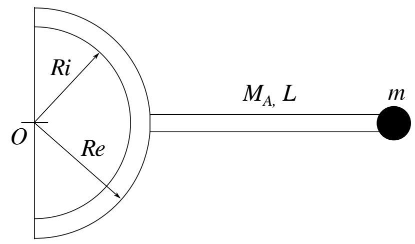
MECCANICA APPLICATA ALLE MACCHINE

Allievi meccanici AA.2014-2015 prova del 08-09-2015

Problema 1.1

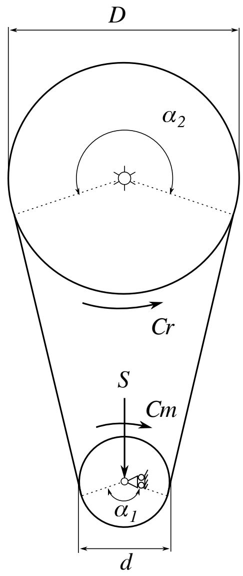
Calcolare il momento d'inerzia complessivo J_O del corpo rigido in figura costituito da una corona circolare omogenea ($\rho = 50\ Kg/m^3$) di spessore unitario avente raggio esterno $R_e = 100\ mm$, raggio interno $R_i = 75\ mm$ e da un'asta omogenea di massa $M_A = 10\ Kg$ e lunghezza $L = 150\ mm$ al cui estremo è presente una massa puntiforme $m = 2\ Kg$.



Problema 1.2

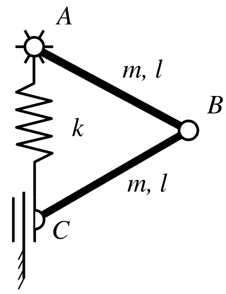
Il sistema di trasmissione a cinghia piana rappresentato in figura avviene tra due pulegge rispettivamente di diametro $d = 250\ mm$ e $D = 750\ mm$ con interasse $I = 2000\ mm$. Sapendo che sulla puleggia motrice di diametro d vengono applicati un pretensionamento $S = 500\ N$ ed una coppia motrice $C_m = 50\ Nm$ costanti, si richiede di:

1. calcolare gli angoli di avvolgimento α_1 e α_2 della cinghia sulle due pulegge;
2. calcolare la coppia resistente C_r considerando una potenza dissipata pari al 2% della potenza motrice dovuta ai giunti meccanici;
3. calcolare la velocità angolare ω_r nota la velocità angolare $\omega_m = 100\ rad/s$;
4. verificare l'aderenza noto il coefficiente d'attrito $f_s = 0.8$.



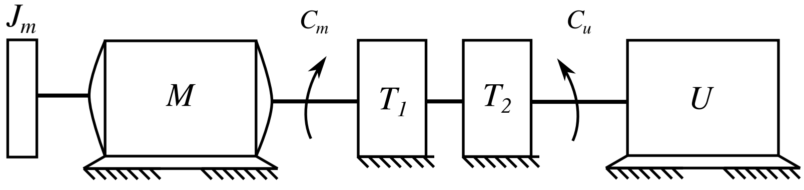
Problema 1.3

Dato il sistema in figura posizionato nel piano verticale, sapendo che la lunghezza e la massa dell'asta AB sono pari a quelle dell'asta BC, che la lunghezza indeformata della molla è pari a l, discutere le possibili posizioni di equilibrio.

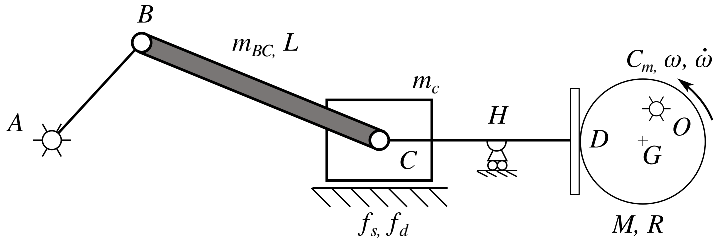


Problema 1.4

Dato il sistema MTU in figura essendo nota la caratteristica del motore $C_m = C_0(1 - \frac{\omega_m}{\omega_s})$ e sapendo che la coppia resistente dell'utilizzatore è pari a $C_u = K\omega_m$, calcolare la velocità a regime del motore sia numericamente che graficamente noti: $C_0 = 100\ Nm$, $\omega_s = 20\ rad/s$, $K = 50\ Nms/rad$, $Jm = 50\ Kgm^2$ e le caratteristiche delle trasmissioni $\eta_1 = 0.97$, $\tau_1 = 0.3$, $\eta_2 = 0.93$, $\tau_2 = 0.2$.



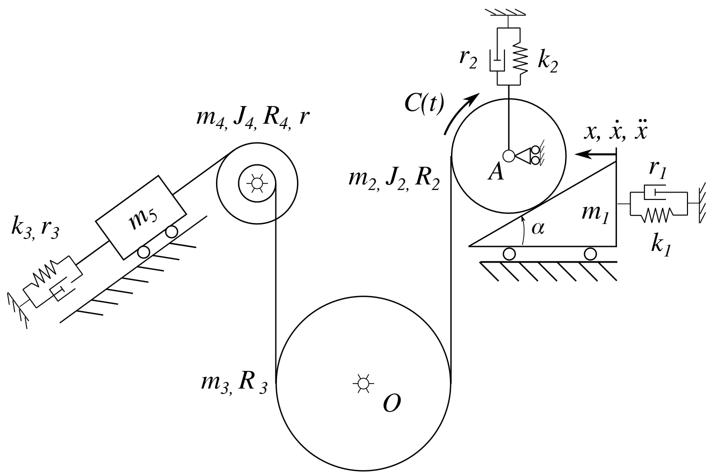
Problema 2



Il sistema in figura è posizionato nel piano verticale. Un eccentrico di massa M e raggio R è incernierato a terra in O. In D l'eccentrico è in contatto con un piattello (rotolamento senza strisciamento in assenza di attrito volvente), privo di massa, a sua volta vincolato a terra tramite il carrello in H e vincolato ad un corsoio di massa m_c ed altezza h tramite la cerniera in C. A sua volta il corsoio può scorrere su una guida scabra di coefficiente di attrito statico e dinamico f_s ed f_d. Un'asta BC di massa m_{BC} e lunghezza L è incernierata in C al corsoio e vincolata tramite una ulteriore cerniera all'asta AB a sua volta vincolata a terra in A. Nota la velocità e l'accelerazione di rotazione dell'eccentrico:

1. calcolare velocità $\vec{v}_C$ ed accelerazione $\vec{a}_C$;
2. calcolare la coppia C_m da applicare all'eccentrico per garantire il moto del sistema;
3. calcolare le reazioni vincolari in C.

Problema 3

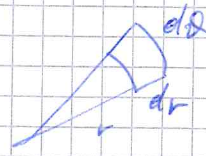


Il sistema rappresentato in figura è formato da un cuneo di massa m_1 con piano inclinato α, vincolato a terra tramite un gruppo molla-smorzatore (k_1, r_1), su cui rotola senza strisciare un disco di raggio R_2 e di proprietà inerziali m_2 e J_2 anch'esso vincolato a terra tramite una molla e uno smorzatore (k_2, r_2). Sul disco è applicata una coppia $C = C_0 e^{i2\Omega t}$. Sul suddetto disco si avvolge una fune inestensibile che aziona un ulteriore disco, vincolato a terra tramite una cerniera in O, di raggio R_3 e massa m_3 che permette il movimento del carrello di massa m_5 tramite una carrucola avente massa m_4 e momento d'inerzia J_4 movimentata a sua volta da funi inestensibili. Il carrello è posto su un piano inclinato di angolo β e vincolato a terra tramite un gruppo molla-smorzatore (k_3, r_3). Considerando come coordinata libera lo spostamento x e sapendo che il sistema è nella posizione di equilibrio statico, si richiede di:

1. scrivere l'equazione di moto del sistema;
2. ipotizzare i valori di massa, smorzamento e rigidezza equivalenti tale che il sistema risulti essere ipercritico e disegnare la risposta del sistema libero smorzato;
3. determinare la risposta del sistema forzato a regime;

1.1

$$J_{D_0} = \int_A \rho r^2 dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{R_i}^{R_e} \rho r^3 dr d\vartheta =$$



$$= \rho \pi \left(\frac{R_e^4 - R_i^4}{4} \right) = 2,7 \cdot 10^{-3} \ kg \ m^2$$

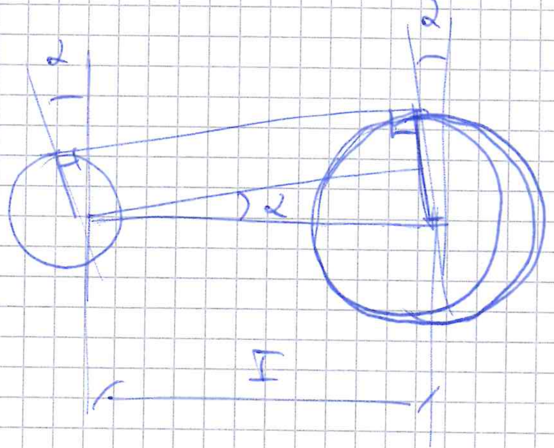
$$J_{AG} = \frac{M_A l^2}{12} = 0,01875$$

$$J_{A_0} = \frac{M_A l^2}{12} + M_A \left(\frac{L}{2} + R_e \right)^2 = 0,325$$

$$J_{m_0} = m (L + R_e)^2 = 0,125$$

$$J_{tot} = 0,4715$$

1.2



1) $\alpha = \arcsin \left(\frac{D-d}{2I} \right) = 0,1253 \text{ rad}$ $7,18°$

$\alpha_1 = \pi - 2\alpha = 165,64°$

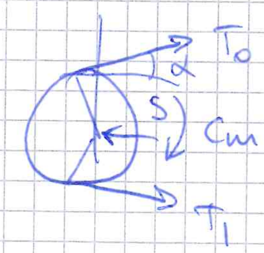
$\alpha_2 = \pi + 2\alpha = 194,36°$

$\tau = \frac{d}{D} = \frac{1}{3}$ $\qquad \eta = 1 - 2\%$

2) $\begin{cases} \eta C_m \omega_m = C_r \omega_u \\ \omega_u = \tau \omega_m \end{cases}$ $\qquad C_r = \eta \frac{C_m}{\tau} = 147 \text{ Nm}$

3) $\omega_u = \tau \omega_m = \frac{100}{3} \text{ rad/s}$

4)



$\frac{T_1}{T_0} < e^{f_s \alpha_1}$

$\begin{cases} (T_1 - T_0) R = C_m \\ (T_0 + T_1) \cos\alpha = S \end{cases}$

$T_1 = T_0 + \frac{C_m}{R}$

$$2T_0 = \frac{S}{\cos\alpha} - \frac{Gm}{R}$$

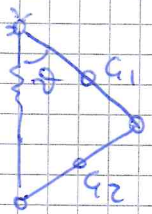
$$T_0 = \frac{S}{2\cos\alpha} - \frac{Gm}{2R} = 52\ N$$

$$T_1 = 451\ N$$

$$\frac{T_1}{T_0} < e^{f_s \alpha_1}$$

$$8,7 < 10,1$$

1.3



$$\delta L = \delta L_{G_1} + \delta L_{G_2} + \delta L_k = 0$$

$$\delta L_{G_1} = m\vec{g} \cdot \delta\vec{y}_{G_1} = -mg\frac{l}{2}\sin\vartheta$$

$$\vec{y}_{G_1} = \frac{l}{2}\sin\vartheta\,\vec{i} - \frac{l}{2}\cos\vartheta\,\vec{j}$$

$$\frac{\partial\vec{y}_{G_1}}{\partial\vartheta} = \frac{l}{2}\cos\vartheta\,\vec{i} + \frac{l}{2}\sin\vartheta\,\vec{j}$$

$$\delta L_{G_2} = m\vec{g} \cdot \delta\vec{y}_{G_2} = -\frac{3}{2}mg\,l\sin\vartheta$$

$$\vec{y}_{G_2} = \frac{l}{2}\sin\vartheta\,\vec{i} - \frac{3}{2}l\cos\vartheta\,\vec{j}$$

$$\frac{\partial\vec{y}_{G_2}}{\partial\vartheta} = \frac{1}{2}\cos\vartheta\,\vec{i} + \frac{3}{2}l\sin\vartheta\,\vec{j}$$

$$\delta L_k = k(L_0 - L)\,\delta L = k\left(l - 2l\cos\vartheta\right)\left(-2l\sin\vartheta\right)$$

$$L = 2l\cos\vartheta$$

$$\frac{\partial L}{\partial\vartheta} = -2l\sin\vartheta$$

$$-\cancel{2}mg\cancel{l\sin\vartheta} - \cancel{2l\sin\vartheta}\,k\left(l - 2l\cos\vartheta\right) = 0$$

$\sin\vartheta = 0 \Rightarrow \vartheta = 0 + k\pi \Rightarrow$ Sol instabile

$$k\left(2l\cos\vartheta - l\right) = mg$$

$$2lk\cos\vartheta - kl = mg \qquad \cos\vartheta = \frac{mg + kl}{2kl}$$

1.4

$$W_m = C_m \omega_m$$

$$W_p = -(1-\eta_1\eta_2)(C_m \omega_m - J_m \omega_m \dot{\omega}_m)$$

$$W_u = -k\omega_m \cdot \tau_1\tau_2 \omega_m$$

$$\frac{dE_c}{dt} = J_m \omega_m \dot{\omega}_m$$

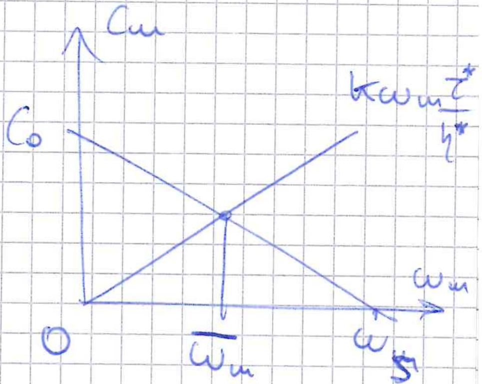
$$\begin{cases} \eta_1\eta_2 C_m \cancel{\omega_m} - k \cancel{\omega_m} \tau_1\tau_2 \omega_m = \eta_1\eta_2 J_m \cancel{\omega_m} \dot{\omega}_m \\ C_m = C_0\left(1 - \dfrac{\omega_m}{\omega_s}\right) \end{cases}$$

$$C_0\left(1 - \frac{\omega_m}{\omega_s}\right) - k\omega_m \frac{\tau_1\tau_2}{\eta_1\eta_2} = J_m \dot{\omega}_m = 0$$

$$C_0 - \frac{C_0}{\omega_s}\omega_m - k\omega_m \frac{\tau^*}{\eta^*} = 0$$

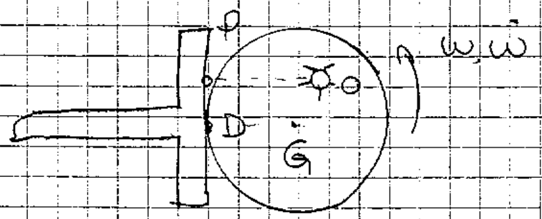
$$\omega_m\left(\frac{C_0}{\omega_s} + k\frac{\tau^*}{\eta^*}\right) = C_0$$

$$\overline{\omega_m} = \frac{C_0}{\dfrac{C_0}{\omega_s} + k\dfrac{\tau^*}{\eta^*}} = 12{,}01 \text{ rad/s}$$



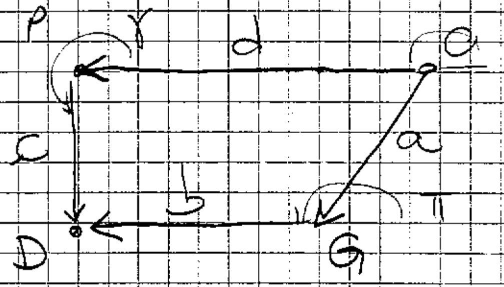
PROBLEMA 2

1) Chiusura OGDP $\rightarrow$ Sistema CAMMA A PIATTELLO



$\overline{OG}$ = eccentricità
$DG = R$

CAMMA STRISCIA SU PIATTELLO $\rightarrow$ pt D APPARTENENTE ALLA CAMMA HA UNA TRAIETTORIA DIVERSA DEL pt D APPARTENENTE AL PIATTELLO.



Cost	Var
$a = ecc$	$\dot{\alpha} = \omega$
$b = R$	$\dot{d} = V_{PIATTELLO}$
$\beta = \pi$	$\dot{c}$
$\delta = \pi$	
$\gamma = \frac{3}{4}\pi$	

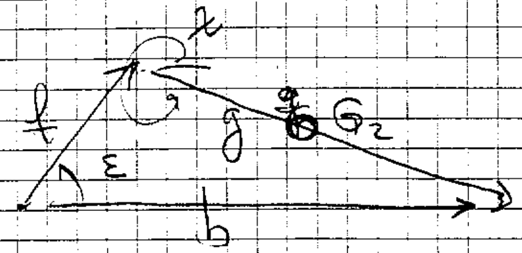
chiusura $\begin{cases} a\cos\alpha + b\cos\beta = c\cos\gamma + d\cos\delta \\ a\sin\alpha + b\sin\beta = c\sin\gamma + d\sin\delta \end{cases}$

$d/dt \rightarrow \begin{cases} -a\dot{\alpha}\sin\alpha = \dot{c}\cos\gamma + \dot{d}\cos\delta \\ a\dot{\alpha}\cos\alpha = c\dot{\gamma}\cos\gamma + \dot{d}\sin\delta \end{cases}$

-.-. trovo $\dot{d} = v_c \rightarrow \bar{v}_c = -\dot{d}\,\underline{i}$

$d/dt \rightarrow$ trovo $\ddot{d} = a_c \rightarrow \bar{a}_c = \bar{a}_c^t = -\ddot{d}\,\underline{i}$

2) chiusura ABC → sistema BIELLA - MANOVELLA



COST	VAR	
$f = AB$	$\dot{\varepsilon} = \omega_{AB}$	?
$g = L$	$\dot{\chi} = \omega_{BC}$	?
ANOMALA h	$\dot{h} = -d$	NOTO

⇒ 2ª chiusura → trovo $\omega_{AB}, \omega_{BC}, \dot{\omega}_{AB}, \dot{\omega}_{BC}$

$$\begin{cases} \bar{v}_{G_2} = \bar{v}_B + \bar{\omega}_{BC} \wedge (G_2 - B) = v_{G_2x}\,\underline{i} + v_{G_2y}\,\underline{j} \\ \bar{a}_{G_2} = \bar{a}_B + \dot{\bar{\omega}}_{BC} \wedge (G_2 - B) - \omega_{BC}^2 (G_2 - B) = a_{G_2x}\,\underline{i} + a_{G_2y}\,\underline{j} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{v}_G = \bar{\omega} \wedge (G - O) = v_{Gx}\,\underline{i} + v_{Gy}\,\underline{j} \\ \bar{a}_G = \dot{\bar{\omega}} \wedge (G - O) - \omega^2 (G - O) = \bar{a}_{Gn} + \bar{a}_{Gt} \end{cases}$$

$$\Pi = \cancel{m_C \bar{g} \times \bar{v}_C} + M\bar{g} \times \bar{v}_G + \bar{C}_m \times \bar{\omega} + m_{BC}\bar{g} \times \bar{v}_{G_2}$$

$$= -Mg\,v_{Gy} + C_m \omega - m_{BC}\,g\,v_{G_2y}$$

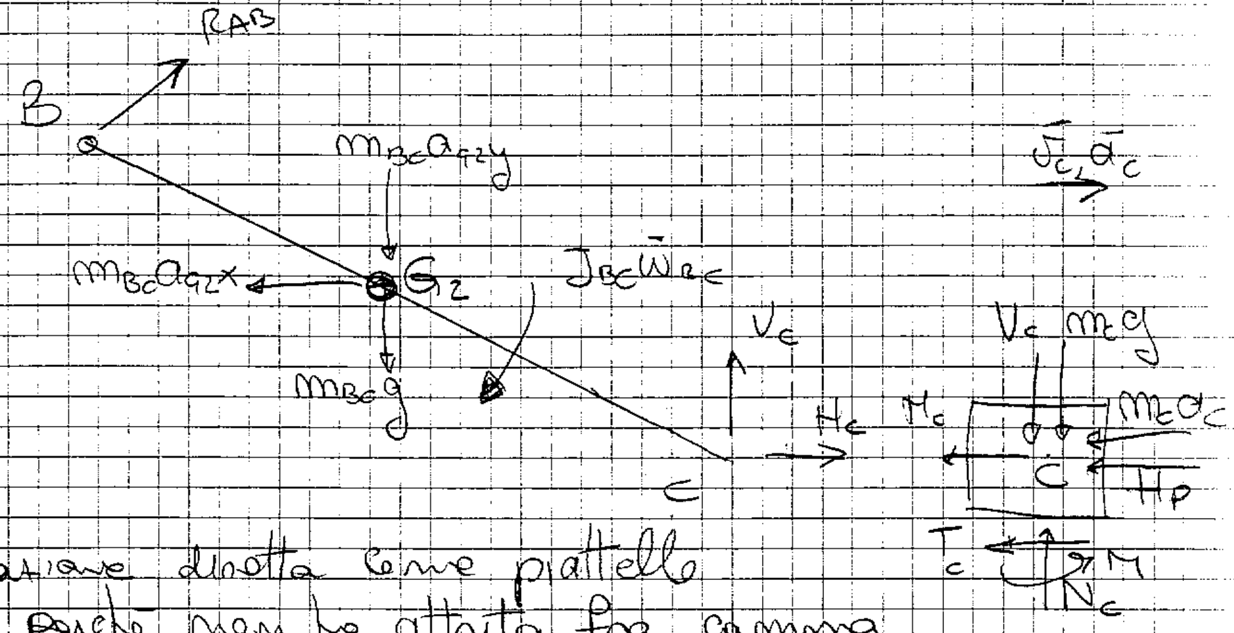
$$\Pi' = -T_C \cdot v_C = -f_d \cdot N_C \cdot v_C$$

$$E_C = \frac{1}{2} m_{BC} v_{G_2}^2 + \frac{1}{2} J_{BC} \omega_{BC}^2 + \frac{1}{2} m_C v_C^2 + \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} J \omega^2$$

$$\frac{dE_C}{dt} = m_C v_{G_2x} a_{G_2x} + m_{BC} v_{G_2y} a_{G_2y} + J_{BC}\omega_{BC}\dot{\omega}_{BC} + m_C v_C a_C + M v_G a_{Gt} + J\omega\dot{\omega}$$

→ $\Pi + \Pi' = \frac{dE_C}{dt}$ → Trovo C_m con T ricavato pt 3

(3)



H_P = reazione diretta come piattello
$V_P = \emptyset$ perché non ho attrito fra camma e piattello

→ asta CD lavora solo a compressione

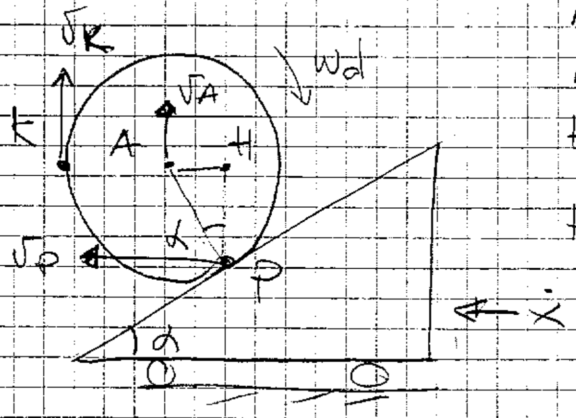
I) $\begin{cases} \Sigma M_C^{BC} = \emptyset \rightarrow R_{AB} \\ \Sigma F_x^{BC} \\ \Sigma F_y^{BC} \Rightarrow V_C, H_C \end{cases}$

II) $\Sigma F_y^{m_C} \Rightarrow N_C \Rightarrow T_C = f_d \cdot N_C$

III) $\Sigma F_x^{m_C} \Rightarrow H_P$

PROBLEMA 3

1)



$AP = R$

$AH = R\sin\alpha$

$HP = R\cos\alpha$

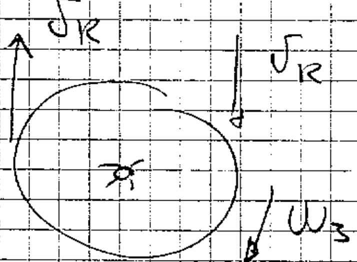
$H = $ CIR del DISCO

$$v_P = \dot{x} = \omega_d R\cos\alpha \rightarrow \omega_d = \frac{\dot{x}}{R\cos\alpha}$$

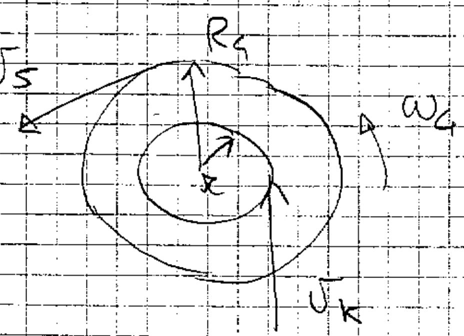
$$v_A = \omega_d \cdot R\sin\alpha = \dot{x}\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

$$v_K = \bar{\omega}_d \wedge (K-H) = \omega_d \cdot (R + R\sin\alpha)$$

$$= \frac{\dot{x}}{R\cos\alpha} \cdot (R + R\sin\alpha) = \dot{x} \cdot \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

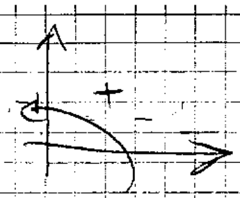


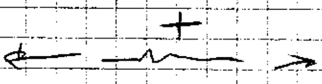
$$v_K = \omega_3 \cdot R_3 \rightarrow \omega_3 = \frac{\dot{x}}{R_3} \cdot \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$$



$$v_K = \omega_4 \cdot r \rightarrow \omega_4 = \frac{\dot{x}}{r} \cdot \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$v_5 = \frac{\dot{x} \cdot R_4}{r} \cdot \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$$





	$\dot{x}$
v_1	-1
v_A	$tg\alpha$
ω_A	$-1/R\cos\alpha$
ω_3	$\frac{1}{R_3}\frac{1+\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$
ω_4	$-\frac{1}{r}\frac{1+\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$
v_5	$\frac{R_4}{r}\frac{1+\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

	x
Δl_1	$+1$
Δl_2	$-tg\alpha$
Δl_3	$\frac{R_4}{r}\frac{1+\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

	δx
$\delta\omega$	$+1/R\cos\alpha$

$$E_c = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 tg^2\alpha + J_2\frac{1}{R^2\cos^2\alpha} + J_3\frac{1}{R_3^2}\left(\frac{1+\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 + J_4\frac{1}{r^2}\left(\frac{1+\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 + m_5\frac{R_4^2}{r^2}\left(\frac{1+\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right)^2\right)\dot{x}^2$$

$$V_{el} = \frac{1}{2}\left(k_1 + k_2 tg^2\alpha + k_3\frac{R_4^2}{r^2}\left(\frac{1+\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right)^2\right)x^2$$

$$D = \frac{1}{2}\left(r_1 + r_2 tg^2\alpha + r_3\frac{R_4^2}{r^2}\left(\frac{1+\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right)^2\right)\dot{x}^2$$

$$\delta^* L = C_m(t)\frac{1}{R\cos\alpha}\delta^* x$$

$$\Rightarrow \text{Lagrange} \Rightarrow m^*\ddot{x} + r^*\dot{x} + k^* x = \frac{C_m(t)}{R\cos\alpha} = C^*(t)$$