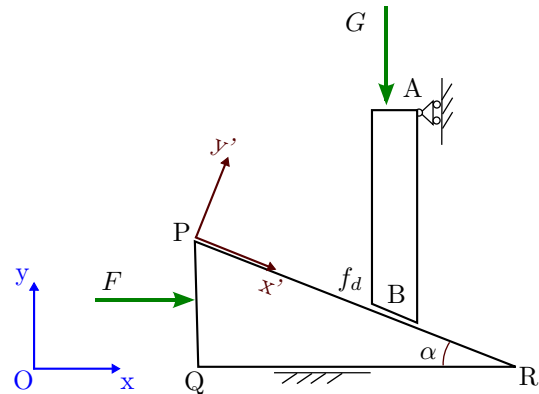


Problema 1.1

Un cuneo PQR, con piano inclinato di α , trasla a velocità assoluta costante $\dot{x}_P = 2m/s$, ed è soggetto alla forza orizzontale F . Il perno AB trasla in verticale ed è vincolato al cuneo mediante un pattino in B, e a terra attraverso un carrello in A, ed è soggetto alla forza verticale G . Noto l'angolo $\alpha=30$ deg, si chiede di:

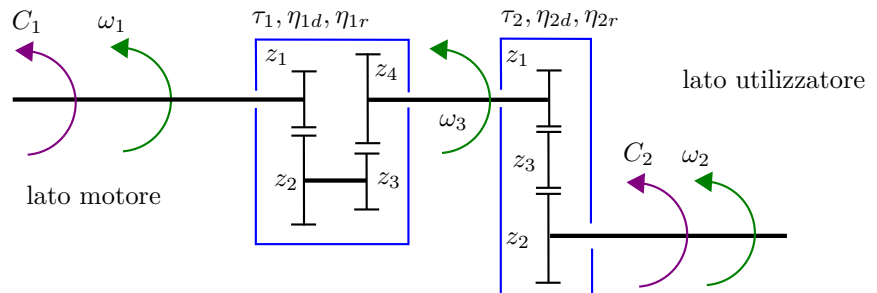
1. usando il teorema dei moti relativi, calcolare la velocità relativa (rispetto alla terna traslante $Px'y'$) e la velocità assoluta del punto B.
2. calcolare il coefficiente di attrito f_d tra perno e cuneo, sapendo che $F = 100$ N e $G = 160$ N.



Problema 1.2

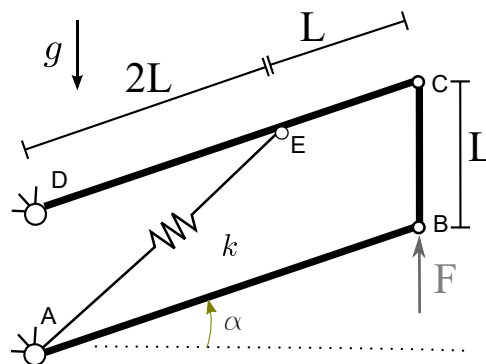
Lo schema in figura rappresenta due trasmissioni collegate in serie tra loro. La trasmissione 1 è costituita da un treno composto di 4 ruote dentate a proporzionamento modulare, di cui è noto il numero di denti di ciascuna ruota z , ed è caratterizzato da un rapporto di trasmissione τ_1 , e da rendimenti diretti e retrogrado τ_{1d} e τ_{1r} . La trasmissione 2 è costituita da un treno semplice di 3 ruote dentate a proporzionamento modulare, di cui è noto il numero di denti di ciascuna ruota z , ed è caratterizzato da un rapporto di trasmissione τ_2 , e da rendimenti diretti e retrogrado τ_{2d} e τ_{2r} . Si chiede di:

1. determinare i rapporti di trasmissione τ_1 , τ_2 , e $\tau = \omega_2/\omega_3$, noti $z_1 = 18$, $z_2 = 33$, $z_3 = 19$, $z_4 = 35$;
2. considerando il sistema in funzionamento a velocità costante quando all'albero 1 è applicata una coppia C_1 pari a 10 Nm (con verso di C_1 concorde a quello di ω_1), calcolare il valore della coppia C_2 applicata all'albero 2. Considerare $\eta_{1d} = 0.85$, $\eta_{1r} = 0.8$, $\eta_{2d} = 0.95$, $\eta_{2r} = 0.9$;
3. nella condizione del punto precedente, calcolare il momento torcente M_3 a cui è soggetto l'albero 3, che collega le due trasmissioni.

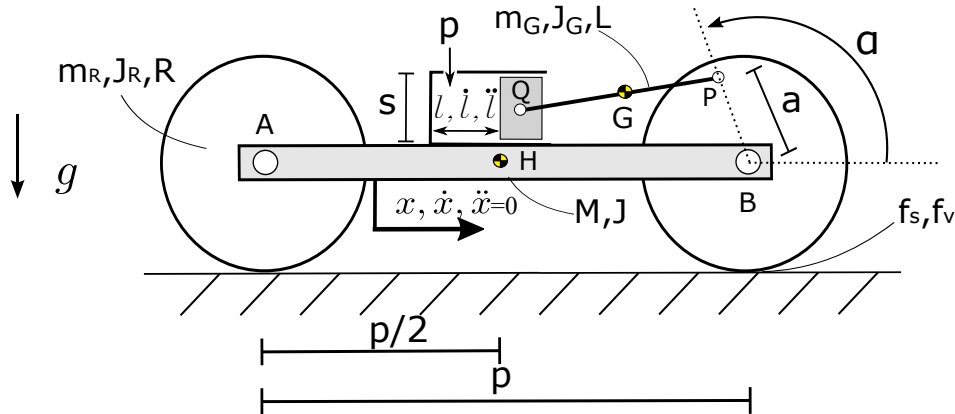


Problema 1.3

Il sistema rappresentato in figura, posto su un piano verticale, è in equilibrio statico. Esso è costituito da parallelogrammo articolato formato da aste di massa trascurabile. Il parallelogrammo è incernierato a terra in A e D, è presente una molla collegata ai punti A ed E del meccanismo. Noto che la molla è indeformata per un angolo $\alpha = 0$ calcolare la costante elastica della molla k affinché α sia uguale a 30 deg nella posizione di equilibrio statico. Usare i seguenti dati $L = 1$ m, $F = 10$ N.



Problema 2

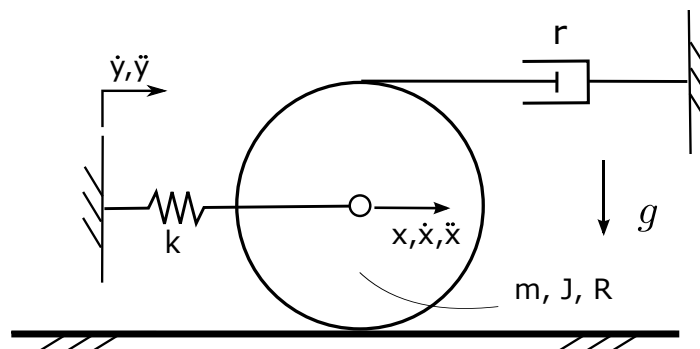


Il sistema meccanico illustrato in figura giace in un piano verticale. Esso è formato da un telaio con baricentro in H, massa M ed inerzia J collegato a due ruote identiche di raggio R , massa M_R ed inerzia J_R in contatto senza strisciamento con il suolo, contatto caratterizzato da coefficiente di attrito statico f_s e di resistenza al rotolamento f_v . Il sistema è movimentato da un attuatore idraulico solidale al telaio tramite un manovellismo ordinario la cui biella è un'asta omogenea con baricentro in G, lunghezza L , massa m_G ed inerzia J_G , (si consideri il pistone di massa trascurabile).

Nell'atto di moto, nota posizione del sistema x e l'angolo di manovella α , e note tutte le dimensioni, le masse e le inerzie, la velocità \dot{x} e l'accelerazione $\ddot{x} = 0$ del telaio si chiede di:

1. determinare i vettori velocità ed accelerazione del punto Q e dell'allungamento ℓ ;
2. determinare i vettori velocità ed accelerazione del baricentro G;
3. determinare la pressione p interna al cilindro che garantisce il moto assegnato;
4. determinare le reazioni vincolari alla cerniera Q che collega biella e pistone;
5. verificare l'aderenza delle ruote del sistema al suolo.

Problema 3



Il sistema in figura è costituito da un disco che rotola senza strisciare su un piano orizzontale, al disco omogeneo di raggio $R = 2m$, massa $m = 1\text{kg}$ ed inerzia J sono collegate una molla di costante elastica $k = 100\text{N/m}$ inestesa per $x = 0$ ed un smorzatore con coefficiente di smorzamento $r = 5\text{Ns/m}$. Si chiede di:

1. scrivere l'equazione di moto del sistema rispetto alla coordinata libera x , considerando che è presente un cedimento di vincolo imposto $y(t)$ all'estremo della molla;
2. calcolare pulsazione propria e smorzamento adimensionale del sistema;
3. calcolare l'ampiezza a regime del moto del sistema a seguito del moto di vincolo $y = y_0 * \cos(\Omega t)$ con $y_0 = 0.1\text{m}$ e $\Omega = 10\text{rad/s}$.
4. calcolare l'ampiezza della forza trasmessa a terra a regime dallo smorzatore r .

PROBLEMA 1.1

CINEMATICA

$$\underline{V}_B = \underline{V}_{TR} + \underline{V}_{REL}$$

$$\underline{V}_B = \dot{\gamma}_B \underline{j} \quad (\text{TRASLA IN VERTICALE})$$

$$\underline{V}_{TR} = \dot{X}_P \underline{i} \quad (\text{TERNA TRASLANTE IN ORIZZONTALE})$$

$$\underline{V}_{REL} = \dot{X}'_B \underline{i}' = \dot{X}'_B (\underline{i} \cos \alpha - \underline{j} \sin \alpha)$$

$$\dot{\gamma}_B \underline{j} = \dot{X}_P \underline{i} + \dot{X}'_B (\underline{i} \cos \alpha - \underline{j} \sin \alpha)$$

DA CUI

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_B = -\dot{X}'_B \sin \alpha = 1.15 \text{ m/s} \\ \dot{X}'_B = \frac{-\dot{X}_P}{\cos \alpha} = -2.31 \text{ m/s} \end{cases}$$

ATTRITO

BILANCIO DI POTENZE

$$F \dot{X}_P - G \dot{\gamma}_B - f_D |N| |\dot{X}'_B| = 0$$

$$16 - f_D |N| 2.31 = 0$$

$$f_D = \frac{6.9}{|N|}$$

BISOGNA CALCOLARE |N|

PROB 1.2

1)

$$\gamma_1 = \frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4} = 0.296$$

$$\gamma_2 = \frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{z_1}{z_2} = 0.546$$

$$\gamma = \gamma_1 \gamma_2 = 0.1615 = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

2) BILANCIO POTENZE

• IL MOTO È DIRETTO (INFATTI ~~W~~ $W_1 = C_1 \omega_1 > 0$)

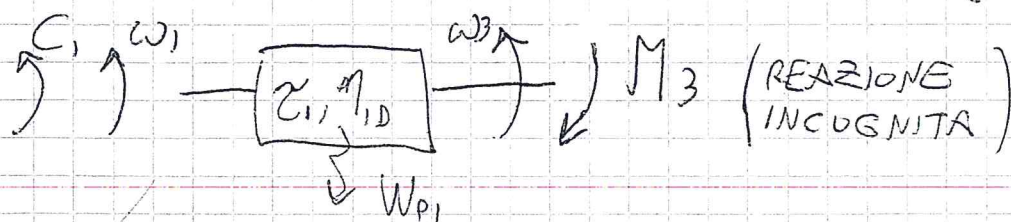
$$C_1 \omega_1 + C_2 \omega_2 - (1 - \eta_D) C_1 \omega_1 = 0$$

$$\eta_D C_1 + C_2 \frac{\omega_2}{\omega_1} = 0$$

$$C_2 = -\frac{\eta_D}{\gamma} C_1 \quad \text{CON} \quad \eta_D = \eta_{D1} \cdot \eta_{D2} = 0.2075$$

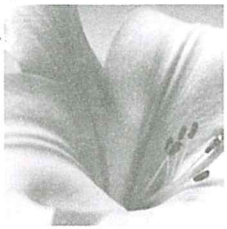
$$C_2 = -50 \text{ Nm}$$

3) BILANCIO DI POTENZE PARZIALE (ISOLA TRASMISSIONI 1)



$$C_1 \omega_1 - M_3 \omega_3 - (1 - \eta_{ID}) C_1 \omega_1 = 0$$

$$M_3 = \frac{\eta_{ID} C_1}{\gamma} = 28.7 \text{ Nm}$$



ANTAS

ANTAS Srl Società a Socio Unico

Via Vittime della Strada, 2 | Località Gragnanino | 29010 Gragnano Trebbiense (PC)

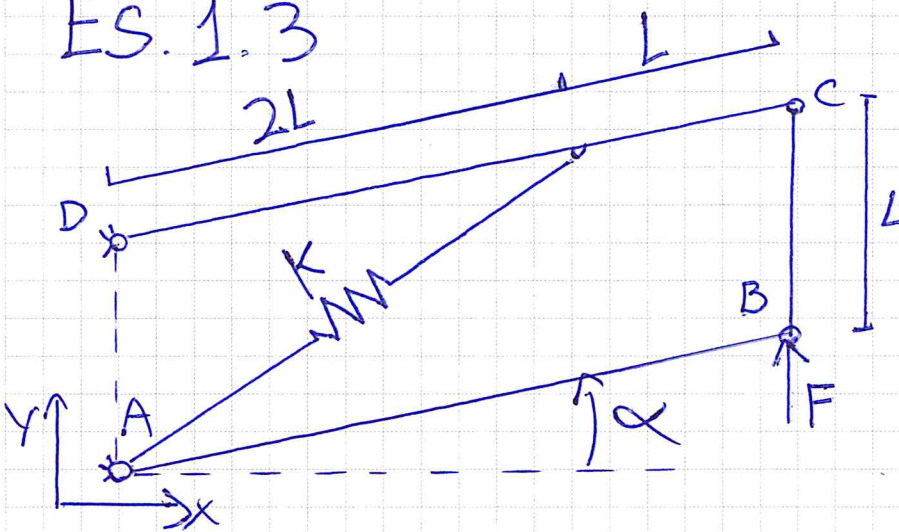
P.IVA 02126260062

Tel. +39.0523.785111 | Fax +39.0523.1580031

antas@pec.antas.org

www.antas.org

ES. 1.3



POS. EQ STATICO

$$\delta L = 0$$

$$\delta L^C + \delta L^{NC} = 0$$

$$\delta L^{NC} = -\delta L^C = dV = \frac{\partial V}{\partial \alpha} \delta \alpha$$

$$\delta L^{NC} = \bar{F} \cdot \delta \bar{B} = 3FL \cos \alpha \delta \alpha$$

$$\delta \bar{B} = \delta (3L \cos \alpha \bar{i} + L \sin \alpha \bar{j}) = (-3L \sin \alpha \bar{i} + L \cos \alpha \bar{j}) \delta \alpha$$

$$V = \frac{1}{2} K \Delta L^2$$

$$\begin{aligned} \Delta L = l - l_0 &= \sqrt{(2L \cos \alpha)^2 + (2L \sin \alpha + L)^2} - \sqrt{4L^2 + L^2} \\ &= L(\sqrt{4(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + 4 \sin \alpha + 1} - \sqrt{5}) \end{aligned}$$



ANTAS

ANTAS Srl Società a Socio Unico

Via Vittime della Strada, 2 | Località Gragnanino | 29010 Gragnano Trebbiense (PC)

P.IVA 02126260062

Tel. +39.0523.785111 | Fax +39.0523.1580031

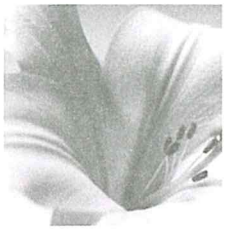
antas@pec.antas.org

www.antas.org

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = K \Delta l \frac{\partial \Delta l}{\partial \alpha} = K \Delta l \frac{L}{2\sqrt{4s \sin \alpha + 5}} 4 \cos \alpha$$

$$3F \cos \alpha \cancel{\Delta l} = K L^2 \frac{(\sqrt{4s \sin \alpha + 5} - \sqrt{5})^2 (\cancel{4} \cos \alpha) \cancel{\Delta l}}{2\sqrt{4s \sin \alpha + 5}}$$

$$K = \frac{3F \sqrt{4s \sin \alpha + 5}}{L^2 (\sqrt{4s \sin \alpha + 5} - \sqrt{5})} = 96,9 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$



ANTAS

ANTAS Srl Società a Socio Unico

Via Vittime della Strada, 2 | Località Gragnanino | 29010 Gragnano Trebbiense (PC)

P.IVA 02126260062

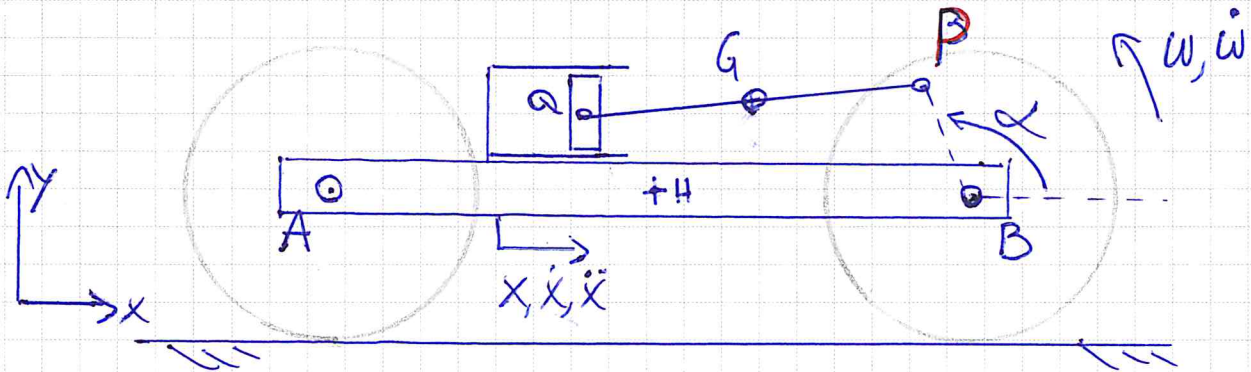
Tel. +39.0523.785111 | Fax +39.0523.1580031

antas@pec.antas.org

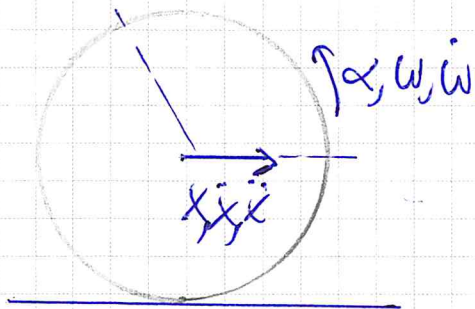
www.antas.org

①

ESE ②



① VEL/ACC ⑥



$$\alpha = \frac{x}{R}$$

$$\omega = \frac{\dot{x}}{R}$$

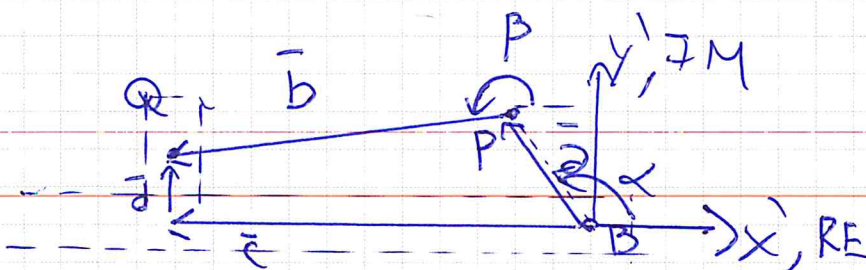
$$\dot{\omega} = \frac{\ddot{x}}{R} = \alpha$$

CHIUSURA "TRASLANTE"

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{c} + \bar{d}$$

	M	A
\bar{a}	$a = \cos t$	\otimes
\bar{b}	$b = \cos t$	\oplus
\bar{c}	\otimes	$\gamma = \pi$
\bar{d}	$d = \cos t$	$d = \pi/2$

3 VAR
 α NOTO





ANTAS

ANTAS Srl Società a Socio Unico

Via Vittime della Strada, 2 | Località Gagnanino | 29010 Gagnano Trebbiense (PC)

P.IVA 02126260062

Tel. +39.0523.785111 | Fax +39.0523.1580031

antas@pec.antas.org

www.antas.org

②

Pos

$$ae^{i\alpha} + be^{i\beta} = -c + id$$

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \left\{ \begin{array}{l} a \cos \alpha + b \cos \beta = -c \\ a \sin \alpha + b \sin \beta = d \end{array} \right. \end{cases} \rightarrow C, \beta = f(\alpha) = f(x)$$

$$\alpha = \frac{x}{R}$$

VBL

$$ia\dot{\alpha}e^{i\alpha} + ib\dot{\beta}e^{i\beta} = -\dot{c}$$

$$\begin{cases} -\dot{\alpha} \sin \alpha - \dot{\beta} \sin \beta = -\dot{c} \\ a\dot{\alpha} \cos \alpha + b\dot{\beta} \cos \beta = \dot{d} \end{cases} \rightarrow \dot{C}, \dot{\beta} = f(\alpha, \dot{\alpha}) = f(x, \dot{x})$$

$$\dot{\alpha} = \frac{\dot{x}}{R}$$

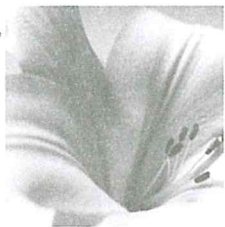
Acc

$$ia\ddot{\alpha}e^{i\alpha} - a\dot{\alpha}^2e^{i\alpha} + ib\ddot{\beta}e^{i\beta} - b\dot{\beta}^2e^{i\beta} = -\ddot{c}$$

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \left\{ \begin{array}{l} -\ddot{\alpha} \sin \alpha - \dot{\alpha}^2 \cos \alpha - \ddot{\beta} \sin \beta + \dot{\beta}^2 \cos \beta = -\ddot{c} \\ \dot{\alpha} \dot{c} \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \sin \alpha + \dot{\beta} \dot{c} \cos \beta - \dot{\beta}^2 \sin \beta = \dot{d} \end{array} \right. \end{cases} \rightarrow \ddot{C} = f(\alpha, \dot{\alpha})$$

$$\alpha = x$$

$$= f(x, \dot{x})$$



ANTAS

ANTAS Srl Società a Socio Unico

Via Vittime della Strada, 2 | Località Gragnanino | 29010 Gragnano Trebbiense (PC)

P.IVA 02126260062

Tel. +39.0523.785111 | Fax +39.0523.1580031

antas@pec.antas.org

www.antas.org

③

$$\vec{V}_G = \vec{V}_P + \dot{\beta} \vec{K} \wedge (G-P)$$

$$\begin{aligned} \vec{V}_P &= \vec{V}_B + \dot{\alpha} \vec{K} \wedge (P-B) = \dot{x} \vec{i} + \dot{\alpha} \vec{K} \wedge (\dot{\alpha} \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}) \\ &= (\dot{x} - \dot{\alpha} \sin \alpha) \vec{i} + (\dot{\alpha} \cos \alpha) \vec{j} \end{aligned}$$

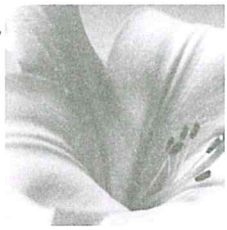
$$\vec{V}_G = \vec{V}_P + \dot{\beta} \vec{K} \wedge \left(\frac{|PQ|}{2} (\cos \beta \vec{i} + \sin \beta \vec{j}) \right) =$$

$$\vec{V}_G = (\dot{x} - \dot{\alpha} \sin \alpha - \frac{|PQ|}{2} \dot{\beta} \sin \beta) \vec{i} + (\dot{\alpha} \cos \alpha + \frac{|PQ|}{2} \dot{\beta} \cos \beta) \vec{j}$$

$$\vec{\omega}_G = \vec{\omega}_P + \ddot{\beta} \vec{K} \wedge (G-P) - \dot{\beta}^2 (G-P)$$

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_P &= \underbrace{\ddot{\alpha}}_{\dot{\alpha} = \dot{\omega}} \vec{K} \wedge (P-B) - \dot{\alpha}^2 (P-B) = (-\dot{\alpha}^2 \cos \alpha) \vec{i} + (-\dot{\alpha}^2 \sin \alpha) \vec{j} \\ &\quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ &\quad \dot{\alpha} \quad \quad \quad \dot{\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_G &= (-\dot{\alpha}^2 \cos \alpha - \frac{|PQ|}{2} \ddot{\beta} \sin \beta - \frac{|PQ|}{2} \dot{\beta}^2 \cos \beta) \vec{i} + \\ &\quad (-\dot{\alpha}^2 \sin \alpha + \frac{|PQ|}{2} \ddot{\beta} \cos \beta - \frac{|PQ|}{2} \dot{\beta}^2 \sin \beta) \vec{j} \end{aligned}$$



ANTAS

ANTAS Srl Società a Socio Unico

Via Vittime della Strada, 2 | Località Gragnanino | 29010 Gragnano Trebbiense (PC)

P.IVA 02126260062

Tel. +39.0523.785111 | Fax +39.0523.1580031

antas@pec.antas.org

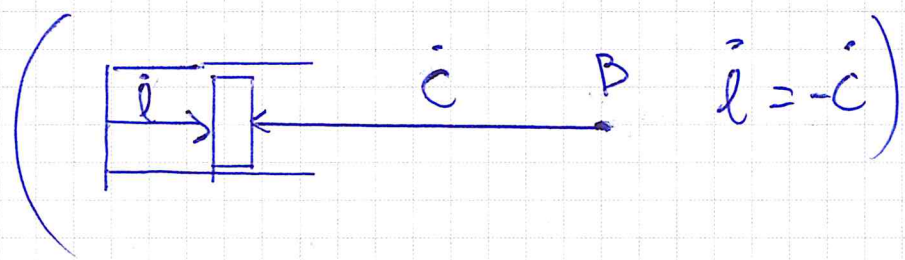
www.antas.org

④

③ Bilancio POT

$$W_A + W_R = \frac{dE_C}{dt}$$

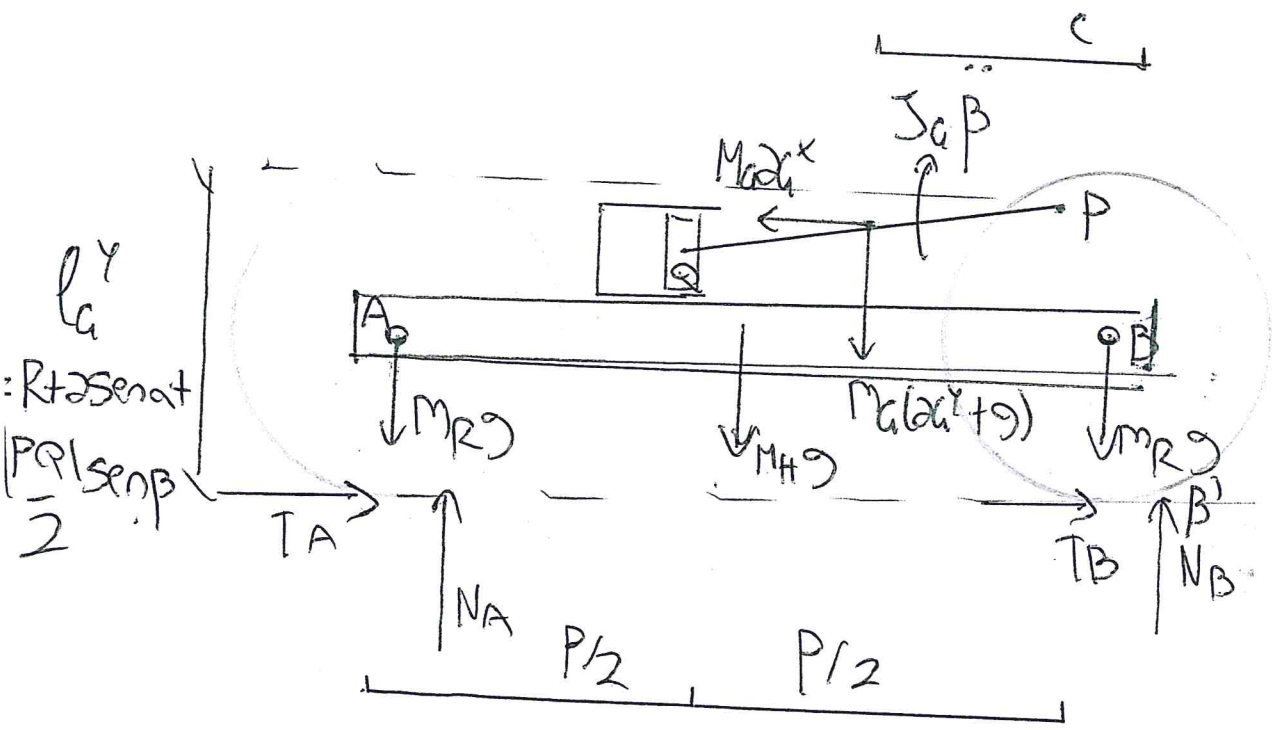
$$W_A = m_G \bar{g} \cdot \bar{v}_G + P \frac{S^2}{L} \bar{l} = -m_G g v_G^y + \frac{P S^2}{L} (-\dot{c})$$



$$W_R = -f_v R |W_A| |W| - f_v R |W_B| |W|$$

$$\frac{dE_C}{dt} = 2m_p \underbrace{\dot{\omega} \omega}_{\varphi(\dot{\omega}=\dot{\varphi})} + m_H \underbrace{\ddot{x} \dot{x}}_{\varphi(\ddot{x}=\ddot{\varphi})} + m_G \partial_u \bar{v}_G + S_G \ddot{\beta} \dot{\beta} =$$

$$m_G (\partial_a^x v_a^x + \partial_a^y v_a^y) + S_G \ddot{\beta} \dot{\beta}$$



$(F_y = 0)$

$$N_A + N_B = (2m_R + m_H + m_G)g + m_G \ddot{\alpha} l_G$$

$(M_B = 0)$

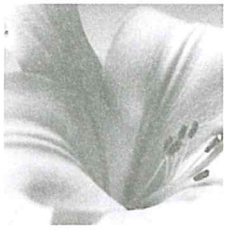
$$M_R g l_R + m_H g \left(\frac{P}{2} + l_{VR}\right) + M_R g (P + l_{VR}) - N_A P + m_G (\ddot{\alpha} l_G + g) \left(\frac{P}{2} + l_{VR}\right) + m_G \ddot{\alpha} (l_G) - J_G \ddot{\beta} = 0$$

↓
2 EQ 2 inc N_A, N_B

Eq Ris.

$$-m_G g V_{Gy} - \underbrace{\left(\frac{P}{2}\right)^2}_{J_G} \ddot{\alpha} - l_{VR} (N_B + N_A) \left|\frac{\dot{x}}{R}\right| = m_G (\ddot{\alpha} V_G^x + \dot{\alpha}^2 V_G^y) + J_G \ddot{\beta}$$

Ritorno (P)



ANTAS

ANTAS Srl Società a Socio Unico

Via Vittime della Strada, 2 | Località Gragnanino | 29010 Gragnano Trebbiense (PC)

P.IVA 02126260062

Tel. +39.0523.785111 | Fax +39.0523.1580031

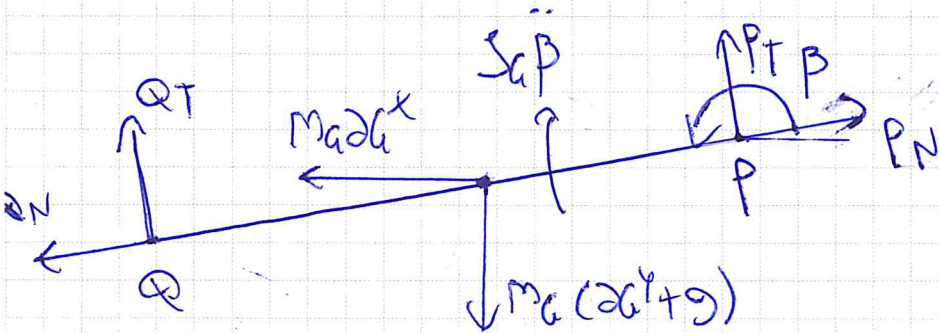
antas@pec.antas.org

www.antas.org

5

3

RBAZ 3

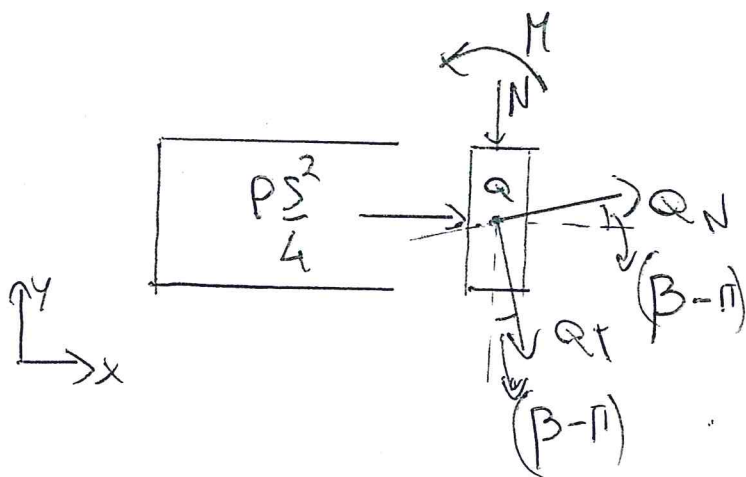


$$M_{P=0} = -Q_T |PQ| + \frac{|PQ|}{2} (\cos\beta \bar{i} + \sin\beta \bar{j}) \wedge (m_G \alpha^x \bar{i} + m(\alpha^y + g)(-\bar{j}))$$

$$-J_G \beta'' = 0$$

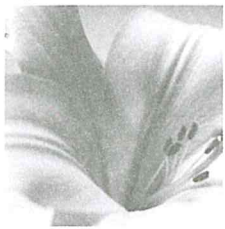
$$-Q_T |PQ| + \frac{|PQ|}{2} m (-\alpha^x \sin\beta - (\alpha^y + g) \cos\beta) - J_G \beta'' = 0$$

Q_T



$$F_x = R) \quad Q_N \cos(\beta - \pi) + Q_T \sin(\beta - \pi) + \frac{PS^2}{4} = R$$





ANTAS

ANTAS Srl Società a Socio Unico

Via Vittime della Strada, 2 | Località Gragnanino | 29010 Gragnano Trebbiense (PC)

P.IVA 02126260062

Tel. +39.0523.785111 | Fax +39.0523.1580031

antas@pec.antas.org

www.antas.org

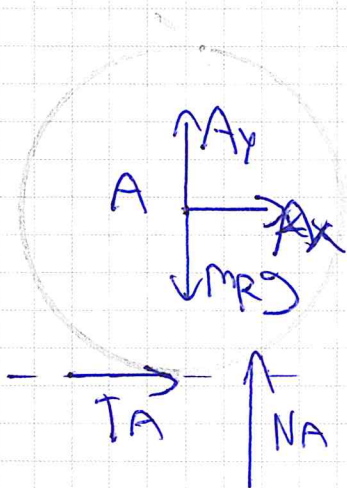
6

① VERIFICA A DERENZA

($F_x \rightarrow$ INTERO SISTEMA)

$$T_A + T_B - m g \partial q^k = 0 \quad \text{①}$$

APPO RUOTA POSTERIORE

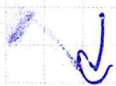


$$M_A = 0$$

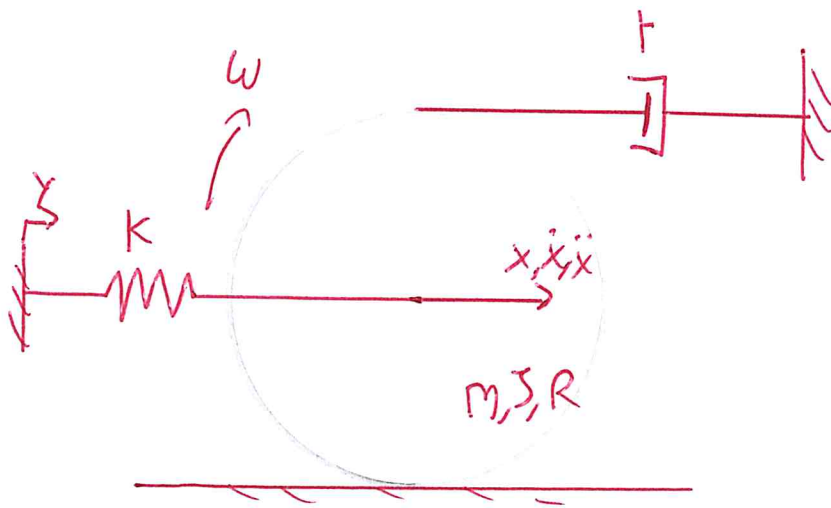
$$T_A R + N_A \cancel{4R} = 0$$

$$\underline{T_A = -N_A \cancel{4}} \quad \text{②}$$

2 EQ ZINCO T_A, P_B



$$|T_A| \leq \mu_s |N_A| \quad ; \quad |T_B| \leq \mu_s |N_B|$$



Ⓐ Eq LAGRANGE

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} \left(m + \frac{J}{R^2} \right) \dot{x}^2$$

$$\omega = \frac{\dot{x}}{R} \quad m^* = 1 \text{ kg} + \frac{m R^2}{2} = 1,5 \text{ kg}$$

$$V = \frac{1}{2} k \Delta l^2 = \frac{1}{2} k (x - y)^2 = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} k y^2 + k x y$$

100 N/m

$$D = \frac{1}{2} r \Delta l^2 = \frac{1}{2} r (-2\dot{x})^2 = \frac{4}{2} r \dot{x}^2 = \frac{1}{2} (4r) \dot{x}^2$$

$r^* = 20 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$

Eq Motion

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\delta L}{\delta x}^{\text{EXT}}$$

$$m^* \ddot{x} + r^* \dot{x} + kx - ky = 0$$

$$m^* \ddot{x} + r^* \dot{x} + kx = ky \Rightarrow \text{Eq Motion}$$

②

B)

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m^*}} = \sqrt{\frac{100}{1,5}} = 8,16 \text{ rad/s}$$

$$h = \frac{r^*}{2m^*\omega} = \frac{20}{2 \cdot 1,5 \cdot 8,16} = 0,82 \text{ (SOTTO SMORZIATO)}$$

C)

$$m^* \ddot{x} + r^* \dot{x} + kx = k y_0 \cos(\omega t)$$

RISPOSTA A REGIME

$$x_p(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$x_0 = \frac{k y_0}{k} = 0,048 \left(\omega = \frac{10}{8,16} = \cancel{123} \right)$$

$$\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 4\beta^2 h^2}$$

$$\varphi = \arctan\left(-\frac{2\beta h}{1-\beta^2}\right) = 75,7^\circ = \cancel{104,3} - 104,3^\circ$$

D)

FORZA A TERRA

$$F_R = r \dot{x} = r 2\dot{x} = 2r(x_0 \omega \sin(\omega t + \varphi))$$

$$|F_R| = 2r x_0 \omega = 4,8 \text{ N}$$

