MECCANICA APPLICATA ALLE MACCHINE

Allievi meccanici AA.2012-2013 prova del 10-01-2014

Problema 1.1

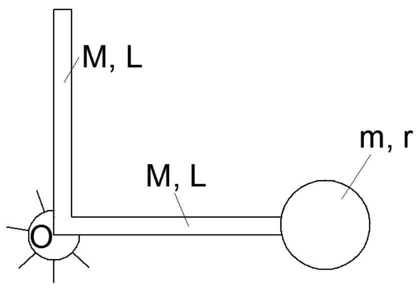
Dati i seguenti vettori velocità $\vec{V}$ ed accelerazione $\vec{a}$, calcolare le componenti di accelerazione tangenziale e normale.

$$\vec{V} = 5\sqrt{3}\,\vec{\imath} + 5\,\vec{\jmath}$$

$$\vec{a} = 2\,\vec{\imath} + 2\sqrt{3}\,\vec{\jmath}$$

Problema 1.2

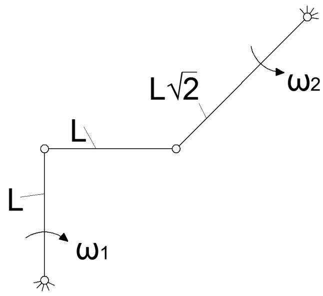
Calcolare il momento d'inerzia complessivo J_O, corrispondente al centro della cerniera a terra, del corpo rigido mostrato in figura. Il corpo è costituito da un insieme di aste omogenee di massa *M* e lunghezza *L* e di un disco omogeneo di massa *m* e raggio *r*.



M = 2 kg
L = 1 m
m = 3 kg
r = 0.5 m

Problema 1.3

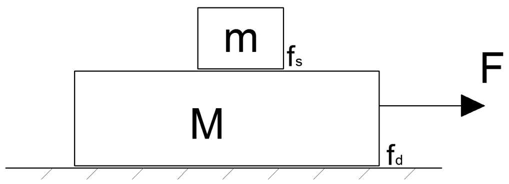
Dato il sistema in figura, individuare la posizione del CIR nell'atto di moto considerato e, sfruttando tale informazione, calcolare poi il rapporto tra le due velocità angolari ω_1 e ω_2.



Problema 1.4

Dato il sistema di corpi rigidi in figura, calcolare la massima forza *F* applicabile al sistema senza che si verifichi moto relativo tra le masse *m* ed *M* (scivolamento della massa *m* sulla massa *M*).

$$m = 1\,kg \quad f_s = 0.8$$
$$M = 5\,kg \quad f_d = 0.3$$

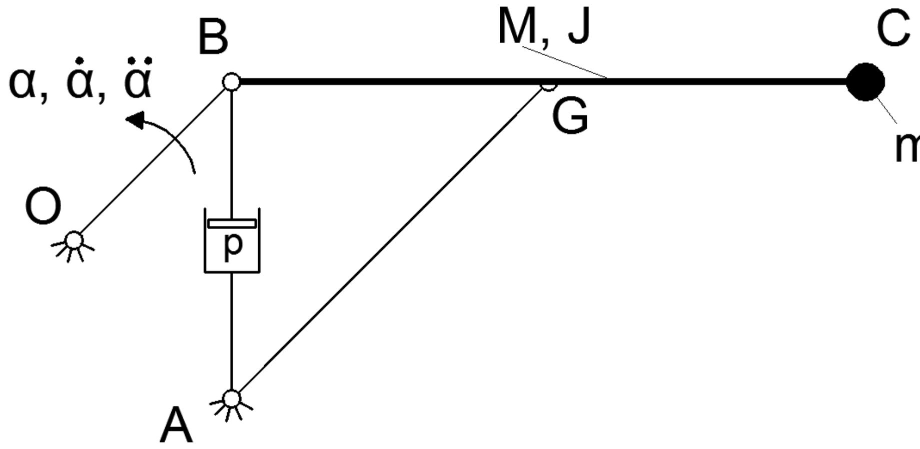


Problema 2

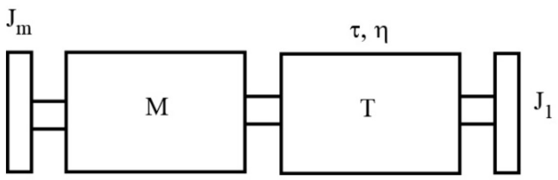
Il sistema in figura è posto nel piano verticale. L'asta OB è incernierata a terra in corrispondenza della cerniera O, è priva di massa e di essa sono note le grandezze cinematiche: $\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}$. In B vi è una cerniera mobile che collega le aste OB, BC e AB. L'asta BC, con baricentro G, è dotata di massa M e momento baricentrico J. All'estremità C si trova una massa concentrata m. L'asta AG è un'asta priva di massa e si collega all'asta BC tramite una cerniera mobile posta in G, mentre in A vi è una cerniera a terra. Tra gli estremi A e B si trova un attuatore in grado di modificare la lunghezza del segmento AB al variare della pressione interna p. Tutte le grandezze geometriche sono note nell'atto di moto considerato. Si richiede di calcolare:

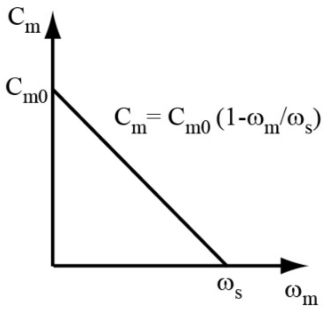
1. Modulo, direzione e verso dei vettori velocità ed accelerazione relativa del pistone.
2. Modulo, direzione e verso dei vettori velocità ed accelerazione del punto C.
3. La pressione p necessaria a garantire il moto.
4. Le reazioni vincolari in B, considerando l'asta BC.

MECCANICA APPLICATA ALLE MACCHINE
Allievi meccanici AA.2012-2013 prova del 10-01-2014

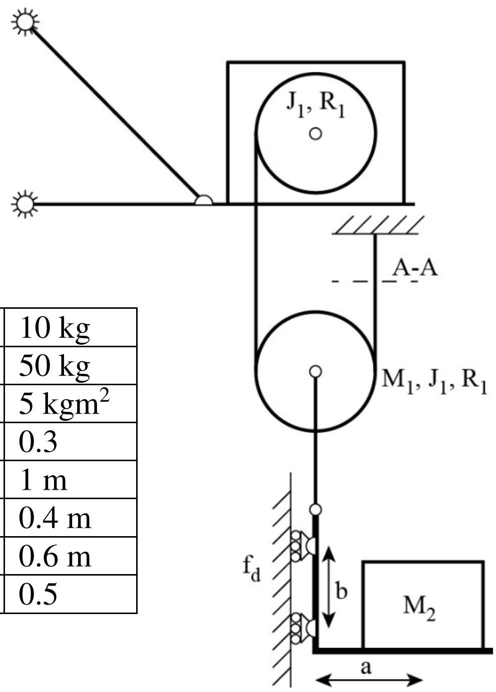


Problema 3



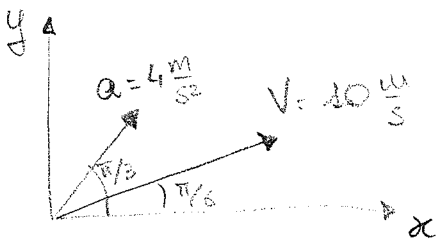


M_1	10 kg
M_2	50 kg
J_1	5 kgm^2
f_d	0.3
R_1	1 m
a	0.4 m
b	0.6 m
τ	0.5

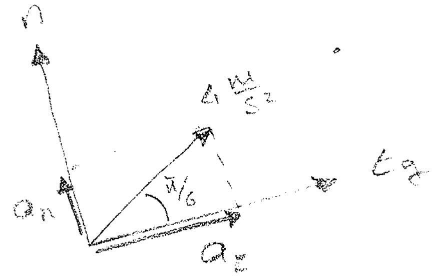


L'impianto di sollevamento rappresentato in figura è movimentato da un motore con curva caratteristica nota, collegato ad una trasmissione con rendimento η_d=η_r=η e rapporto di trasmissione τ. All'uscita della trasmissione è collegata una puleggia di momento di inerzia baricentrico J_1 e raggio R_1. Sulla puleggia si avvolge senza strisciare una fune inestensibile che si avvolge su un'ulteriore puleggia con massa M_1, momento di inerzia baricentrico J_1 e raggio R_1. L'estremità della fune è poi vincolata a terra.
Un'altra fune collega il centro della seconda puleggia ad una slitta a L con caratteristiche di massa trascurabili, vincolata al piano verticale con due carrelli. Con tale dispositivo si solleva un carico di massa M_2.
Si consideri un coefficiente di attrito radente pari a f_d nei vincoli tra la slitta a L e il piano verticale.
Discutere per ciascun punto la condizione di moto diretto o retrogrado, sostituendo, quando necessario, i numeri forniti.
1) Nel caso di massa M_2 in salita, si determini la velocità di salita della massa M_2 in condizione di regime.
2) Considerando la massa M_2 in discesa, calcolare il valore della coppia frenante C_f, applicata lato motore, che garantisca una decelerazione della massa M_2 pari a 1 m/s^2, nel caso in cui il motore sia elettricamente staccato.
3) Si calcoli il tiro della fune nella sezione A-A nelle condizioni del punto 2.

Problema 1.1



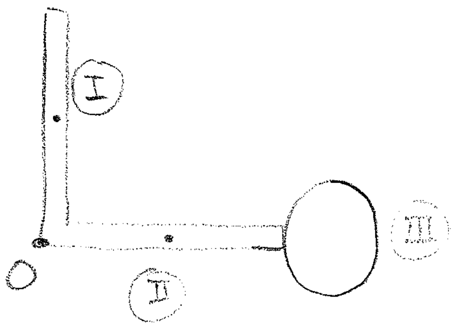
$\Rightarrow$



$$|\vec{a}_t| = 4\cos\frac{\pi}{6} = 4\frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{2\sqrt{3}\ \frac{m}{s^2}}$$

$$|\vec{a}_n| = 4\sin\frac{\pi}{6} = 4\frac{1}{2} = \boxed{2\ \frac{m}{s^2}}$$

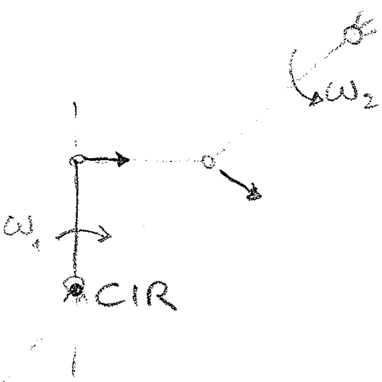
Problema 1.2

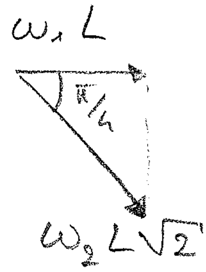


$$J_O = \left[\frac{M L^2}{12} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2\right]\cdot 2 + \frac{m r^2}{2} + m(L+r)^2$$

$$= \boxed{8{,}46\ \text{Kg m}^2}$$

Problema 1.3

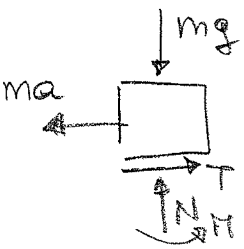




$$\Rightarrow \omega_2 L\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \omega_1 L$$

$$\boxed{\frac{\omega_2}{\omega_1} = 1}$$

Problema 1.4

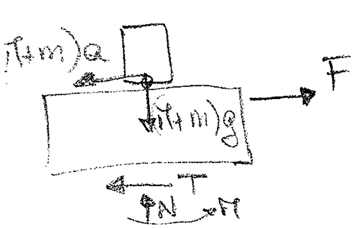


condizione limite: $|\vec{T}| = f_s|\vec{N}| = f_s mg$

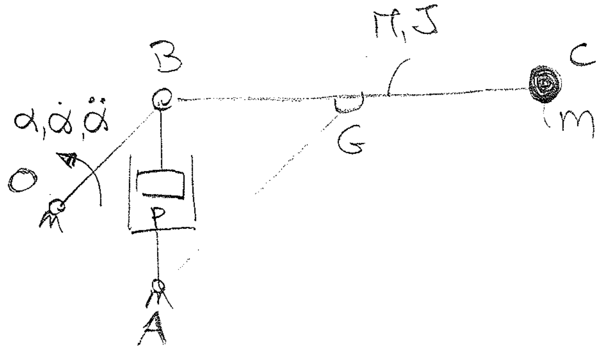
$T = ma \Rightarrow a = f_s g = 7{,}85\ \frac{m}{s^2}$

$$\begin{cases} F = (M+m)a + T \\ T = f_d N = f_d (M+m)g \end{cases} \Rightarrow F = (M+m)(a + f_d g)$$

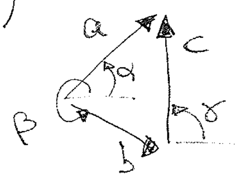
$$= \boxed{64{,}75\ N}$$



Problema 2



1)



$$a e^{i\alpha} = b e^{i\beta} + c e^{i\gamma}$$

C	V
a	$\alpha \rightarrow$ moto
b, β	
	c, γ

$$\begin{cases} a\cos\alpha = b\cos\beta + c\cos\gamma \\ a\sin\alpha = b\sin\beta + c\sin\gamma \end{cases}$$

$\downarrow d/dt$

$$\begin{cases} -a\dot\alpha\sin\alpha = \dot c\cos\gamma - c\dot\gamma\sin\gamma \\ a\dot\alpha\cos\alpha = \dot c\sin\gamma + c\dot\gamma\cos\gamma \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot c \\ \dot\gamma \end{cases}$$

$\downarrow d/dt$

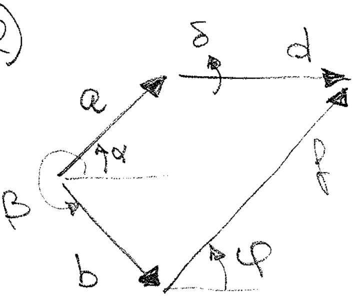
$$\begin{cases} -a\ddot\alpha\sin\alpha - a\dot\alpha^2\cos\alpha = \ddot c\cos\gamma - 2\dot c\dot\gamma\sin\gamma - c\ddot\gamma\sin\gamma - c\dot\gamma^2\cos\gamma \\ a\ddot\alpha\cos\alpha - a\dot\alpha^2\sin\alpha = \ddot c\sin\gamma + 2\dot c\dot\gamma\cos\gamma + c\ddot\gamma\cos\gamma - c\dot\gamma^2\sin\gamma \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \ddot c \\ \ddot\gamma \end{cases}$$

Nell'atto di moto considerato:

$\dot c \underset{\delta}{\rightarrow}$ = Vel. relativa attuatore

$\ddot c \underset{\delta}{\rightarrow}$ = acc. relativa attuatore

2)



$$a e^{i\alpha} + d e^{i\delta} = b e^{i\beta} + f e^{i\varphi}$$

C	V
a	$\alpha \rightarrow$ moto
b, β	
d	δ
f	φ

$$\begin{cases} a\cos\alpha + d\cos\delta = b\cos\beta + f\cos\varphi \\ a\sin\alpha + d\sin\delta = b\sin\beta + f\sin\varphi \end{cases}$$

$\downarrow d/dt$

$$\begin{cases} -a\dot\alpha\sin\alpha - d\dot\delta\sin\delta = -f\dot\varphi\sin\varphi \\ a\dot\alpha\cos\alpha + d\dot\delta\cos\delta = f\dot\varphi\cos\varphi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot\delta \\ \dot\varphi \end{cases}$$

$\downarrow d/dt$

$$\begin{cases} -a\ddot\alpha\sin\alpha - a\dot\alpha^2\cos\alpha - d\ddot\delta\sin\delta - d\dot\delta^2\cos\delta = -f\ddot\varphi\sin\varphi - f\dot\varphi^2\cos\varphi \\ a\ddot\alpha\cos\alpha - a\dot\alpha^2\sin\alpha + d\ddot\delta\cos\delta - d\dot\delta^2\sin\delta = f\ddot\varphi\cos\varphi - f\dot\varphi^2\sin\varphi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \ddot\delta \\ \ddot\varphi \end{cases}$$

$$\vec{V}_C = \vec{V}_G + \vec{\omega}_{BC} \wedge (C-G)$$

$$= (-\rho\dot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{i} + \rho\dot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{j}) + \dot{\delta}\vec{K} \wedge (l\cos\delta\,\vec{i} + l\sin\delta\,\vec{j})$$

$$= (-\rho\dot{\varphi}\sin\varphi - l\dot{\delta}\sin\delta)\vec{i} + (\rho\dot{\varphi}\cos\varphi + l\dot{\delta}\cos\delta)\vec{j} = \boxed{V_{Cx}\vec{i} + V_{Cy}\vec{j}}$$

con $l = \overline{GC}$

$$\vec{a}_C = \vec{a}_G + \vec{\dot{\omega}}_{BC} \wedge (C-G) - \omega_{BC}^2 (C-G)$$

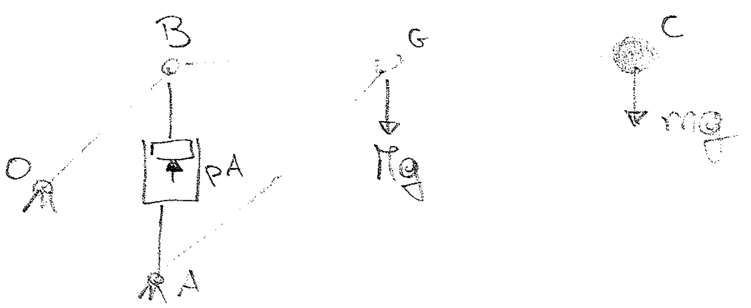
$$= (-\rho\ddot{\varphi}\sin\varphi - \rho\dot{\varphi}^2\cos\varphi)\vec{i} + (\rho\ddot{\varphi}\cos\varphi - \rho\dot{\varphi}^2\sin\varphi)\vec{j} +$$

$$+ \ddot{\delta}\vec{K} \wedge (l\cos\delta\,\vec{i} + l\sin\delta\,\vec{j}) - \dot{\delta}^2(l\cos\delta\,\vec{i} + l\sin\delta\,\vec{j})$$

$$= (-\rho\ddot{\varphi}\sin\varphi - \rho\dot{\varphi}^2\cos\varphi - l\ddot{\delta}\sin\delta - l\dot{\delta}^2\cos\delta)\vec{i} +$$

$$+ (\rho\ddot{\varphi}\cos\varphi - \rho\dot{\varphi}^2\sin\varphi + l\ddot{\delta}\cos\delta - l\dot{\delta}^2\sin\delta)\vec{j} = \boxed{a_{Cx}\vec{i} + a_{Cy}\vec{j}}$$

5)



$$W_{att} + W_{reatt} = \frac{dE_c}{dt}$$

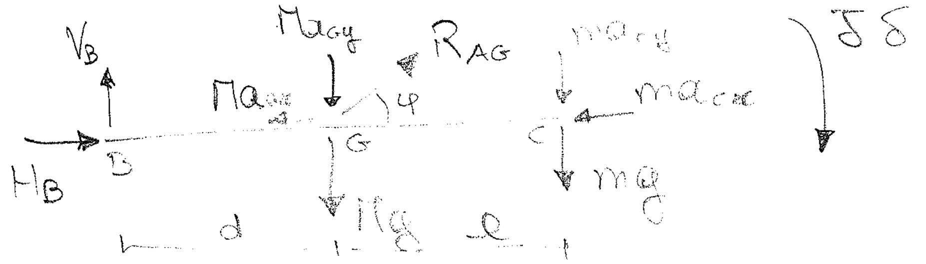
$$W_{att} = p\vec{A} \cdot \dot{c}\,\vec{j} + M\vec{g} \cdot \vec{V}_G + m\vec{g} \cdot \vec{V}_C$$

$$= pA\dot{c} - Mg V_{Gy} - mg V_{Cy}$$

$$\frac{dE_c}{dt} = M V_{Gx} a_{Gx} + M V_{Gy} a_{Gy} + J\dot{\delta}\ddot{\delta} + m V_{Cx} a_{Cx} + m V_{Cy} a_{Cy}$$

Metto insieme e ricavo (p)

4)



$$\Sigma F_H = 0$$

$$H_B - Ma_{Gx} + R_{AG}\cos\varphi - ma_{cx} = 0 \longrightarrow \boxed{H_B}$$

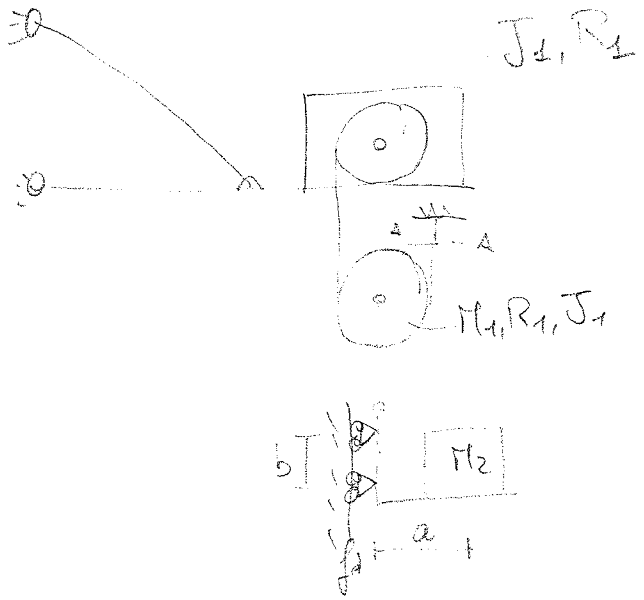
$$\Sigma F_V = 0$$

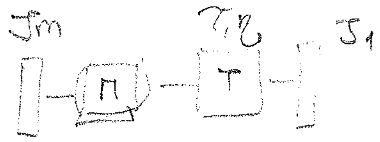
$$V_B - Ma_{Gy} - Mg + R_{AG}\sin\varphi - ma_{cy} - mg = 0 \longrightarrow R_{AG}$$

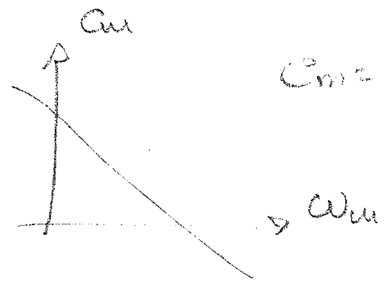
$$\Sigma M_G = 0 \quad (+)$$

$$-V_B\, d - m(a_{cy} + g)\,\ell - J\ddot{\delta} = 0 \longrightarrow \boxed{V_B}$$

Problema 3

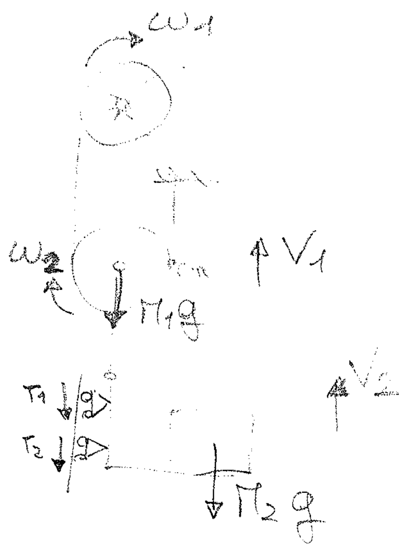






$$C_m = C_{m0}\left(1 - \frac{\omega_m}{\omega_s}\right)$$

1) $W_m + W_r + W_p = 0$ $\quad M_2 \uparrow$



$W_m = C_m \omega_m$

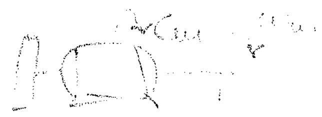
$W_r = M_1 \vec{g} \cdot \vec{V}_1 + M_2 \vec{g} \cdot \vec{V}_2 + \vec{T}_1 \cdot \vec{V}_2 + \vec{T}_2 \cdot \vec{V}_2$

legami cinematici:

$\omega_1 = \tau \omega_m$

$\omega_1 R_1 = \omega_2 \, 2R_1 \Rightarrow \omega_2 = \frac{\omega_1}{2} = \frac{\tau \omega_m}{2}$

$V_2 = \tau \frac{R_1}{2} \omega_m \qquad V_1 = V_2$

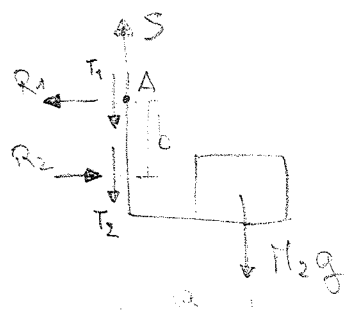


analizzo slitta:

$\Sigma F_H = 0 \Rightarrow R_1 = R_2$

$\Sigma M_A = 0$

$R_2 b = M_2 g a \Rightarrow R_2 = M_2 g \frac{a}{b}$



$$\begin{cases} T_1 = f_d R_1 \\ T_2 = f_d R_2 \end{cases} \Rightarrow T_1 = T_2 = f_d M_2 g \frac{a}{b}$$

$\Downarrow$

$$W_r = -M_1 g \tau \frac{R_1}{2}\omega_m - M_2 g \tau \frac{R_1}{2}\omega_m - 2 \cdot f_d M_2 g \frac{a}{b} \tau \frac{R_1}{2}\omega_m$$

$$= -\left(M_1 g + M_2 g + 2 f_d M_2 g \frac{a}{b}\right) \tau \frac{R_1}{2} \omega_m$$

analisi flusso potenza:

a regime $W_2 = W_r < 0$ $\Rightarrow$ MOTO DIRETTO

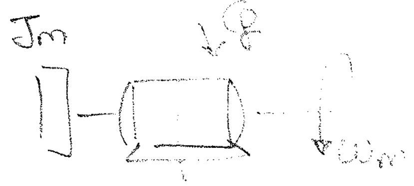
$$W_p = -(1-\eta_d) W_1 = -(1-\eta_d) C_m \omega_m$$

$$\cancel{C_m \omega_m} - \left(M_1 g + M_2 g + 2 f_d M_2 g \frac{a}{b}\right) \tau \frac{R_1}{2} \omega_m - (\cancel{1} - \eta_d) C_m \cancel{\omega_m} = 0$$

$$C_{m,reg} = \frac{\tau R_1}{2 \eta_d} \left(M_1 g + M_2 g + 2 f_d M_2 g \frac{a}{b}\right)$$

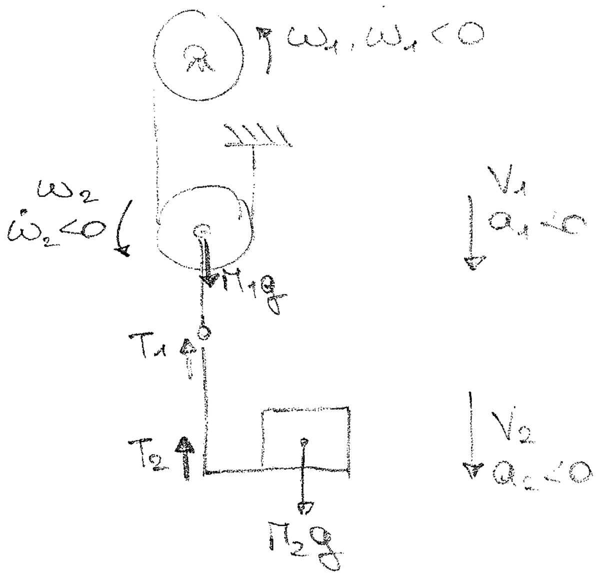
$$\omega_{m,reg} = \omega_s \left(1 - \frac{C_{m,reg}}{C_{m0}}\right) \Rightarrow \boxed{V_{2,reg} = \tau \frac{R_1}{2} \omega_{m,reg}}$$

2) $W_m + W_r + W_p = \frac{dE_c}{dt}$



$$W_m = -C_f \omega_m$$

$$W_r = M_1 g V_1 + M_2 g V_2 - T_1 V_2 - T_2 V_2$$



analizzo slitta:

$\Sigma F_{\parallel} = 0 \qquad R_1 = R_2$

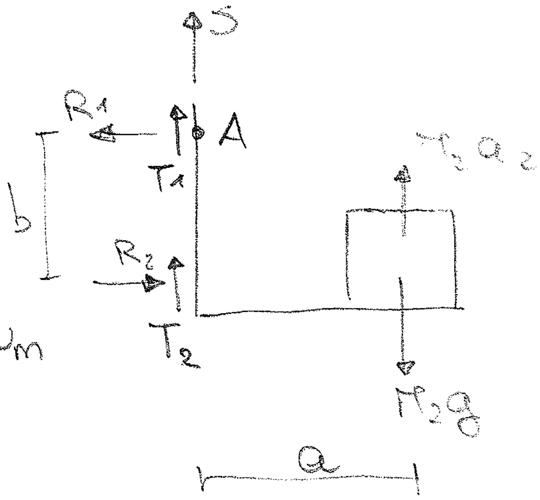
$\Sigma M_A = 0$

$$R_2 b - M_2(-a_2 + g) a = 0$$

$$R_2 = M_2(-a_2 + g) \frac{a}{b}$$

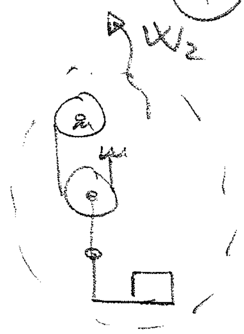
$$T_1 = T_2 = f_d R_1 = f_d M_2 (-a_2 + g) \frac{a}{b}$$

$\Downarrow$



$$W_r = \left[M_1 g + M_2 g - 2 f_d M_2 (-a_2 + g) \frac{a}{b}\right] \frac{\tau R_1}{2} \omega_m$$

analisi flusso potenza :



$$-W_2 + W_r = \frac{dE_{c2}}{dt}$$

$$E_{c2} = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} M_1 V_1^2 + \frac{1}{2} J_1 \omega_2^2 + \frac{1}{2} M_2 V_2^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[J_1 \tau^2 + M_1\left(\frac{\tau R_1}{2}\right)^2 + J_1\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 + M_2\left(\frac{\tau R_1}{2}\right)^2\right]\omega_m^2 = \frac{1}{2} J^* \omega_m^2$$

$$\frac{dE_{c2}}{dt} = J^* \omega_m \dot{\omega}_m$$

$$W_2 = +W_r - \frac{dE_{c2}}{dt}$$

$$= \left[(M_1+M_2)g - 2 f_d M_2(-a_2+g)\frac{a}{b}\right]\frac{\tau R_1}{2}\omega_m - J^* \omega_m \dot{\omega}_m$$

$$= 93{,}10\,\omega_m + 5{,}31\,\omega_m > 0 \Rightarrow$$ MOTO RETROGRADO

$$W_p = -(1-\eta_r)W_2$$

$$\frac{dE_c}{dt} = J_m \omega_m \dot{\omega}_m + J^* \omega_m \dot{\omega}_m$$

$$-C_f \dot{\omega}_m + \left[(M_1+M_2)g - 2 f_d M_2(a_2+g)\frac{a}{b}\right]\frac{\tau R_1}{2}\cancel{\omega_m} +$$

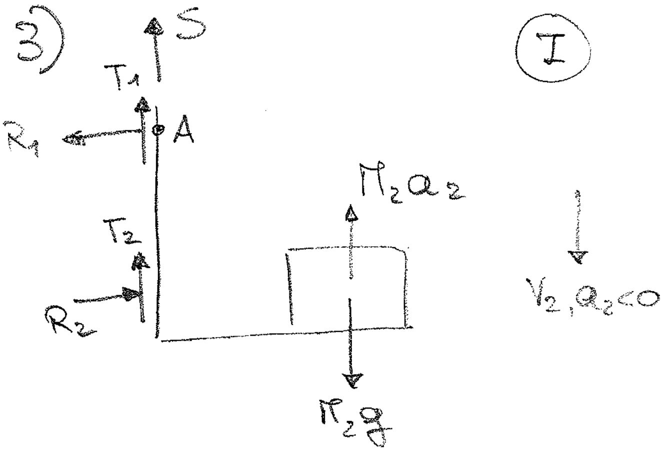
$$-\cancel{(1-\eta_r)}\left\{\left[(M_1+M_2)g - 2 f_d M_2(a_2+g)\frac{a}{b}\right]\frac{\tau R_1}{2}\cancel{\omega_m} - J^*\cancel{\omega_m}\dot{\omega}_m\right\} =$$

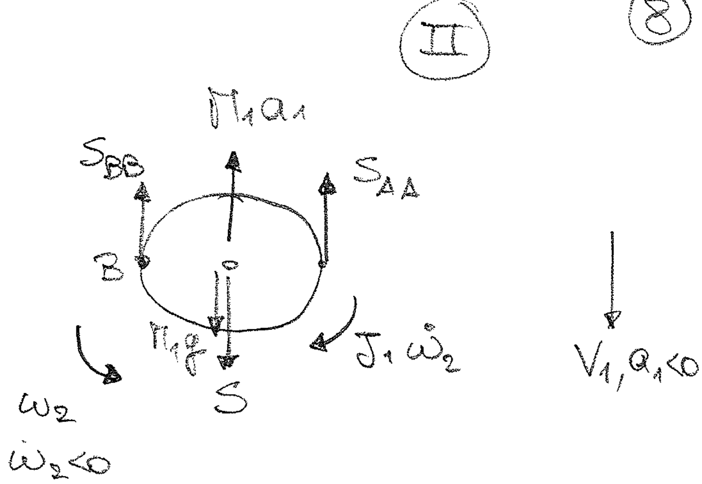
$$= J_m \cancel{\omega_m}\dot{\omega}_m + \cancel{J^* \omega_m}\dot{\omega}_m$$

$$\boxed{C_f = \eta_r\left[(M_1+M_2)g - 2 f_d M_2(a_2+g)\frac{a}{b}\right]\frac{\tau R_1}{2} - (\eta_r J^* + J_m)\dot{\omega}_m}$$

con $\dot{\omega}_m = \frac{2a_2}{R\tau_1} = -4 \ \frac{rad}{s^2}$

3)





Da I ricavo S:

$$\Sigma F_v = 0$$

$$S = M_2 g - M_2 a_2 - T_1 - T_2 = M_2 (g - a_2) - 2 f_d M_2 (g - a_2) \frac{a}{b}$$

$$= \left(1 - 2 f_d \frac{a}{b}\right) M_2 (g - a_2)$$

Da II ricavo S_{AA}:

$$\Sigma M_B = 0 \quad \circlearrowleft^{+}$$

$$(M_1 a_1 - M_1 g - S) R_1 + S_{AA} \cdot 2R_1 - J_1 \dot{\omega}_2 = 0$$

$$\boxed{S_{AA} = \frac{J_1 \dot{\omega}_2}{2R_1} - \frac{(M_1 a_1 - M_1 g - S)}{2}}$$