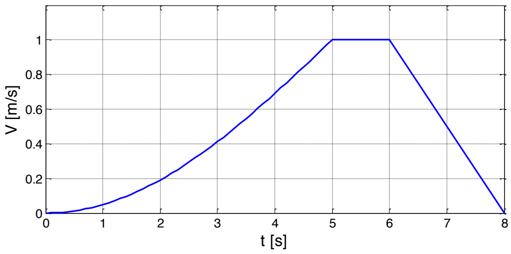
MECCANICA APPLICATA ALLE MACCHINE
Allievi meccanici AA.2012-2013 prova del 07-02-2014

Problema 1.1

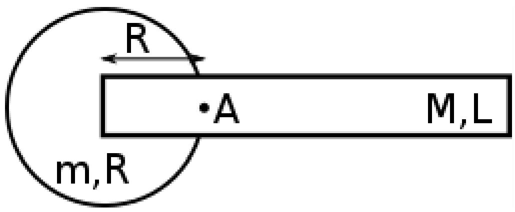
Data la legge di moto riportata in figura, disegnare il grafico dell'accelerazione. Nel primo tratto per $0 < t < 5s$ la velocità vale $V = 1 - \cos\frac{\pi}{10}t$.



Problema 1.2

Calcolare il momento d'inerzia complessivo J_A del corpo rigido mostrato in figura. Il corpo è costituito da un'asta omogenea di massa M e lunghezza L e di un disco omogeneo di massa m e raggio R. Il punto A si trova ad una distanza R dal centro del disco. L'asta ha un estremo coincidente col centro del disco.

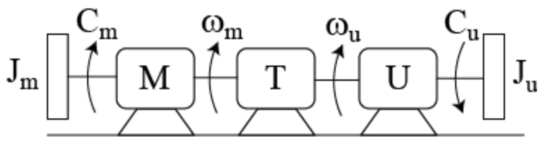
M = 1 kg
L = 2 m
m = 5 kg
R = 0.5 m



Problema 1.3

Il sistema MTU in figura è costituito da un motore di caratteristica lineare $C_m = C_0 - k\omega_m$, e da un utilizzatore su cui è applicata una coppia resistente costante C_u.

Sapendo che la trasmissione è caratterizzata da un rendimento η e da un rapporto di trasmissione τ calcolare la coppia e la velocità angolare del motore a regime.



Dati:

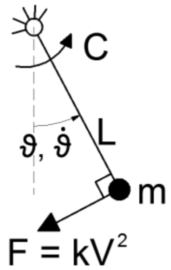
$$C_0 = 10\,Nm,\ \ k = 2\frac{Nms}{rad},\ \ C_u = 50Nm$$
$$\tau = 0.5,\ \ \eta = 0.95$$

Problema 1.4

Dato un pendolo semplice nel piano verticale, costituito da un'asta di lunghezza L di massa trascurabile e da una massa m come in figura, calcolare l'espressione della coppia in funzione dell'angolo θ necessaria a mantenerlo in moto con velocità angolare costante. Sulla massa agisce una forza sempre perpendicolare all'asta e proporzionale al quadrato della velocità della massa.

Per quale valore di θ la coppia richiesta è massima?

Quanto vale la coppia massima per $\dot{\theta} = 10\,rad/s$?



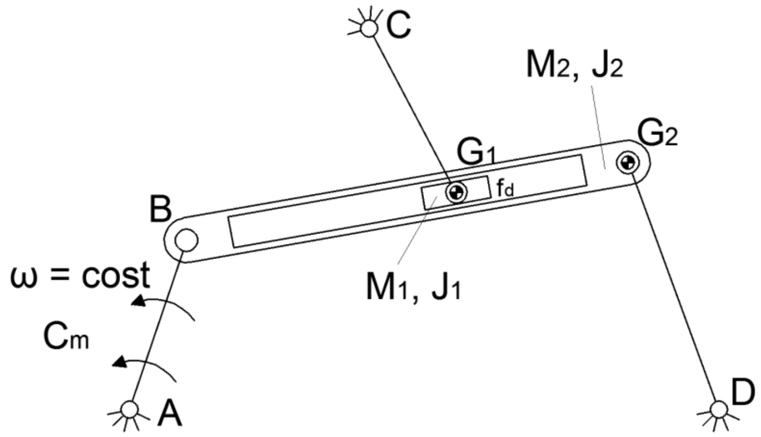
$$m = 3\,kg, \qquad L = 2m, \qquad k = 0.2\frac{Ns^2}{m^2}, \qquad g = 9.81\,m/s^2$$

MECCANICA APPLICATA ALLE MACCHINE
Allievi meccanici AA.2012-2013 prova del 07-02-2014

Problema 2

Il sistema in figura è posto nel piano verticale. L'asta AB, priva di massa, è incernierata a terra in corrispondenza della cerniera A e di essa è nota la velocità angolare ω costante. Sulla stessa è applicata una coppia motrice C_m. In B vi è una cerniera mobile che collega le aste AB e BG_2. Quest'ultima è dotata di massa M_2 e momento d'inerzia baricentrico J_2. Il baricentro G2 si trova in corrispondenza della cerniera mobile che collega l'asta BG_2 all'asta G_2D. L'asta G_2D è un'asta priva di massa e collegata a terra tramite la cerniera posta in D. All'interno dell'asta BG_2 scorre un corsoio dotato di baricentro G_1, massa M_1 e momento d'inerzia baricentrico J_1. Si consideri un coefficiente di attrito dinamico f_d tra il corsoio e la guida. In corrispondenza del baricentro G_1 vi è una cerniera mobile che collega il corsoio all'asta CG_1. L'asta CG_1 è priva di massa e si collega a terra tramite la cerniera posta in C. Tutte le grandezze geometriche sono note nell'atto di moto considerato. Si richiede di calcolare:

1. Vettori velocità ed accelerazione angolare dell'asta BG_2.
2. Modulo, direzione e verso dei vettori velocità ed accelerazione del baricentro G_1.
3. La coppia motrice C_m necessaria a mantenere l'atto di moto assegnato.
4. Le reazioni vincolari in C.

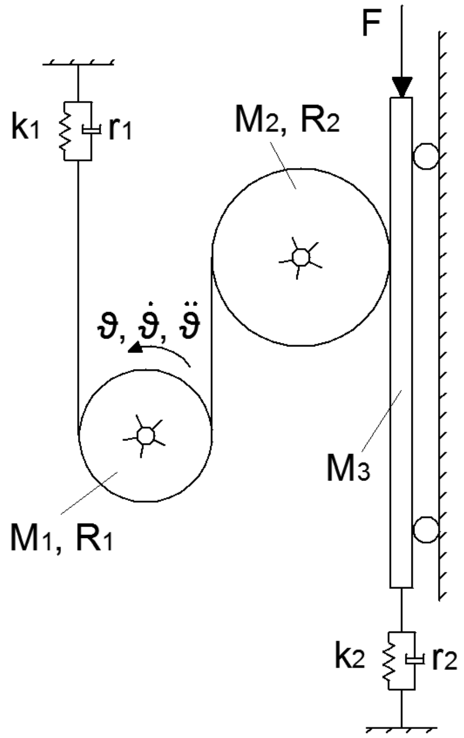


Problema 3

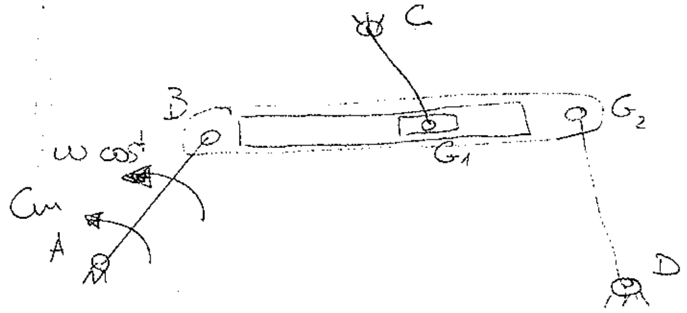
Il sistema in figura, posto nel piano verticale, è costituito da due pulegge di massa M_1, M_2 e raggio R_1, R_2 su cui si avvolge senza strisciare una fune inestensibile. La puleggia di massa M_2 inoltre rotola senza strisciare su un'asta di massa M_3 che scorre su un piano verticale. Sia applicata all'asta una forza $F = F_o \cos \Omega t$.

Considerando la coordinata libera θ e partendo dalla condizione di equilibrio statico, determinare:

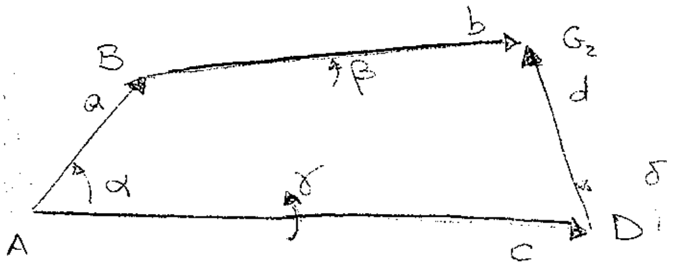
1) L'equazione di moto del sistema.
2) La frequenza propria del sistema.
3) La risposta completa del sistema sapendo che $r^* < r_c$ e che all'istante iniziale il sistema si trova fermo nella sua posizione di equilibrio statico $\bar{\theta}(0) = 0$ $\dot{\bar{\theta}}(0) = 0$.



Problema 2



1)



C	V
a	α → noto ($\dot\alpha = \omega$)
b	β
c, γ	
d	δ

$$\begin{cases} a\cos\alpha + b\cos\beta = c\cos\gamma + d\cos\delta \\ a\sin\alpha + b\sin\beta = c\sin\gamma + d\sin\delta \end{cases}$$

$$\Big\downarrow \; d/dt$$

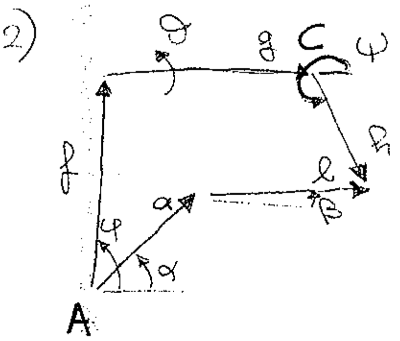
$$\begin{cases} -a\dot\alpha\sin\alpha - b\dot\beta\sin\beta = -d\dot\delta\sin\delta = V_{G2x} \\ a\dot\alpha\cos\alpha + b\dot\beta\cos\beta = d\dot\delta\cos\delta = V_{G2y} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot\beta \\ \dot\delta \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{\omega}_{BG_2} = \dot\beta\,\vec{k}}$$

$$\Big\downarrow \; d/dt$$

$$\begin{cases} -a\ddot\alpha\sin\alpha - a\dot\alpha^2\cos\alpha - b\ddot\beta\sin\beta - b\dot\beta^2\cos\beta = \overbrace{-d\ddot\delta\sin\delta - d\dot\delta^2\cos\delta}^{a_{G2x}} \\ a\ddot\alpha\cos\alpha - a\dot\alpha^2\sin\alpha + b\ddot\beta\cos\beta - b\dot\beta^2\sin\beta = \underbrace{d\ddot\delta\cos\delta - d\dot\delta^2\sin\delta}_{a_{G2y}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \ddot\beta \\ \ddot\delta \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{\dot\omega}_{BG2} = \ddot\beta\,\vec{K}}$$

2)



C	V	
a	α → noto	$\dot\alpha = \omega$
	l, β → noto	$\dot\beta = \omega_{BG2}$
f, φ		
g, ϑ		
h	ψ	

$$\begin{cases} a\cos\alpha + l\cos\beta = f\cos\varphi + g\cos\vartheta + h\cos\psi \\ a\sin\alpha + l\sin\beta = f\sin\varphi + g\sin\vartheta + h\sin\psi \end{cases}$$

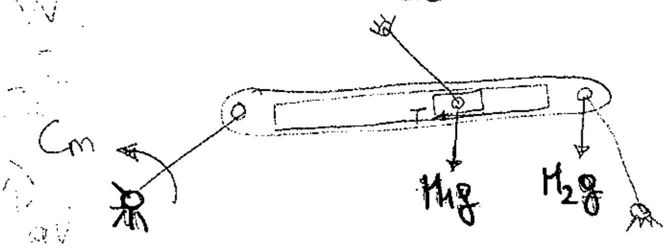
$$\begin{cases} -a\dot\alpha\sin\alpha + \dot l\cos\beta - l\dot\beta\sin\beta = -h\dot\psi\sin\psi \\ a\dot\alpha\cos\alpha + \dot l\sin\beta + l\dot\beta\cos\beta = h\dot\psi\cos\psi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot l \\ \dot\psi \end{cases}$$

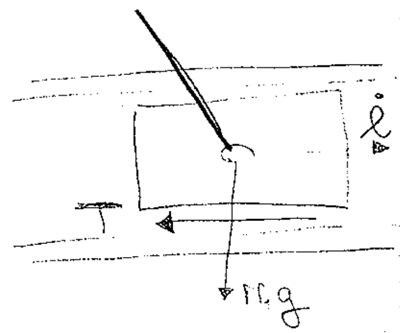
$$\begin{cases} -a\ddot\alpha\sin\alpha - a\dot\alpha^2\cos\alpha + \ddot l\cos\beta - 2\dot l\dot\beta\sin\beta - l\ddot\beta\sin\beta - l\dot\beta^2\cos\beta = -h\ddot\psi\sin\psi - h\dot\psi^2\cos\psi \\ a\ddot\alpha\cos\alpha - a\dot\alpha^2\sin\alpha + \ddot l\sin\beta + 2\dot l\dot\beta\cos\beta + l\ddot\beta\cos\beta - l\dot\beta^2\sin\beta = h\ddot\psi\cos\psi - h\dot\psi^2\sin\psi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \ddot l \\ \ddot\psi \end{cases}$$

$$\vec{V}_{G1} = -h\dot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{i} + h\dot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{j} = \boxed{V_{G1x}\vec{i} + V_{G1y}\vec{j}}$$

$$\vec{a}_{G1} = \left(-h\ddot{\varphi}\sin\varphi - h\dot{\varphi}^2\cos\varphi\right)\vec{i} + \left(h\ddot{\varphi}\cos\varphi - h\dot{\varphi}^2\sin\varphi\right)\vec{j} = \boxed{a_{G1x}\vec{i} + a_{G1y}\vec{j}}$$

3) $W_{att} + W_{reatt} = \dfrac{dE_c}{dt}$





$$W_{att} = \vec{C}_m \cdot \vec{\omega} + M_1\vec{g}\cdot\vec{V}_{G1} + M_2\vec{g}\cdot\vec{V}_{G2} = C_m\omega - M_1 g V_{G1y} - M_2 g V_{G2y}$$

$$E_c = \frac{1}{2}M_1\vec{V}_{G1}\cdot\vec{V}_{G1} + \frac{1}{2}J_1\vec{\omega}_{BG2}\cdot\vec{\omega}_{BG2} + \frac{1}{2}M_2\vec{V}_{G2}\cdot\vec{V}_{G2} + \frac{1}{2}J_2\vec{\omega}_{BG2}\cdot\vec{\omega}_{BG_2}$$

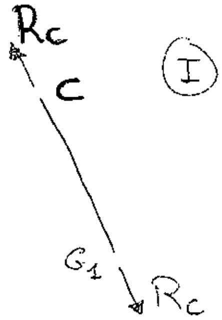
$$\frac{dE_c}{dt} = M_1 V_{G1x}a_{G1x} + M_1 V_{G1y}a_{G1y} + J_1\omega_{BG2}\dot{\omega}_{BG2} + M_2 V_{G2x}a_{G2x} +$$
$$+ M_2 V_{G2y}a_{G2y} + J_2\omega_{BG2}\dot{\omega}_{BG2}$$

$W_{reatt} = -T\dot{l}$ (T la ricavo nel punto successivo)

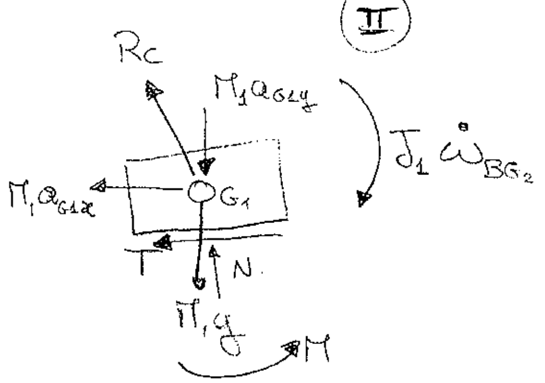
Sostituisco tutto nel th dell' **Ec** e ricavo Cm.

4)

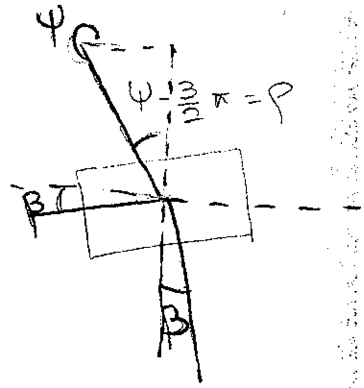
Biella scarica



I



II



$$\sum F_H^{(II)} = 0 \Rightarrow -M_1 a_{G1x} - R_c\sin\rho - T\cos\beta - N\sin\beta = 0 \quad \rightarrow R_c$$

$$\sum F_V^{(II)} = 0 \Rightarrow R_c\cos\rho - M_1 a_{G1y} - M_1 g - T\sin\beta + N\cos\beta = 0 \quad \rightarrow N$$

$$\sum M_{G_1}^{(II)} = 0 \quad (+) \Rightarrow M - J_1\dot{\omega}_{BG2} = 0 \quad \rightarrow M$$

(non è specificata l'altezza del corsoio ⇒ h=0)
ipotizzo

attrito dinamico ⇒ $|\vec{T}| = f_d|\vec{N}|$

Meccanica Applicata alle macchine 07/02/2014

Allievi Meccanici A.A. 2012 - 2013

1.1 $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

1° tratto $\vec{v} = 1 - \cos\frac{\pi}{10}t$

$0 \le t < 5$ $\vec{a} = \frac{\pi}{10}\sin\frac{\pi}{10}t$ $t=0$ $a=0$

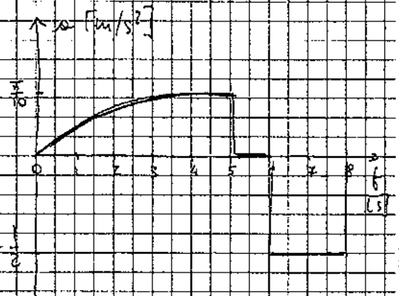
$t=5$ $a=\frac{\pi}{10}$

2° tratto $\vec{v} = 1 = cost$

$5 \le t < 6$ $\vec{a} = 0$

3° tratto $\vec{v} = 1 - \frac{1}{2}t$

$6 \le t < 8$ $\vec{a} = -\frac{1}{2}$



1.2 Il momento d'inerzia totale è la somma dei momenti baricentrici e di trasporto

$J_{A\,disco} = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2 = 1,875\ kg\,m^2$

$J_{A\,asta} = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2} - R\right)^2 = 0,583\ kg\,m^2$

$J_A = J_{A\,disco} + J_{A\,asta} = 2,458\ kg\,m^2$

1.3 Cerco la risposta a regime quindi non considero le inerzie $\frac{dE_c}{dt} = 0$

Ipotesi di moto $W_u = -C_u\omega_u < 0 \rightarrow$ moto diretto

$$\left.\begin{array}{l} W_m = C_m\omega_m \\ W_u = -C_u\omega_u \\ W_p = (1-\eta)C_m\omega_m \end{array}\right\}$$

$C_m\omega_m - (1-\eta)C_m\omega_m - C_u\omega_u = 0$

$\eta C_m\omega_m - C_u\omega_u = 0$

$\omega_u = \tau\omega_m$ $\eta C_m\cancel{\omega_m} - C_u\tau\cancel{\omega_m} = 0$

$C_m = \frac{C_u\tau}{\eta} = 26,32\ Nm$?

IL MOTORE NON È IN GRADO DI FORNIRE LA COPPIA RICHIESTA, ESSENDO $C_m = 26,32 > C_0$

Dalla caratteristica del motore SI OTTERREBBE

$$C_m = C_0 - K\omega_m \rightarrow \omega_m = \frac{C_0 - C_m}{K} = -8,16 \text{ rad/s}$$

$\omega_m < 0 \rightarrow$ il sistema non sta girando come previsto

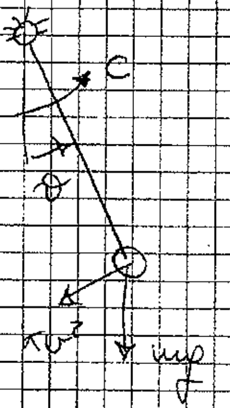
$W_m = C_m \omega_m < 0 \rightarrow$ MOTO RETROGRADO

$$\left.\begin{aligned} W_m &= +C_m\omega_m \\ W_u &= +C_u\omega_u \\ W_p &= (1+\eta)(+C_u\omega_u) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &+C_m\omega_m + C_u\omega_u + (1-\eta)(+C_u\omega_u) = 0 \\ &+C_m\omega_m - \cancel{C_u\omega_u} + \cancel{C_u\omega_u} + C_u\omega_u\eta = 0 \end{aligned}$$

$C_m\cancel{\omega_m} = -C_u\cancel{\omega_m}\tau\eta \qquad C_m = -C_u\tau\eta = -23,75 \text{ Nm}$ IL MOTORE AGISCE DA FRENO

$$\omega_m = \frac{C_0 - C_m}{K} = +16,875 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

1.4



Dalle eq. alla rotazione $(v = \dot\theta \cdot L)$

$$C = K\dot\theta^2 L^2 \cdot L + mgL\sin\theta$$

la coppia è massima/minima dove si annulla la derivata

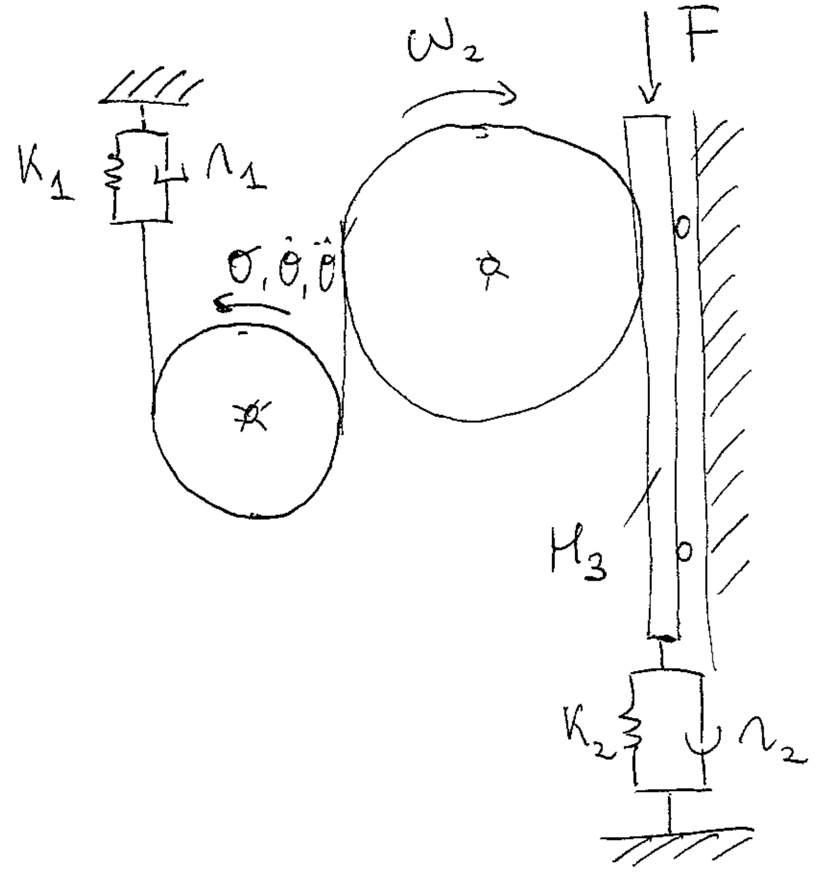
$$\frac{\partial C}{\partial \theta} = 0 \qquad mgL\cos\theta = 0$$

$$\theta = k\frac{\pi}{2} \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$$

Per vedere se massimo o minimo calcolo la derivata II

$$\left.\frac{\partial^2 C}{\partial \theta^2}\right|_{\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi} = \left.-mgL\sin\theta\right|_{\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi} = \begin{cases} -1 & \theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{MAX} \\ 1 & \theta = \frac{3}{2}\pi \quad \text{MIN} \end{cases}$$

$C_{MAX} = 218.86$ N·m coppia max per $\dot\theta = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$



$$F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$$

1) NON ESSENDO ESPRESSAMENTE INDICATO, SCRIVO L'EQ. DI MOTO COMPLETA

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot\theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = Q_\theta$$

$$E_c = \frac{1}{2}\frac{M_1 R_1^2}{2}\dot\theta^2 + \frac{1}{2}\frac{M_2 R_2^2}{2}\omega_2^2 + \frac{1}{2}M_3 V_3^2$$

$$\omega_2 = \frac{\dot\theta R_1}{R_2}$$ CON VERSO INDICATO IN FIGURA: $\vec\omega_2 = -\frac{\dot\theta R_1}{R_2}\vec k$

$$V_3 = \omega_2 \cdot R_2 = \dot\theta R_1$$

SOSTITUENDO I LEGAMI CINEMATICI

$$E_c = \frac{1}{2}\left(\frac{M_1 R_1^2}{2} + \frac{M_2 \cancel{R_2^2}}{2}\frac{R_1^2}{\cancel{R_2^2}} + M_3 R_1^2\right)\dot\theta^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot\theta}\right) = \left(\frac{M_1 R_1^2}{2} + \frac{M_2 R_1^2}{2} + M_3 R_1^2\right)\ddot\theta$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \theta} = 0;$$

$$D = \frac{1}{2} r_1 \dot{\Delta e}_1^2 + \frac{1}{2} r_2 \dot{\Delta e}_2^2$$

$$V = \frac{1}{2} K_1 \Delta e_1^2 + \frac{1}{2} K_2 \Delta e_2^2 + M_3 g h_3$$

$$\Delta e_1 = \theta R_1 \qquad \dot{\Delta e}_1 = \dot\theta R_1 \qquad h = -R_1\theta$$
$$\Delta e_2 = -\theta R_1 \qquad \dot{\Delta e}_2 = \dot\theta R_1$$

$$D = \frac{1}{2} r_1 R_1^2 \dot\theta^2 + \frac{1}{2} r_2 R_1^2 \dot\theta^2$$
$$\frac{\partial D}{\partial \dot\theta} = (r_1 + r_2) R_1^2 \dot\theta$$

$$V = \frac{1}{2} K_1 R_1^2 \theta^2 + \frac{1}{2} K_2 R_1^2 \theta^2 - M_3 g R_1 \theta$$
$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = (K_1 + K_2) R_1^2 \theta - M_3 g R_1$$

$$\delta^* L = +\vec{F} \cdot \delta\vec{y}_3 = +F R_1 \delta\theta \qquad \Rightarrow Q_\theta = F R_1$$

$$\underbrace{\left(\frac{M_1}{2} + \frac{M_2}{2} + M_3\right) R_1^2}_{m^*} \ddot\theta + \underbrace{(r_1 + r_2) R_1^2}_{r^*} \dot\theta + \underbrace{(K_1 + K_2) R_1^2}_{K^*} \theta = M_3 g R_1 + F_0 R_1 \cos(\Omega t)$$

2) $\omega_0 = \sqrt{\frac{K^*}{m^*}}$

ESSENDO IL SISTEMA SMORZATO

$$\omega_n = \omega_0 \sqrt{1 - h^2} \qquad \Rightarrow f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$$

3) NEL VALUTARE LA RISPOSTA COMPLETA CONSIDERO SOLAMENTE IL MOTO NELL'INTORNO DELLA POSIZIONE DI EQUILIBRIO STATICO, ASSUMENDO LE CONDIZIONI

$$\begin{cases} \bar{\theta}(0) = 0 \\ \dot{\bar{\theta}}(0) = 0 \end{cases}$$

IL CUI SIGNIFICATO È CHE IL SISTEMA SI TROVA FERMO NELLA SUA POSIZIONE DI EQUILIBRIO STATICO per $t=0$

$$m^* \ddot{\theta} + r^* \dot{\theta} + k^* \theta = F(t) R_1 \quad , \text{con } F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$$

$$\theta(t) = \theta_p + \theta_g$$

$$\theta_g(t) = e^{-\alpha t}\left(A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t\right) \quad (\text{Hp: } h < 1)$$

$$\dot{\theta}_g(t) = -\alpha e^{-\alpha t}\left(A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t\right) + \\ + e^{-\alpha t}\left(-A\omega_n \sin \omega_n t + B\omega_n \cos \omega_n t\right)$$

$$\theta_p = \theta_0 \cos(\Omega t + \varphi), \quad \text{con} \quad \theta_0 = \frac{F_0 R_1}{\sqrt{(k^* - m^* \Omega^2)^2 + (\Omega r^*)^2}}$$

$$\dot{\theta}_p = -\Omega \theta_0 \sin(\Omega t + \varphi)$$

$$\tan \varphi = -\frac{\Omega r^*}{k^* - m^* \Omega^2}$$

$$\theta(t) = e^{-\alpha t}\left(A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t)\right) + \theta_0 \cos(\Omega t + \varphi)$$

$$\begin{cases} \theta(0) = A + \theta_0 \cos\varphi = 0 \\ \dot{\theta}(0) = -\alpha A + B\omega_n - \Omega\theta_0 \sin\varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\theta_0 \cos\varphi \\ B = \dfrac{-\alpha \theta_0 \cos\varphi}{\omega_n} + \dfrac{\Omega \theta_0 \sin\varphi}{\omega_n} \end{cases}$$