$

$\rightarrow$ ricavo $\begin{cases} \omega_{O_1A} \\ \omega_{ADB} \end{cases}$

$$\vec{\omega}_{ADB} = -\omega_{ADB}\, \vec{K}$$

$$\vec{a}_{A,t}^{(ass)} + \vec{a}_{A,n}^{(ass)} = \vec{a}_{A,t}^{(tr)} + \vec{a}_{A,n}^{(tr)} + \vec{a}_{A,t}^{(rel)} + \vec{a}_{A,n}^{(rel)} + \vec{a}_A^{(cor)}$$

	$\vec{a}_{A,t}^{(ass)}$	$\vec{a}_{A,n}^{(ass)}$	$\vec{a}_{A,t}^{(tr)}$	$\vec{a}_{A,n}^{(tr)}$	$\vec{a}_{A,t}^{(rel)}$	$\vec{a}_{A,n}^{(rel)}$	$\vec{a}_A^{(cor)}$
M	$\overset{?}{\dot{\omega}_{O_1A}} L_1$	$\omega_{O_1A}^2 L_1$	$\ddot{\alpha} L_2$	$\dot{\alpha}^2 L_2$	$\dot{\omega}_{ADB}\, b$	$\omega_{ADB}^2\, b$	/
D	$\perp \overline{O_1A}$	$// \overline{O_1A}$	$\perp \overline{O_2G}$	$// \overline{O_2G}$	$\perp \overline{GA}$	$// \overline{GA}$	/
	$\nwarrow$	$\swarrow$	$\leftarrow$	$\swarrow$	$\uparrow$	$\rightarrow$	



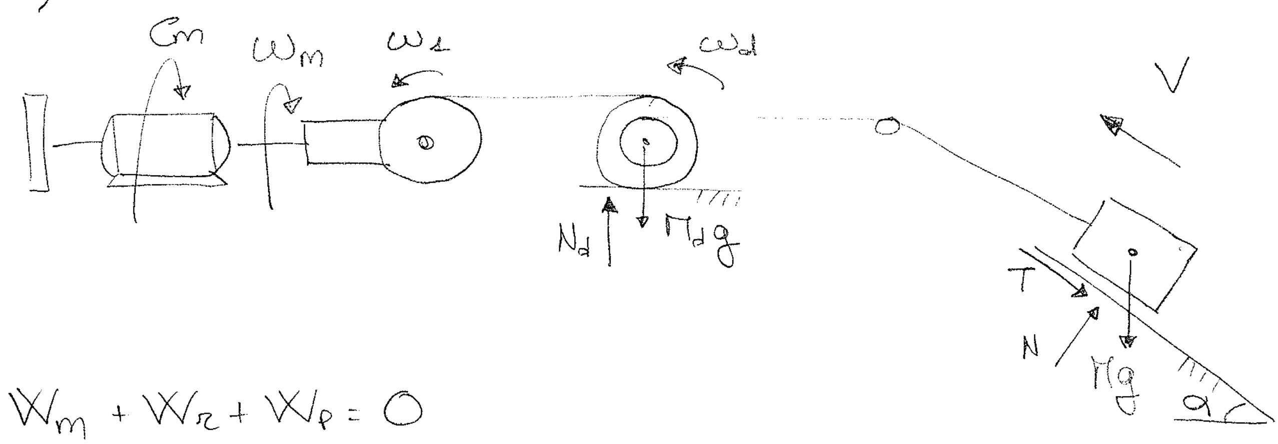
$$\begin{cases} -\dot{\omega}_{O_1A} L_1 \sin\gamma - \omega_{O_1A}^2 L_1 \cos\gamma = \\ \quad = -\ddot{\alpha} L_2 \sin\alpha - \dot{\alpha}^2 L_2 \cos\alpha + \omega_{ADB}^2\, b \\ \dot{\omega}_{O_1A} L_1 \cos\gamma - \omega_{O_1A}^2 L_1 \sin\gamma = \\ \quad = \ddot{\alpha} L_2 \cos\alpha - \dot{\alpha}^2 L_2 \sin\alpha + \dot{\omega}_{ADB}\, b \end{cases}$$

$\rightarrow$ ricavo $\begin{cases} \dot{\omega}_{O_1A} \\ \dot{\omega}_{ADB} \end{cases}$

$$\vec{\dot{\omega}}_{ADB} = -\dot{\omega}_{ADB}\, \vec{K}$$

Problema 3

1) M in salita a regime



$$W_m + W_r + W_p = 0$$

$$W_m = C_m \omega_m$$

$$W_r = -Mg \sin\alpha\, V - T V - N_d u\, \omega_d$$

a regime $W_2 = W_r < 0 \Rightarrow$ MOTO DIRETTO

$$W_p = -(1-\eta_d) W_1 = -(1-\eta_d) C_m \omega_m$$

Legami cinematici:

$$\omega_1 = \tau \omega_m \qquad \dot\omega_1 = \tau \dot\omega_m$$

$$\omega_d = \frac{\tau \omega_m}{2} \qquad \dot\omega_d = \frac{\tau \dot\omega_m}{2}$$

$$V_d = \frac{\tau \omega_m}{2} R_1 \qquad a_d = \frac{\tau \dot\omega_m}{2} R_1$$

$$V = \frac{\tau \omega_m}{2}(R_1 + R_2) \qquad a = \frac{\tau \dot\omega_m}{2}(R_1 + R_2)$$

$$T = f_d N = f_d Mg \cos\alpha$$

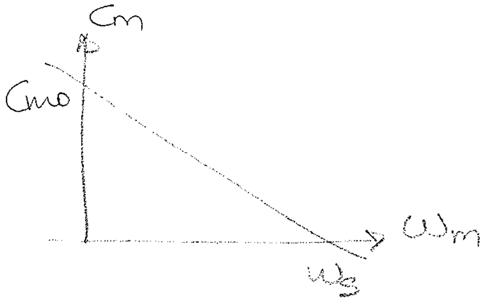
$$N_d = M_d g \qquad u = f_v R_1$$

$$C_m \cancel{\omega_m} - Mg(\sin\alpha + f_d \cos\alpha)\frac{\tau(R_1+R_2)}{2}\cancel{\omega_m} - M_d g f_v R_1 \frac{\tau \cancel{\omega_m}}{2} +$$

$$-(\cancel{1}-\eta_d) C_m \cancel{\omega_m} = 0$$

$$C_{m,reg} = \frac{Mg(\sin\alpha + f_d\cos\alpha)\frac{\tau(R_1+R_2)}{2} + M_d g f_v R_1 \frac{\tau}{2}}{\eta_d}$$

Tramite la curva caratteristica:



$$C_m = C_{m0}\left(1 - \frac{\omega_m}{\omega_s}\right)$$

$$\Rightarrow \omega_{m,reg} = \omega_s\left(1 - \frac{C_{m,reg}}{C_{m0}}\right)$$

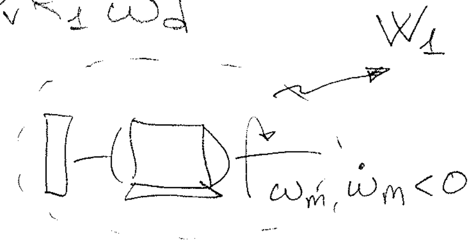
$$\boxed{\omega_{d,reg} = \frac{\tau\, \omega_{m,reg}}{2}}$$

2) $C_m = 0 \Rightarrow$ sistema rallenta $\Rightarrow \begin{matrix}\omega_m > 0 \\ \dot{\omega}_m < 0\end{matrix}$

$$W_m + W_r + W_p = \frac{dE_c}{dt}$$

$$W_m = 0$$

$$W_r = -Mg\sin\alpha\, V - f_d Mg\cos\alpha\, V - M_d g f_v R_1 \omega_d$$



$$-W_1 + \overset{=0}{\cancel{W_m}} = \frac{dE_c}{dt}$$

$$\Rightarrow W_1 = -J_m \underbrace{\omega_m \dot{\omega}_m}_{\text{discordi}} > 0 \Rightarrow \text{MOTO DIRETTO}$$

$$W_p = -(1-\eta_d)\left(-J_m\omega_m\dot{\omega}_m\right)$$

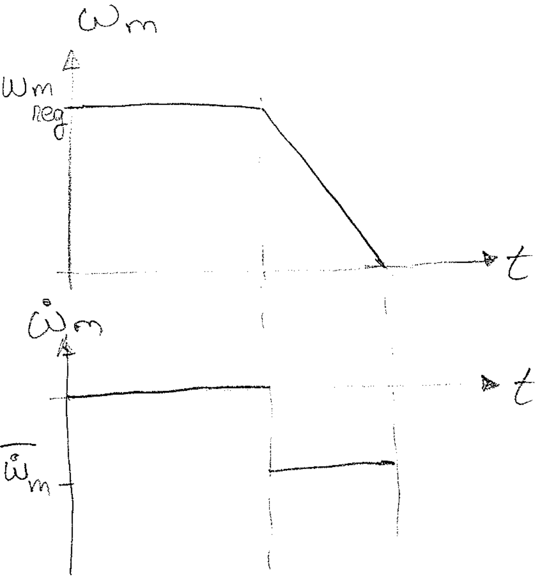
$$E_c = \frac{1}{2}J_m\omega_m^2 + \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}M_d V_d^2 + \frac{1}{2}J_d\omega_d^2 + \frac{1}{2}MV^2$$

$$\frac{dE_c}{dt} = J_m\omega_m\dot{\omega}_m + J_1\omega_1\dot{\omega}_1 + M_d V_d a_d + J_d\omega_d\dot{\omega}_d + MVa$$

$$-Mg(\sin\alpha + f_d\cos\alpha)\frac{\tau(R_1+R_2)}{2}\dot{\omega}_m - M_d g f_v R_1 \frac{\tau\cancel{\omega_m}}{2} - (\cancel{1}-\eta_d)\left(-J_m\omega_m\dot{\omega}_m\right) =$$

$$= \cancel{J_m\omega_m}\dot{\omega}_m + \underbrace{\left[J_1\tau^2 + M_d\frac{\tau^2R_1^2}{4} + J_d\frac{\tau^2}{4} + M\frac{\tau^2}{4}(R_1+R_2)^2\right]}_{J^*}\cancel{\omega_m}\dot{\omega}_m$$

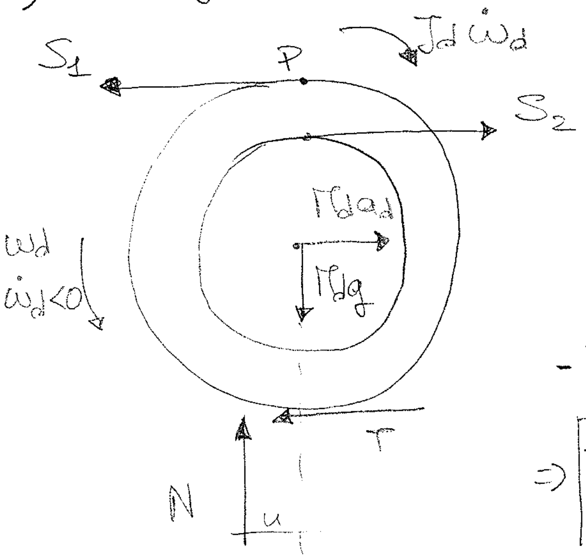
$$\dot{\omega}_m = \frac{-Mg(\sin\alpha + f_d\cos\alpha)\frac{\tau(R_1+R_2)}{2} - M_d g f_v R_1\frac{\tau}{2}}{\eta_d J_m + J^*} = \overline{\dot{\omega}_m} < 0$$



$$0 = \omega_{m,reg} + \bar{\dot\omega}_m \cdot t_{arr}$$

$$\boxed{t_{arr} = -\frac{\omega_{m,reg}}{\bar{\dot\omega}_m}}$$

3) Verifica di aderenza : $|\vec{T}| \leq f_s |\vec{N}|$



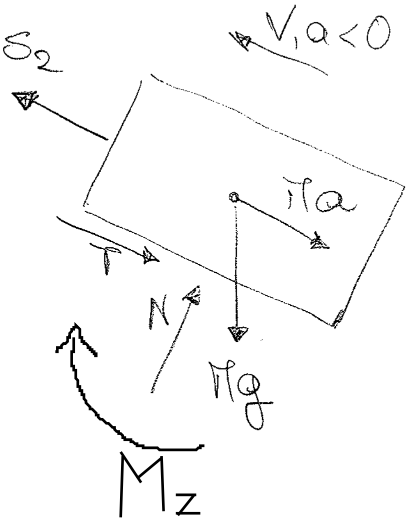
$$\sum F_v = 0$$

$$\boxed{N = M_d\, g}$$

$$\sum M_P = 0 \quad (+)$$

$$-J_d\dot\omega_d + S_2(R_1 - R_2) + M_d a_d R_1 - T \cdot 2R_1 - Nu = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{M_d a_d R_1 + S_2(R_1 - R_2) - J_d\dot\omega_d - Nu}{2R_1}}$$



$$\sum F_{/\!/\alpha} = 0$$

$$S_2 = Mg(\sin\alpha + f_d\cos\alpha) + Ma$$