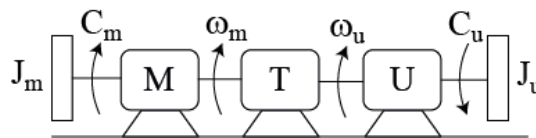


Problema N. 1.1

Il sistema MTU in figura è costituito da un motore di caratteristica lineare $C_m = C_0 \left(1 - \frac{\omega_m}{\omega_0} \right)$, con $C_0=500$ Nm e $\omega_0=300$ rad/s e da un utilizzatore su cui è applicata una coppia resistente $C_u=500\omega_u$. Sapendo che la trasmissione è caratterizzata da un rendimento $\eta=0.8$ e da un rapporto di trasmissione $\tau=1/10$ calcolare la velocità angolare del motore a regime e la potenza erogata dal motore a regime. I momenti di inerzia sul lato motore e sul lato utilizzatore sono assegnati e pari rispettivamente a: $J_m=10$ kgm² e $J_u=50$ kgm².



Problema N. 1.2

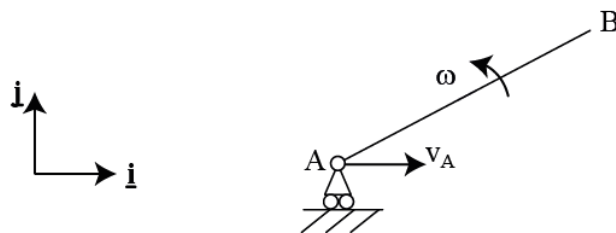
Calcolare i vettori velocità \underline{v}_B ed accelerazione \underline{a}_B del punto B nell'istante considerato, noti:

$$\underline{v}_A = 5 \underline{i} \quad [m/s]$$

$$\underline{a}_A = 0 \quad [m/s^2]$$

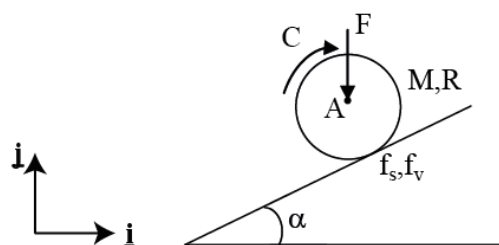
$$\underline{\omega} = 3 \underline{k} = \cos t \quad [rad/s]$$

$$(B-A) = \sqrt{3}/2 \underline{i} + 1/2 \underline{j} \quad [m]$$



Problema N. 1.3

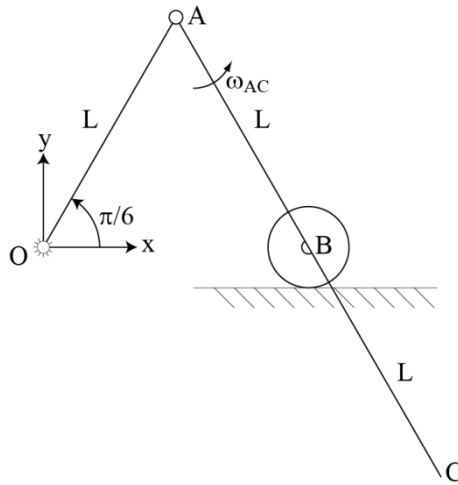
Il disco in figura, posto nel piano verticale, rotola senza strisciare su un piano inclinato di angolo $\alpha=\pi/6$. Siano noti i valori del coefficiente di resistenza al rotolamento $f_V=0.01$, della forza F applicata al centro del disco $F=-200 \underline{i}$ [N] e del momento $C=100 \underline{k}$ [Nm]. Si determini il modulo dell'accelerazione del centro del disco A e si verifichi l'aderenza del disco stesso considerando un coefficiente di attrito statico $f_s=1.2$. Il disco è uniforme, ha raggio $R=0.3$ m e massa $M=30$ kg.



Problema N. 1.4

Dato il meccanismo in figura, per cui è assegnata la velocità angolare dell'asta AC $\underline{\omega}_{AC}=2 \underline{k}$ [rad/s] e la lunghezza $AC=2L=2$ m, individuare la posizione del centro di istantanea rotazione dell'asta

stessa e, tramite esso, scrivere le componenti del vettore \underline{v}_C velocità del punto C. Si noti che $OA=AB=L$.

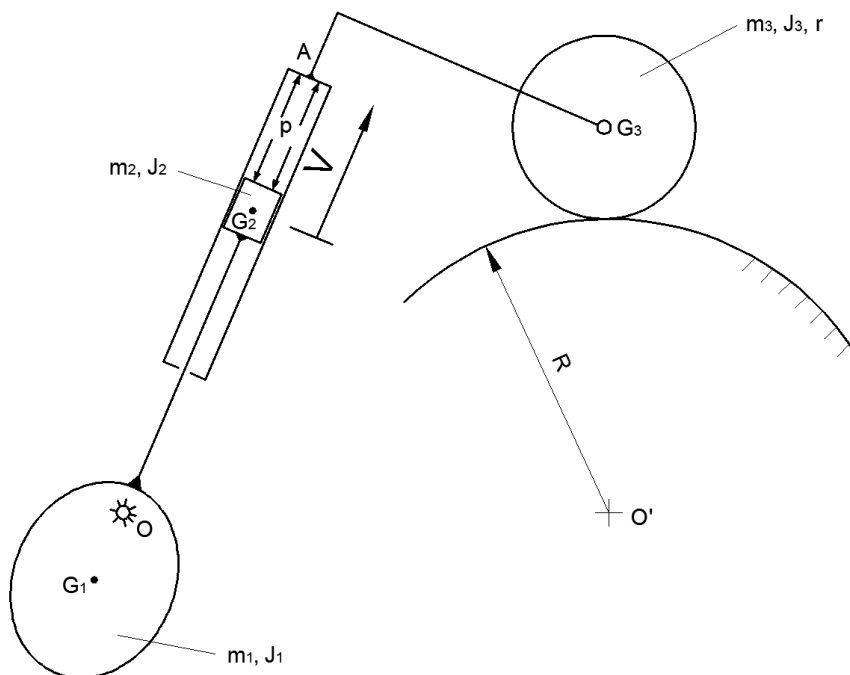


Problema N.2

Il sistema meccanico illustrato in figura giace nel piano verticale. L'asta OG_2 è incernierata a terra in O, all'estremità inferiore è presente una massa eccentrica con baricentro G_1 e caratteristiche m_1, J_1 . All'altra estremità vi è un pistone caratterizzato da baricentro G_2 , massa m_2 e momento d'inerzia J_2 . Il pistone scorre dentro un cilindro che a sua volta è rigidamente connesso in A ad un'asta ad L. L'estremità opposta dell'asta è collegata ad un disco tramite una cerniera posizionata in corrispondenza del baricentro G_3 . Il disco ha caratteristiche m_3, J_3, r e rotola senza strisciare sulla guida circolare di raggio R. Si consideri nulla la resistenza al rotolamento.

Nell'istante considerato, ritenendo note tutte le grandezze geometriche e considerando una velocità di sfilo V costante, si chiede di determinare:

- 1) i vettori velocità ed accelerazione del centro del disco G_3 ;
- 2) il valore della pressione p che garantisce l'atto di moto assegnato;
- 3) le reazioni vincolari in O e la verifica di aderenza del disco.



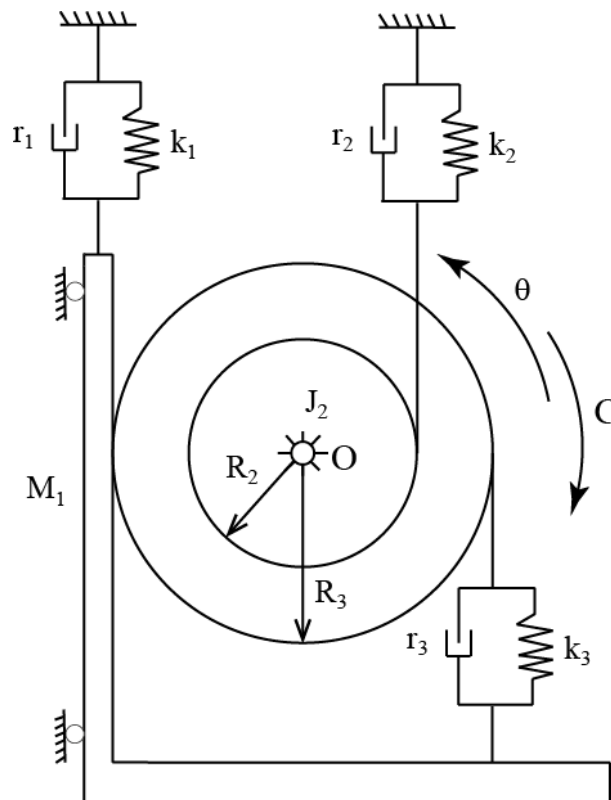
Problema N.3

Il sistema rappresentato in figura si trova nel piano verticale. Un corpo di massa M_1 scorre lungo una guida verticale ed è vincolato a terra attraverso un gruppo molla-smorzatore di rigidezza k_1 e smorzamento r_1 .

Una coppia di dischi concentrici, di momento di inerzia complessivo pari a J_2 , è incernierata a terra nel suo centro O e rotola senza strisciare sul corpo di massa M_1 . Una fune collega il disco interno di raggio R_2 a terra attraverso un gruppo molla-smorzatore di rigidezza k_2 e smorzamento r_2 . Un'altra fune si avvolge sul disco esterno di raggio R_3 ed è vincolata ad un altro gruppo molla-smorzatore di rigidezza k_3 e smorzamento r_3 che la collega al carrello.

Si richiede di determinare:

1. l'equazione di moto del sistema nell'intorno della posizione di equilibrio statico, utilizzando come variabile indipendente la rotazione θ indicata in figura, e la sua frequenza propria;
2. la risposta del sistema $\theta(t)$ a regime e la zona di funzionamento dello stesso, sapendo che $M_1=10$ kg, $J_2=20$ kgm², $R_2=0.2$ m, $R_3=0.3$ m, $k_1=3000$ N/m, $r_1=30$ Ns/m, $k_2=6000$ N/m, $r_2=60$ Ns/m, $k_3=12000$ N/m, $r_3=60$ Ns/m, $C(t)=C_0\cos(\Omega t)$ con $\Omega=60$ rad/s.



1.1

$$-W_2 - C_0 \omega_0 = 0 \Rightarrow W_2 = -C_0 \omega_0 < 0 \text{ FOTO DIRETTO}$$

$$C_m \omega_m - (1 - \eta_{LD}) C_m \omega_m - C_0 \omega_0 = 0$$

$$\hookrightarrow \eta_{LD} C_m \omega_m = C_0 \omega_0 \quad \text{ma } C_0 = 500 \omega_0$$

$$\omega_0 = 5 \omega_m$$

$$\Rightarrow \bar{C}_m = \frac{\eta_{LD}^2}{\eta_{LD}} 500 \cdot \omega_m$$

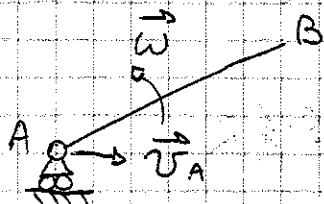
$$\begin{cases} \bar{C}_m = \frac{\eta_{LD}^2}{\eta_{LD}} 500 \bar{\omega}_m \\ \bar{C}_m = C_0 \left(1 - \frac{\bar{\omega}_m}{\omega_0}\right) \end{cases} \Rightarrow \frac{\eta_{LD}^2}{\eta_{LD}} 500 \bar{\omega}_m = C_0 - \frac{C_0}{\omega_0} \bar{\omega}_m$$

$$\Rightarrow \bar{\omega}_m = \frac{C_0}{\frac{\eta_{LD}^2}{\eta_{LD}} 500 + \frac{C_0}{\omega_0}} = \frac{500 \text{ Nm}}{\frac{(1/10)^2}{0,8} 500 \text{ Nm/s} + \frac{500 \text{ Nm}}{300 \frac{\text{RAD}}{\text{s}}}} = 63,15 \frac{\text{RAD}}{\text{s}}$$

$$\Rightarrow \bar{C}_m = \frac{\eta_{LD}^2}{\eta_{LD}} 500 \cdot \bar{\omega}_m = \frac{(1/10)^2}{0,8} 500 \text{ Nm/s} \cdot 63,15 \frac{\text{RAD}}{\text{s}} = 394,75 \text{ Nm}$$

$$\Rightarrow \bar{P} = \bar{C}_m \bar{\omega}_m = 24930 \text{ W}$$

1.2



$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (\vec{B} - \vec{A})$$

$$\downarrow 5 \vec{i} + 3 \vec{k} \wedge \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \vec{i} + \frac{1}{2} \vec{j} \right)$$

$$\downarrow \left(5 - \frac{3}{2} \right) \vec{i} + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \right) \vec{j}$$

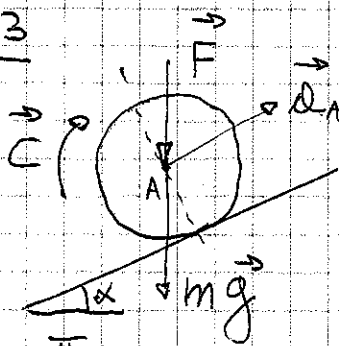
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\omega} \wedge (\vec{B} - \vec{A}) - \omega^2 (\vec{B} - \vec{A})$$

$$\downarrow \vec{0} \quad \downarrow \vec{0}$$

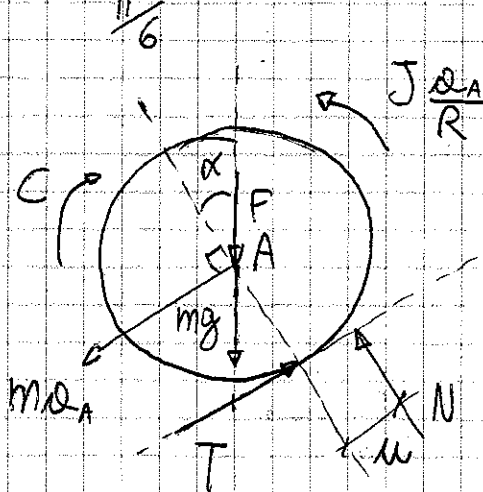
$$\downarrow -3^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \vec{i} + \frac{1}{2} \vec{j} \right)$$

$$\downarrow -\frac{9\sqrt{3}}{2} \vec{i} - \frac{9}{2} \vec{j}$$

1.3



Rotations $\vec{\omega}_A$ come in figure
 $\Rightarrow \vec{\omega}_A = -\frac{\dot{\varphi}_A}{R} \vec{k}$



$$\begin{cases} \sum F_{\parallel \alpha} = T - m\dot{\varphi}_A - F \sin \alpha - mg \sin \alpha = 0 & (1) \\ \sum F_{\perp \alpha} = N - F \cos \alpha - mg \cos \alpha = 0 & (2) \\ \sum M_A^{\text{Disco}} = C - \frac{J}{R} \dot{\varphi}_A - TR - N\mu = 0 & (3) \end{cases}$$

Da (2) $N = (F + mg) \cos \alpha$

$$= (200 \text{ N} + 30 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}) \cos 30^\circ = 428 \text{ N}$$

Da (1) $T = (F + mg) \sin \alpha + m\dot{\varphi}_A$

$$= (200 \text{ N} + 30 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}) \sin 30^\circ + 30 \text{ kg} \cdot \dot{\varphi}_A$$

$$= 247,15 + 30 \dot{\varphi}_A \text{ N}$$

Da (3) $C - \frac{J}{R} \dot{\varphi}_A - (247,15 + 30 \dot{\varphi}_A) R - 428 \cdot f_v \cdot R = 0$

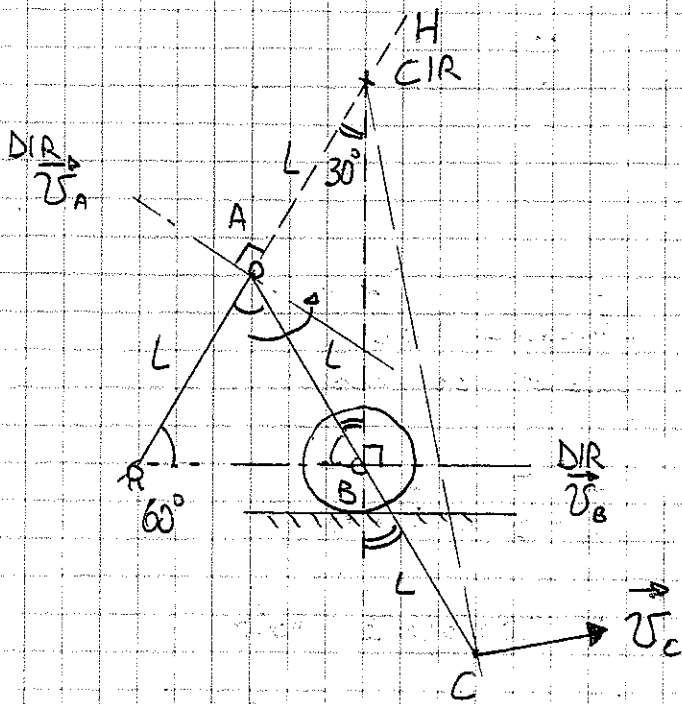
$$\Rightarrow \dot{\varphi}_A \left(\frac{J}{R} + 30 \cdot R \right) = C - 247,15 \cdot R - 428 \cdot f_v \cdot R$$

$$\Rightarrow \dot{\varphi}_A = \frac{100 \text{ Nm} - 247,15 \text{ N} \cdot 0,3 \text{ m} - 428 \text{ N} \cdot 0,01 \cdot 0,3 \text{ m}}{4,5 \text{ kgm}} = 1,82 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

im Joth: $\frac{J}{R} = \frac{mR^2}{2} \cdot \frac{1}{R} = 4,5 \text{ kgm}$

$$T < f_s N \Rightarrow \frac{T}{N} = \frac{247,15 + 30 \cdot 1,82}{428} = 0,7 < 1,2$$

1.4 (ANGOLO INDICATO $\pi/3$)



$$\vec{v}_c = \vec{\omega}_{AC} \wedge (\vec{C} - \vec{H})$$

$$\vec{\omega}_{AC} = 2\vec{k}$$

$$(\vec{C} - \vec{H}) = L \sin 30^\circ \vec{i} - 3L \cos 30^\circ \vec{j}$$

$$= \frac{L}{2} \vec{i} - \frac{3\sqrt{3}}{2} L \vec{j}$$

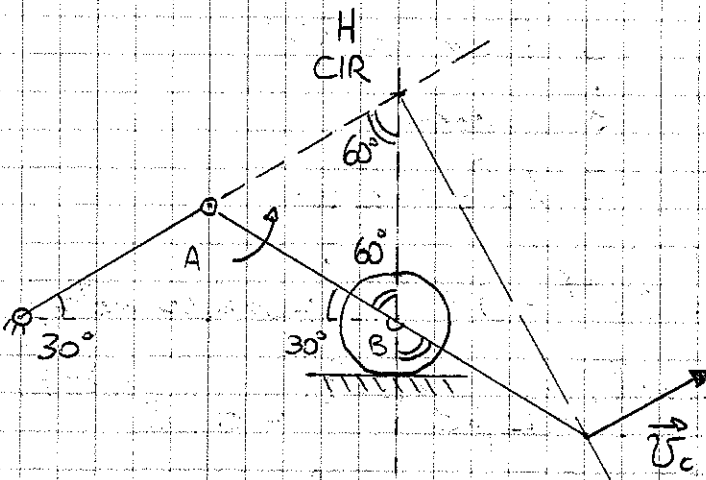
$$= \frac{1}{2} \vec{i} - \frac{3\sqrt{3}}{2} \vec{j} \text{ essendo } L=1\text{m.}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_c = 2\vec{k} \wedge \left(\frac{1}{2} \vec{i} - \frac{3\sqrt{3}}{2} \vec{j} \right)$$

$$= 3\sqrt{3} \vec{i} + 1 \vec{j}$$

$$|\vec{v}_c| = \sqrt{19} \text{ m/s}$$

(ANGOLO INDICATO $\pi/6$)



$$\vec{\omega}_{AC} = 2\vec{k}$$

$$(\vec{C} - \vec{H}) = L \sin 60^\circ \vec{i} - 3L \cos 60^\circ \vec{j}$$

$$= \frac{L\sqrt{3}}{2} \vec{i} - \frac{3L}{2} \vec{j}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{i} - \frac{3}{2} \vec{j}$$

$$\vec{v}_c = 2\vec{k} \wedge \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \vec{i} - \frac{3}{2} \vec{j} \right)$$

$$= 3\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}$$

$$|\vec{v}_c| = \sqrt{12} \text{ m/s}$$

La velocità di G_3 può essere calcolata con regole:

$$\vec{v}_{G_3} = \dot{\delta} \vec{k} \wedge (\vec{G}_3 - O_1) \quad \text{Rispetto le convenzioni dei numeri complessi } \sigma \begin{matrix} \uparrow \\ \rightarrow \end{matrix}$$

$$= \dot{\delta} \vec{k} \wedge \left[(R+\mu) \cos \delta \vec{i} + (R+\mu) \sin \delta \vec{j} \right]$$

$$= -\dot{\delta} (R+\mu) \sin \delta \vec{i} + \dot{\delta} (R+\mu) \cos \delta \vec{j}$$

$$\vec{a}_{G_3} = \ddot{\delta} \vec{k} \wedge (\vec{G}_3 - O_1) - \dot{\delta}^2 (\vec{G}_3 - O_1)$$

$$= \underbrace{-\ddot{\delta} (R+\mu) \sin \delta \vec{i} + \ddot{\delta} (R+\mu) \cos \delta \vec{j}}_{\vec{a}_{G_3,t}} - \underbrace{\dot{\delta}^2 (R+\mu) \cos \delta \vec{i} - \dot{\delta}^2 (R+\mu) \sin \delta \vec{j}}_{\vec{a}_{G_3,n}}$$

P.to 2

$$\frac{dE_c}{dt} = \dot{\Pi} + \dot{\Pi}' \quad \dot{\Pi}' = 0$$

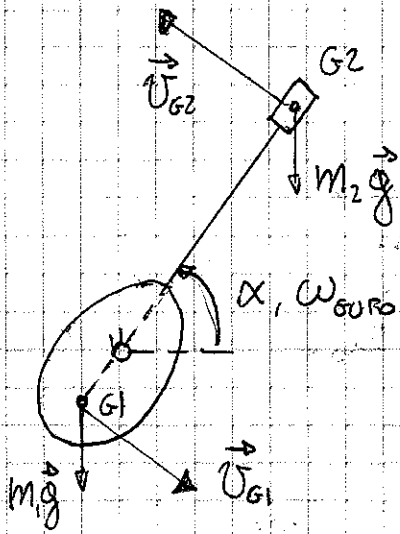
$$E_c = \frac{1}{2} m_1 v_{G_1}^2 + \frac{1}{2} J_1 \omega_{G_1}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{G_2}^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_{G_2}^2 + \frac{1}{2} m_3 v_{G_3}^2 + \frac{1}{2} J_3 \omega_{G_3}^2$$

Dove $\begin{cases} v_{G_1} = \overline{OG_1} \omega_{G_1} \\ v_{G_2} = \overline{OG_2} \omega_{G_2} \\ v_{G_3} = \dot{\delta} (R+\mu) = \omega_{G_3} \cdot \mu \Rightarrow \omega_{G_3} = \frac{R+\mu}{\mu} \dot{\delta} \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{dE_c}{dt} = (m_1 \overline{OG_1}^2 + J_1 + m_2 \overline{OG_2}^2 + J_2) \omega_{G_1} \dot{\omega}_{G_1} + \left[m_3 (R+\mu)^2 + J_3 \left(\frac{R+\mu}{\mu} \right)^2 \right] \dot{\delta} \dot{\delta}$$

$$\Pi = m_1 \vec{g} \cdot \vec{v}_{G_1} + m_2 \vec{g} \cdot \vec{v}_{G_2} + \vec{\tau} \cdot \vec{\omega} + m_3 \vec{g} \cdot \vec{v}_{G_3}$$

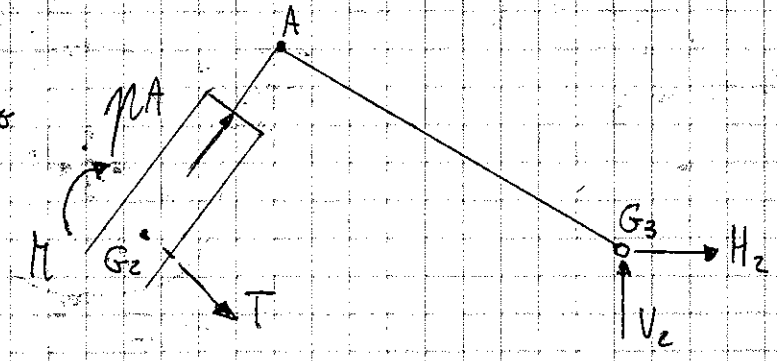
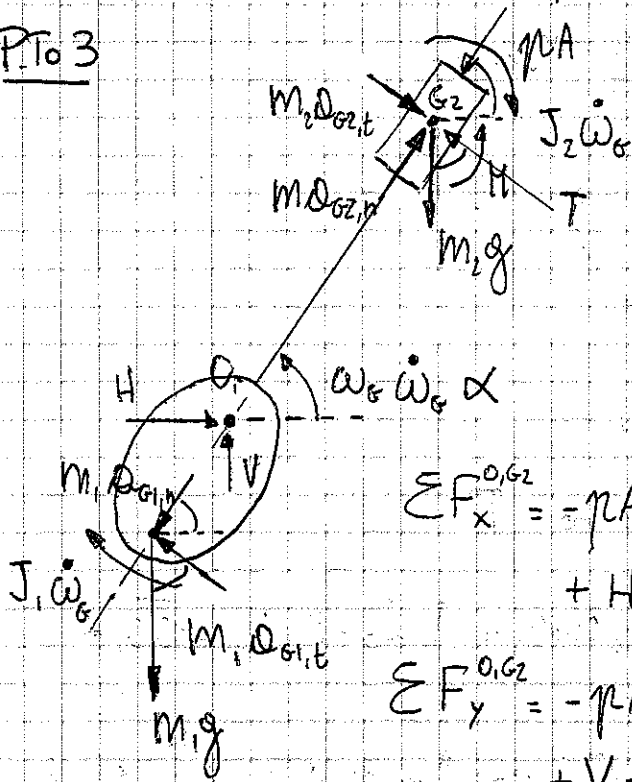
Dove $\begin{cases} \vec{v}_{G_1} = \overline{OG_1} \omega_{G_1} \cos(\alpha + \pi) \vec{i} + \overline{OG_1} \omega_{G_1} \sin(\alpha + \pi) \vec{j} \\ \vec{v}_{G_2} = \overline{OG_2} \omega_{G_2} \cos \alpha \vec{i} + \overline{OG_2} \omega_{G_2} \sin \alpha \vec{j} \end{cases}$



$$\begin{aligned} \Pi &= m_1 g \overline{O_1 G_1} \omega_{G1} \sin \alpha - m_2 g \overline{O_2 G_2} \omega_{G2} \sin \alpha + \\ &+ \mu A \cdot V - m_3 g \dot{\delta} (R + r) \cos \delta \\ &= (m_1 g \overline{O_1 G_1} \sin \alpha - m_2 g \overline{O_2 G_2} \sin \alpha) \omega_{G1} + \\ &+ \mu A \cdot V - m_3 g (R + r) \cos \delta \cdot \dot{\delta} \end{aligned}$$

Nell'eq. del bilancio di potenza l'unica incognita è μ

P.T. 3



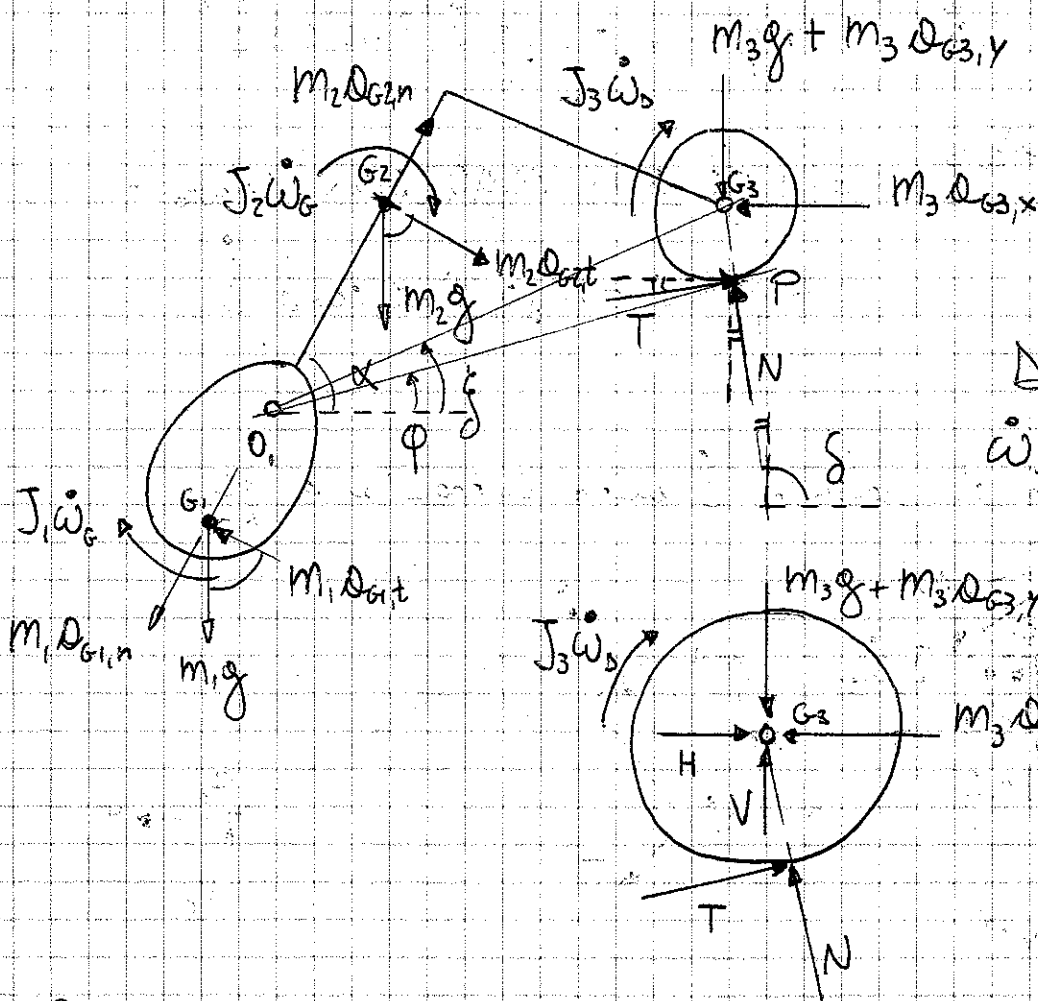
$$\sum F_x^{O, G_2} = -\mu A \cos \alpha - T \sin \alpha + m_2 Q_{G_2, t} \sin \alpha + m_2 Q_{G_2, n} \cos \alpha + H - m_1 Q_{G_1, n} \cos \alpha - m_1 Q_{G_1, t} \sin \alpha = 0$$

$$\sum F_y^{O, G_2} = -\mu A \sin \alpha + T \cos \alpha - m_2 Q_{G_2, t} \cos \alpha - m_2 g + m_2 Q_{G_2, n} \sin \alpha + V - m_1 Q_{G_1, n} \sin \alpha + m_1 Q_{G_1, t} \cos \alpha - m_1 g = 0$$

$$\sum M_{O_1}^{O, G_2} = (-m_2 Q_{G_2, t} + T) \overline{O_1 G_2} - m_2 g \cos \alpha \overline{O_1 G_2} + M - J_2 \dot{\omega}_G - J_1 \dot{\omega}_G - m_1 Q_{G_1, t} \overline{O_1 G_1} - m_1 g \cos \alpha \overline{O_1 G_1} = 0$$

$$\sum M_{G_3}^{G_3 A} = M + \mu A \cdot \overline{G_3 A} - T \cdot \overline{G_2 A} = 0$$

Ho un sistema di 4 equazioni in 4 incognite H, V, M, T quindi ricorro le reazioni in O, H e V.



Dove

$$\dot{\omega}_3 = \frac{R + r}{R} \ddot{\delta}$$

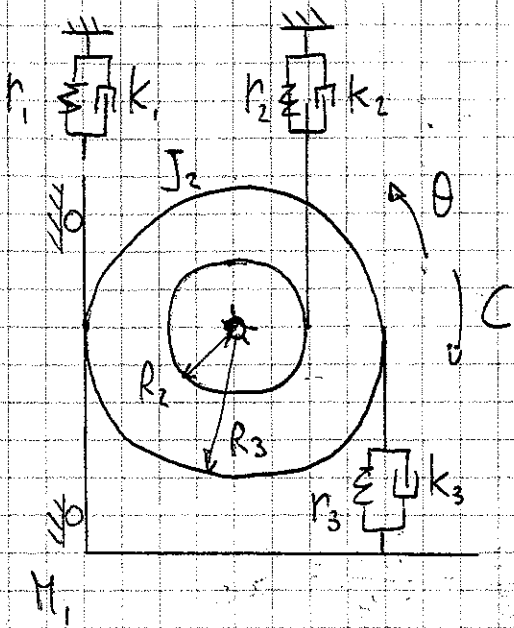
$$\left\{ \begin{aligned} \sum M_{G_3}^{DISCO} &= J_3 \dot{\omega}_3 - T \cdot R = 0 \quad R \cos \theta = T \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sum M_{O_1}^{STRUT.} &= J_2 \dot{\omega}_G + m_2 a_{G_2,t} \overline{O_1 G_2} + m_2 g \overline{O_1 G_2} \cos \alpha + J_1 \dot{\omega}_G + m_1 a_{G_1,t} \overline{O_1 G_1} - \\ &- m_1 g \overline{O_1 G_1} \cos \alpha + \\ &+ J_3 \dot{\omega}_3 + (m_3 g + m_3 a_{G_3,y}) \overline{O_1 G_3} \cos \beta - m_3 a_{G_3,x} \overline{O_1 G_3} \sin \beta \left. \right\} + \\ &- [N \cos(\delta - \frac{\pi}{2}) + T \sin(\delta - \frac{\pi}{2})] \overline{O_1 P} \cos \varphi + \\ &+ [-N \sin(\delta - \frac{\pi}{2}) + T \cos(\delta - \frac{\pi}{2})] \overline{O_1 P} \sin \varphi = 0 \end{aligned} \right.$$

La seconda eq. ha come sola incognita N

il che si verifica se $T \leq f_s \cdot N$

B



Pro 1

Sist. TGD. Δ $\begin{matrix} + \\ \leftarrow M \rightarrow \\ \leftarrow J \rightarrow \\ + \end{matrix}$

Forme d'energia:

$$E_c = \frac{1}{2} M_1 v_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2$$

$$D = \frac{1}{2} m_1 \dot{\Delta l}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\Delta l}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{\Delta l}_3^2$$

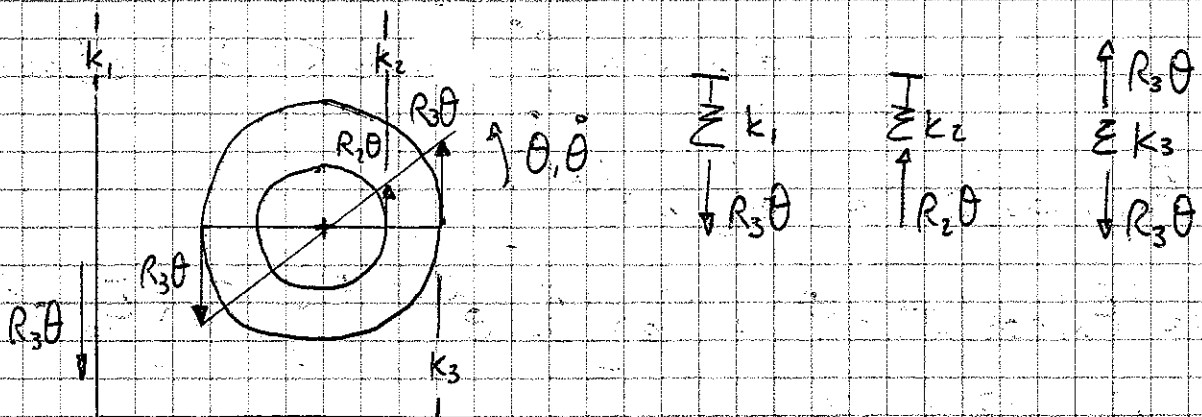
$$V = \frac{1}{2} k_1 \Delta l_1^2 + \frac{1}{2} k_2 \Delta l_2^2 + \frac{1}{2} k_3 \Delta l_3^2$$

Il contributo del corpo gravitazionale all'energia potenziale è lineare e viene compensato dal precesso statico delle molle del sistema. \Rightarrow non rientra nella eq.

$$\delta^* L = C \cdot \delta^* \theta$$

Legoni cinematiche:

	$\dot{\theta}$	Δl_1	Δl_2	Δl_3	$\dot{\Delta l}_1$	$\dot{\Delta l}_2$	$\dot{\Delta l}_3$	$\delta^* \theta$
v_1	$-R_3$	R_3	$-R_2$	$2R_3$	R_3	$-R_2$	$2R_3$	$\delta^* \theta$
ω_2	1							-1



$$E_c = \frac{1}{2} [M_1 R_3^2 + J_c] \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} J^* \dot{\theta}^2$$

$$D = \frac{1}{2} [r_1 R_3^2 + r_2 R_2^2 + 4 r_3 R_3^2] \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} r^* \dot{\theta}^2$$

$$V = \frac{1}{2} [k_1 R_3^2 + k_2 R_2^2 + 4 k_3 R_3^2] \theta^2 = \frac{1}{2} k^* \theta^2$$

$$\delta L = -C \delta \theta$$

Applico Lagrange: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = Q_c$

$$\Rightarrow J^* \ddot{\theta} + r^* \dot{\theta} + k^* \theta = -C(t)$$

Dove

$$\begin{cases} J^* = 20,9 \text{ kgm}^2 \\ r^* = 26,7 \text{ Nm} \cdot \text{s} \\ k^* = 4830 \text{ Nm} \end{cases}$$

Pro 2

Zona di funzionamento: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k^*}{J^*}} = 15,2 \text{ RAD/s}$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{r}{\omega_0} = 3,95 > 1 \text{ Zona sismografica}$$

$$r_c = 2 \omega_0 \cdot J^* = 635,3 \text{ Nm} \cdot \text{s}$$

$$\Rightarrow h = \frac{r^*}{r_c} = 0,04 < 1 \text{ Sist sottosmorzato}$$

$$C(t) = C_0 \cos(\alpha t) = \text{Re} \{ C_0 e^{i \alpha t} \}$$

$$\theta_p(t) = |\bar{\theta}_p| \cos(\alpha t + \varphi) = \text{Re} \{ |\bar{\theta}_p| e^{i(\alpha t + \varphi)} \} = \text{Re} \{ \bar{\theta}_p e^{i \alpha t} \}$$

Dove $\bar{\theta}_p = |\bar{\theta}_p| e^{i \varphi}$

$$\Rightarrow (-j^* \Omega^2 + i n^* \Omega + k^*) \bar{\theta}_p = -C_0$$

$$\Rightarrow \bar{\theta}_p = \frac{-C_0}{-j^* \Omega^2 + i n^* \Omega + k^*}$$

$$\Rightarrow |\bar{\theta}_p| = \frac{\delta_{ST}}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + (z\alpha h)^2}} = -0,003 \cdot C_0$$

Dove $\delta_{ST} = \frac{-C_0}{k^*}$

$$\psi = \arctan\left(-\frac{z\alpha h}{1-\Omega^2}\right)$$

$$= 1,23^\circ$$

Lo sfasamento deve essere negativo!
e deve essere $>$ di 90° in quanto
sono in zona quasi statica

$$\Rightarrow \psi = -180 + 1,23 = -178,7^\circ$$