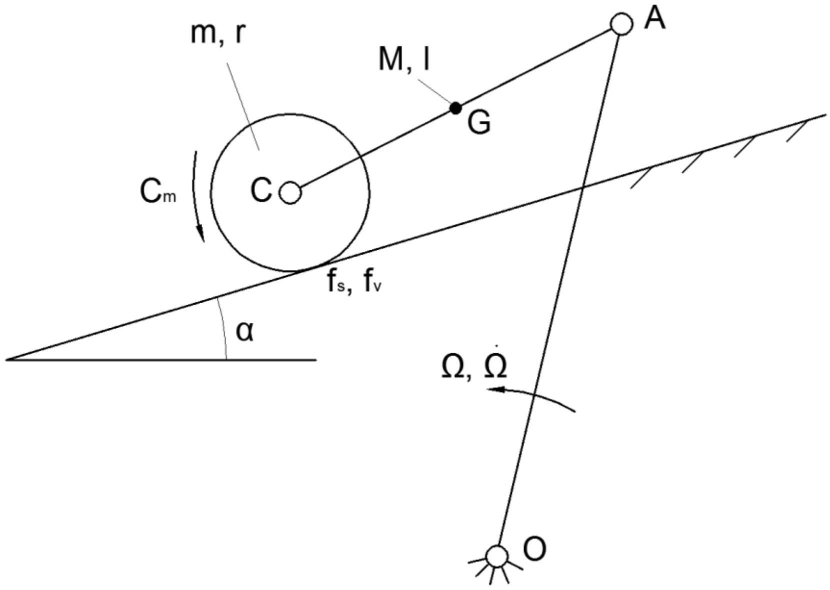
MECCANICA APPLICATA ALLE MACCHINE
Allievi meccanici AA.2011-2012 prova del 21-02-2013

Problema N.1

Il sistema meccanico illustrato in figura giace nel piano verticale. L'asta AO priva di massa è incernierata a terra in O e, nell'istante considerato, ruota con velocità angolare Ω e accelerazione angolare $\dot{\Omega}$ assegnate. Ad essa è collegata l'asta AC, avente baricentro G, massa M e lunghezza l, che, tramite la cerniera nel punto C, si collega ad un disco omogeneo di massa m e raggio r. Il disco è vincolato rotolare senza strisciare su una guida inclinata di un angolo α in condizioni; si consideri la resistenza al rotolamento (f_s e f_v assegnati). Sul disco è applicata una coppia C_m.
Nell'istante considerato e ritenendo note tutte le grandezze geometriche si chiede di determinare:

1) i vettori velocità ed accelerazione del baricentro G;
2) i vettori velocità angolare ed accelerazione angolare del disco di centro C;
3) il modulo della coppia C_m che garantisce l'atto di moto assegnato;
4) le reazioni vincolari in O e la verifica di aderenza del disco.

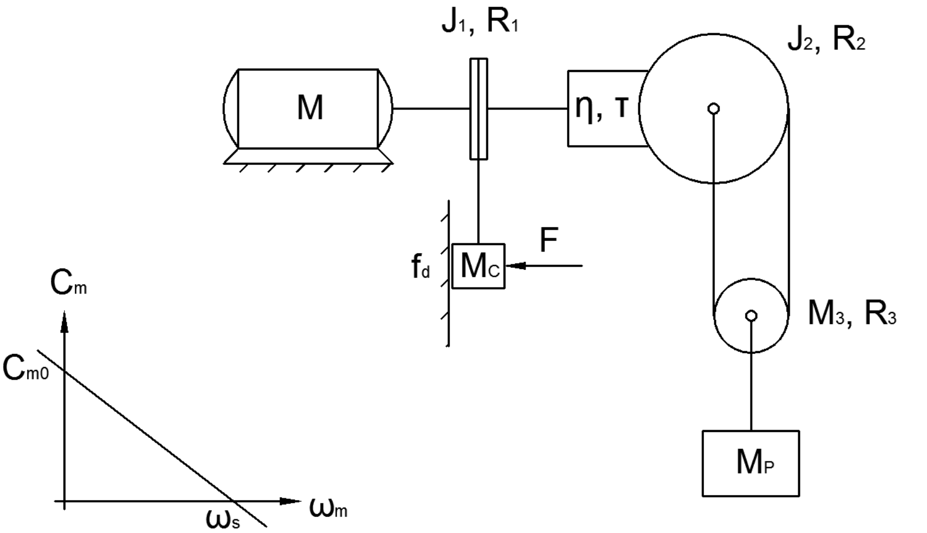


Problema N.2

Nella figura è rappresentato un impianto di sollevamento carichi. Il moto di sollevamento e discesa del carico è garantito da un motore elettrico di caratteristica nota. Sull'albero motore è rigidamente calettata una puleggia di raggio R_1 e momento d'inerzia J_1 (l'inerzia del motore è inclusa nel valore di J_1). Su tale puleggia si avvolge la fune inestensibile collegata al <u>contrappeso di massa M_c che si muove sempre in direzione opposta al moto del carico</u>. Il contrappeso M_c è vincolato a scorrere su un piano verticale (si consideri un coefficiente d'attrito dinamico f_d) e su di esso viene applicata una forza <u>F orizzontale che schiaccia il contrappeso contro la parete solo in caso di spegnimento del motore</u>.
A valle della puleggia, l'albero motore entra in una trasmissione caratterizzata da un rapporto di trasmissione τ e da un rendimento sia in moto diretto che retrogrado pari a η. La trasmissione mette a sua volta in moto un tamburo di raggio R_2 e momento d'inerzia J_2 sul quale si avvolge la fune alla quale è collegata una carrucola mobile di raggio $R_3=R_2/2$, massa M_3 e momento d'inerzia J_3.
Determinare i seguenti punti:

1) valore della velocità di discesa del carico M_P in condizione di moto a regime (M_C in salita);
2) valore di accelerazione in salita del carico M_P allo spunto (M_C in discesa);
3) considerando il <u>motore spento</u>, calcolare il valore della forza F da applicare perpendicolarmente al contrappeso M_C tale per cui l'accelerazione del carico M_P in discesa sia pari a 0.05 m/s^2 (considerare un coefficiente d'attrito dinamico pari a f_d).

MECCANICA APPLICATA ALLE MACCHINE
Allievi meccanici AA.2011-2012 prova del 21-02-2013

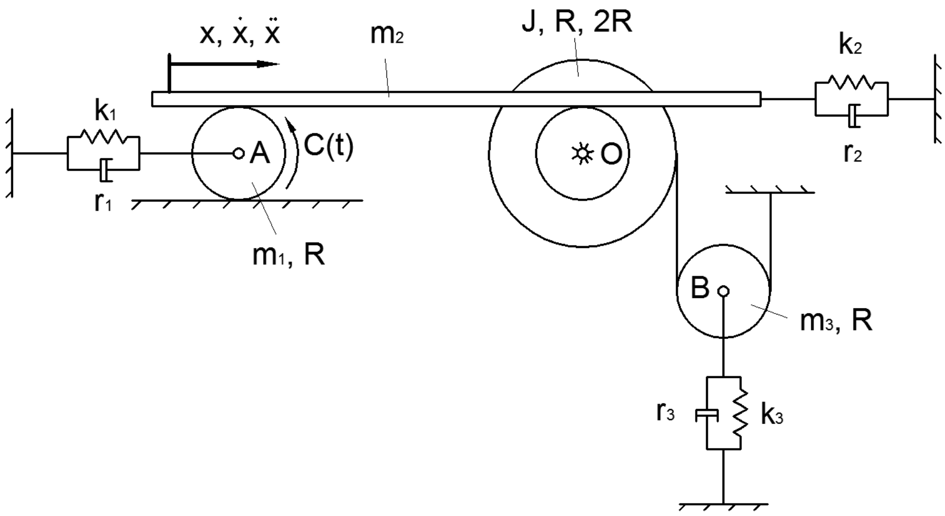


M_P [kg]	5000
M_C [kg]	50
J_1 [kgm^2]	1.5
R_1 [m]	0.25
J_2 [kgm^2]	2
R_2 [m]	0.3
J_3 [kgm^2]	0.1
M_3 [kg]	10
R_3 [m]	0.15
C_{m0} [Nm]	300
ω_S [rad/s]	15
τ	1/30
η	0.9
f_d	0.5

Problema N.3

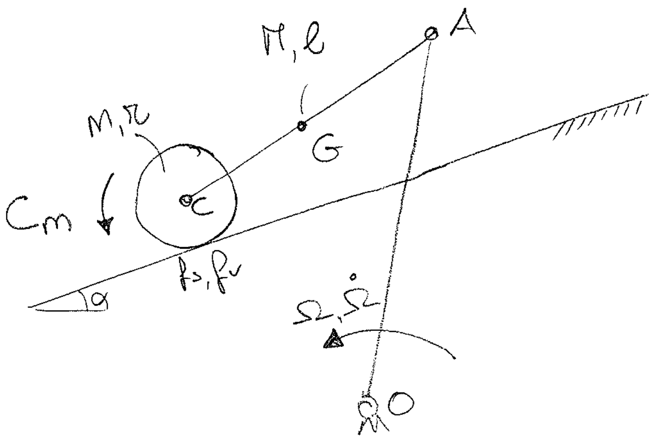
Il sistema rappresentato in figura si trova nel piano verticale. Una coppia di dischi solidali tra loro, di raggio minore R e raggio maggiore 2R e momento di inerzia complessivo J, è incernierata a terra nel punto O. Un'asta di massa m_2 è vincolata a scorrere sul disco di raggio minore R mediante un vincolo di rotolamento senza strisciamento. Un'estremità è vincolata a terra tramite un gruppo molla-smorzatore di rigidezza k_2 e smorzamento r_2. L'altra estremità dell'asta scorre su un altro disco omogeneo di centro A, massa m_1 e raggio R. Il centro A è vincolato a terra mediante un gruppo molla-smorzatore di rigidezza k_1 e smorzamento r_1. Una fune inestensibile si avvolge senza strisciare prima sul disco di raggio 2R, si avvolge quindi su una puleggia e infine è vincolata a terra. La puleggia è caratterizzata da centro B, massa m_3 e raggio R. Il centro B è vincolato a terra mediante un gruppo molla-smorzatore di rigidezza k_3 e smorzamento r_3.
<u>Assegnata la coordinata libera in figura</u>, determinare:

1) l'equazione di moto del sistema perturbato;
2) la frequenza propria del sistema;
3) la risposta del sistema forzato e la zona di funzionamento dello stesso, sapendo che $C(t)=C_0\cos(\Omega t)$ con Ω=3rad/s.

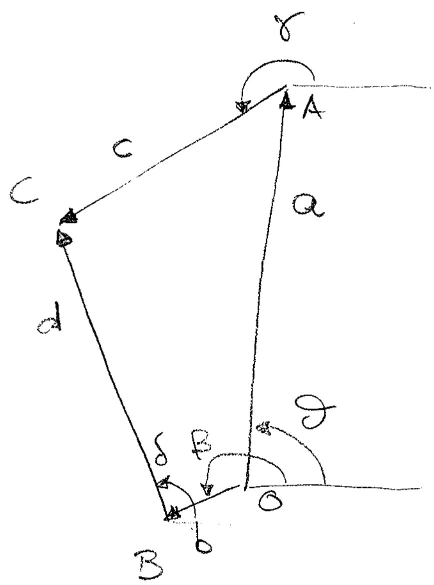


m_1 [kg]	20
m_2 [kg]	30
m_3 [kg]	15
J [kgm^2]	10
R [m]	1
r_1 [Ns/m]	10
r_2 [Ns/m]	20
r_3 [Ns/m]	30
k_1 [N/m]	700
k_2 [N/m]	1500
k_3 [N/m]	1100

Problema 1



Velocità e accelerazione del baricentro G.



COST	VAR
a	$\vartheta \rightarrow$ noto
$\pi + \alpha = \beta$	b
c	γ
d	
$\frac{\pi}{2} + \alpha = \delta$	

$$(A-O)+(C-A) = (B-O)+(C-B)$$

$$a e^{i\vartheta} + c e^{i\gamma} = b e^{i\beta} + d e^{i\delta}$$

$$\begin{cases} a \cos\vartheta + c\cos\gamma = b\cos\beta + d\cos\delta \\ a\sin\vartheta + c\sin\gamma = b\sin\beta + d\sin\delta \end{cases}$$

$\downarrow$ Velocità

$$\begin{cases} -a\dot{\vartheta}\sin\vartheta - c\dot{\gamma}\sin\gamma = \dot{b}\cos\beta \\ a\dot{\vartheta}\cos\vartheta + c\dot{\gamma}\cos\gamma = \dot{b}\sin\beta \end{cases} \longrightarrow \text{ricavo} \begin{cases} \dot{b} \\ \dot{\gamma} \end{cases}$$

sapendo che $\dot{\vartheta} = \Omega$

↓ Accelerazioni

$$\begin{cases} -a\ddot{\vartheta}\sin\vartheta - a\dot{\vartheta}^2\cos\vartheta - c\ddot{\gamma}\sin\gamma - c\dot{\gamma}^2\cos\gamma = \ddot{b}\cos\beta \\ a\ddot{\vartheta}\cos\vartheta - a\dot{\vartheta}^2\sin\vartheta + c\ddot{\gamma}\cos\gamma - c\dot{\gamma}^2\sin\gamma = \ddot{b}\sin\beta \end{cases}$$

$\longrightarrow$ ricavo $\begin{cases} \ddot{b} \\ \ddot{\gamma} \end{cases}$ sapendo che $\ddot{\vartheta} = \dot{\Omega}$

$$\vec{V}_G = \vec{V}_A + \vec{\omega}_{AC} \wedge (G-A)$$

$$= a\dot{\vartheta}e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)} + \dot{\gamma}\vec{K} \wedge \left(\overline{AG}e^{i\gamma}\right)$$

$$= \boxed{\left(-a\dot{\vartheta}\sin\vartheta - \overline{AG}\dot{\gamma}\sin\gamma\right)\vec{i} + \left(a\dot{\vartheta}\cos\vartheta + \overline{AG}\dot{\gamma}\cos\gamma\right)\vec{j}}$$

$$\vec{a}_G = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}}_{AC} \wedge (G-A) - \omega_{AC}^2(G-A)$$

$$= \left(-a\ddot{\vartheta}\sin\vartheta - a\dot{\vartheta}^2\cos\vartheta\right)\vec{i} + \left(a\ddot{\vartheta}\cos\vartheta - a\dot{\vartheta}^2\sin\vartheta\right)\vec{j} +$$

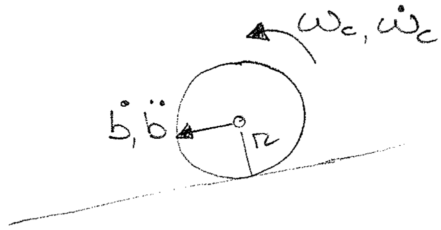
$$+ \ddot{\beta}\vec{K} \wedge \left(\overline{AG}\cos\vartheta\,\vec{i} + \overline{AG}\sin\vartheta\,\vec{j}\right) - \dot{\beta}^2\left(\overline{AG}\cos\vartheta\,\vec{i} + \overline{AG}\sin\vartheta\,\vec{j}\right)$$

$$= \boxed{\begin{aligned}&\left(-a\ddot{\vartheta}\sin\vartheta - a\dot{\vartheta}^2\cos\vartheta - \overline{AG}\ddot{\beta}\sin\vartheta - \overline{AG}\dot{\beta}^2\cos\vartheta\right)\vec{i} + \\ &+\left(a\ddot{\vartheta}\cos\vartheta - a\dot{\vartheta}^2\sin\vartheta + \overline{AG}\ddot{\beta}\cos\vartheta - \overline{AG}\dot{\beta}^2\sin\vartheta\right)\vec{j}\end{aligned}}$$

$$= a_{Gx}\vec{i} + a_{Gy}\vec{j}$$

2) Velocità angolare ed accelerazione angolare del disco.

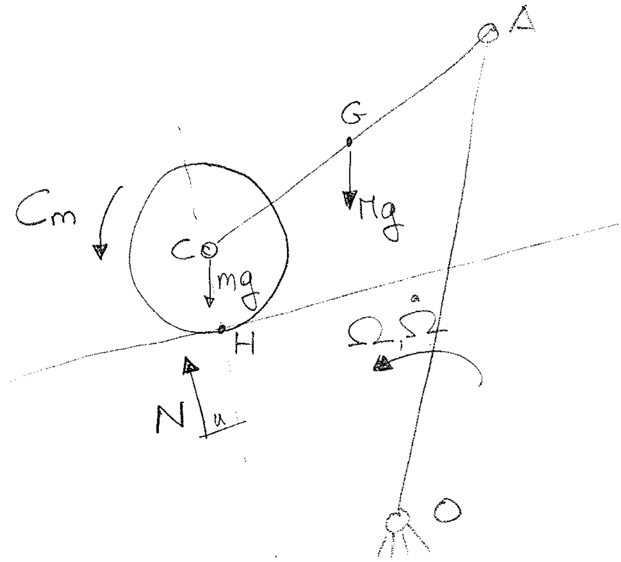
Il vettore (B-O) descrive il moto del centro del disco C.



$$\vec{\omega}_c = \frac{\dot{b}}{r}\vec{K}$$

$$\dot{\vec{\omega}}_c = \frac{\ddot{b}}{r}\vec{K}$$

3) C_m che garantisce il moto assegnato.



$$W_{att} + W_{reatt} = \frac{dE_c}{dt}$$

$$W_{att} = M\vec{g}\cdot\vec{V}_G + m\vec{g}\cdot\vec{V}_c + \vec{C}_m\cdot\vec{\omega}_c = -MgV_{Gy} - mgV_{cy} + C_m\omega_c$$

$$W_{reatt} = \vec{N}u\cdot\vec{\omega}_c = -Nu\omega_c$$

$$E_c = \frac{1}{2}MV_G^2 + \frac{1}{2}\frac{Ml^2}{12}\omega_{AC}^2 + \frac{1}{2}mV_c^2 + \frac{1}{2}\frac{mr^2}{2}\omega_c^2$$

$$\frac{dE_c}{dt} = MV_{Gx}a_{Gx} + MV_{Gy}a_{Gy} + \frac{Ml^2}{12}\omega_{AC}\dot{\omega}_{AC} + mV_c a_c + \frac{mr^2}{2}\omega_c\dot{\omega}_c$$

$$V_{Gy} = a\dot{\vartheta}\cos\vartheta + \overline{AG}\,\dot{\gamma}\cos\gamma$$

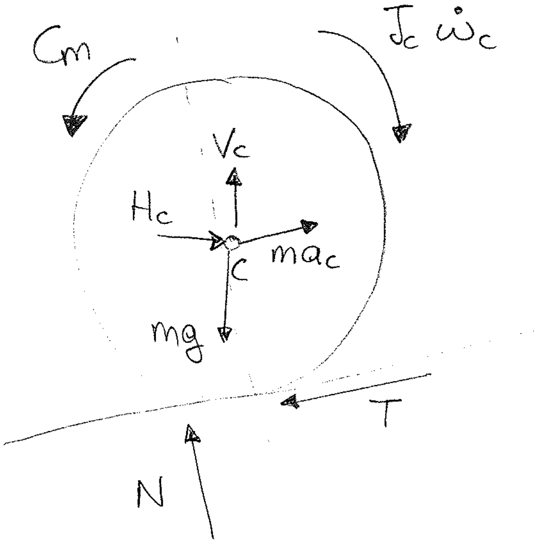
$$V_{cy} = \dot{b}\sin\beta$$

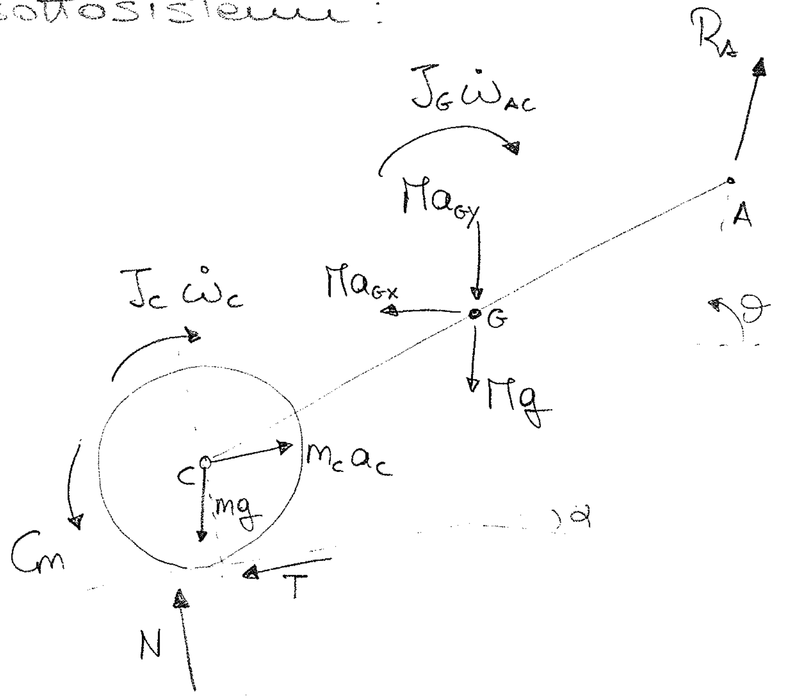
$$\omega_{AC} = \dot{\gamma} \qquad \dot{\omega}_{AC} = \ddot{\gamma}$$

$$V_c = \dot{b} \qquad a_c = \ddot{b}$$

4) Reazioni vincolari in O e verifica di aderenza. 4

Considero i seguenti sottosistemi:





$$J_c = \frac{mr^2}{2} \qquad J_G = \frac{Ml^2}{12} \qquad u = f_v r$$

$$\sum M_c^{disco} = 0$$

$$C_m - J_c\dot{\omega}_c - Nu - Tr = 0 \qquad \rightarrow N$$

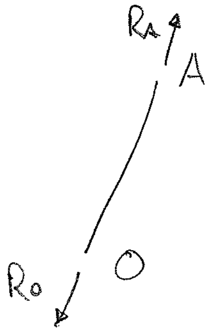
$$\sum F_H^{disco+asta} = 0$$

$$(m_c a_c - T)\cos\alpha - N\sin\alpha - Ma_{GX} + R_A \sin\vartheta = 0 \qquad \rightarrow T$$

$$\sum F_V^{disco+asta} = 0$$

$$-mg + N\cos\alpha + (m_c a_c - T)\sin\alpha - Mg - Ma_{GY} + R_A\cos\vartheta = 0 \quad \rightarrow R_A$$

L'asta $\overline{OA}$ è una biella scarica => ho un'unica reazione R_A diretta come l'asta stessa.

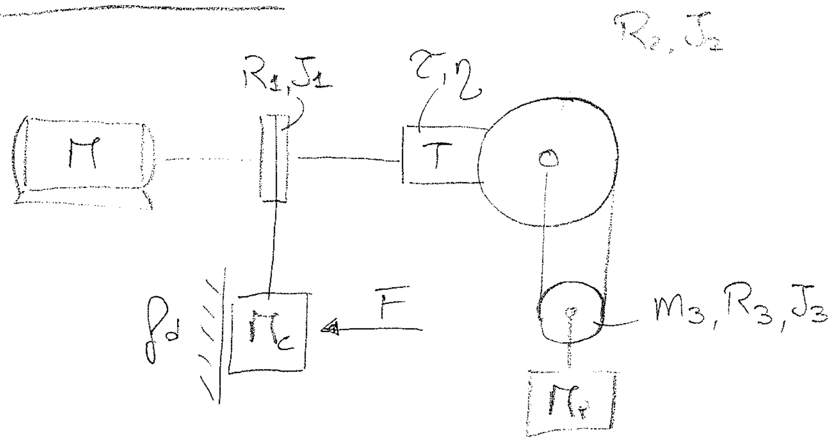


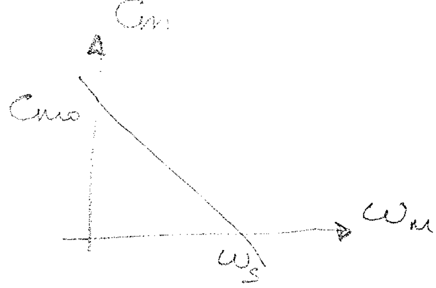
$$\boxed{R_O = R_A}$$

Verifica di aderenza del disco:

$$\boxed{|\vec{T}| \leq f_s |\vec{N}|}$$

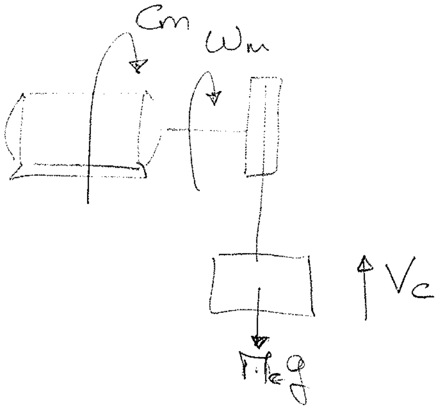
Problema 2





1) V_p in discesa a regime, M_c in salita.

$$W_m + W_r + W_p = \frac{dE_c}{dt} = 0 \quad \text{con}$$



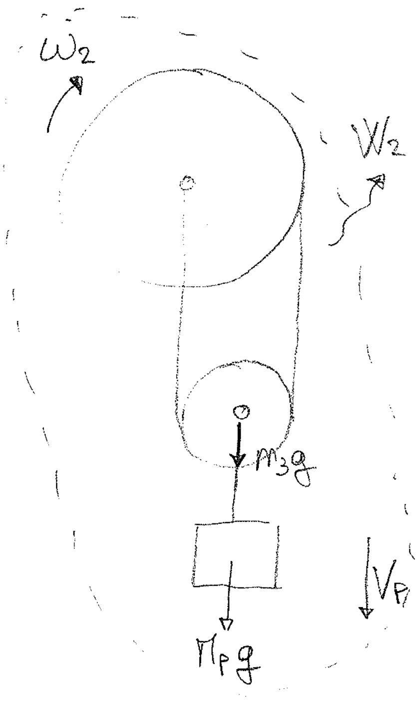
$$W_m = C_m \omega_m - M_c g V_c \qquad W_p ?$$

$$W_r = m_3 g V_3 + M_p g V_p$$

studio del moto lato utilizzatore:

$$-W_2 + W_u = 0$$

$$W_2 = m_3 g V_3 + M_p g V_p$$



legami cinematici:

$$\omega_1 = \omega_m \qquad \dot\omega_1 = \dot\omega_m$$

$$V_c = \omega_1 R_1 = \omega_m R_1 \qquad a_c = R_1 \dot\omega_m$$

$$\omega_2 = \tau \omega_1 = \tau \omega_m \qquad \dot\omega_2 = \tau \dot\omega_m$$

$$\omega_3 = \frac{\omega_2 \cancel{R_2}}{\cancel{2R_3}} = \tau \omega_m \qquad \dot\omega_3 = \tau \dot\omega_m$$

$$V_3 = \omega_3 R_3 = \tau R_3 \omega_m \qquad a_3 = \tau R_3 \dot\omega_m$$

$$V_p = V_3 = \tau R_3 \omega_m \qquad a_p = \tau R_3 \dot\omega_m$$

$$\Downarrow$$

$$W_2 = (m_3 + M_p) g \tau R_3 \omega_m = 5010[kg] \cdot 9{,}81 \left[\frac{m}{s^2}\right] \frac{1}{30} 0{,}15[m] \omega_m$$

$$= 245{,}74 \, \omega_m$$

$W_2 > 0 \Rightarrow$ <u>MOTO RETROGRADO</u>

$$W_p = -(1-\eta_R)\,W_2$$

$$\Downarrow$$

$$W_m + W_r - (1-\eta_R)\,W_2 = 0$$

$$W_m + \eta_R W_r = 0$$

$$C_m \cancel{\omega_m} - M_c g R_1 \cancel{\omega_m} + \eta_R (m_3+M_p) g \tau R_3 \cancel{\omega_m} = 0$$

$$C_{m_{reg}} = M_c g R_1 - \eta_R (m_3+M_p) g R_3 \tau = -98{,}54\ Nm$$

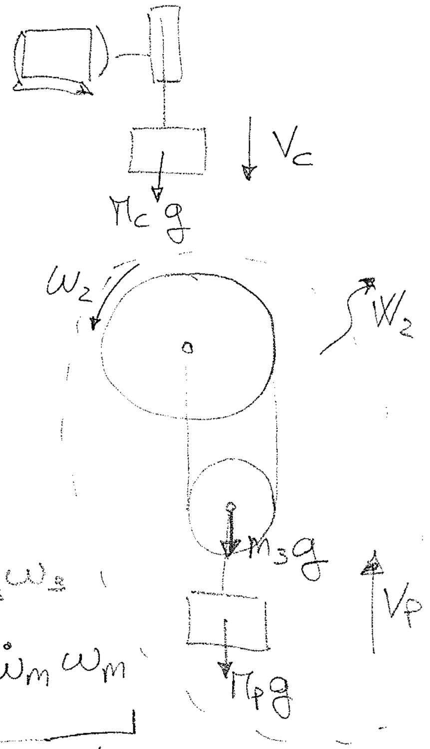
Tramite la curva caratteristica ricavo $\omega_{m,reg}$:

$$C_m = C_{m0} - \frac{C_{m0}}{\omega_s}\,\omega_m \quad \Rightarrow \quad \omega_{m,reg} = \omega_s\left(1 - \frac{C_{m,reg}}{C_{m0}}\right) = 19{,}93\ \frac{rad}{s}$$

$$\Rightarrow V_{P_{reg}} = \tau R_3\, \omega_{m,reg} = \boxed{0{,}10\ \frac{m}{s}}$$

2) a_P allo spunto in salita, M_c in discesa.

$$W_m + W_r + W_p = \frac{dE_c}{dt}$$



$$W_m = C_m \omega_m + M_c g V_c$$

$$W_r = -m_3 g V_3 - M_P g V_P$$

studio del moto lato utilizzatore

$$-W_2 + W_u = \frac{dE_c}{dt}$$

$$W_2 = -m_3 g V_3 - M_P g V_P - J_2 \dot{\omega}_2 \omega_2 - m_3 V_3 a_3 - J_3 \dot{\omega}_3 \omega_3$$

$$\overset{!}{=} \underbrace{-(m_3+M_P) g \tau R_3 \omega_m}_{-245{,}74} \underbrace{-\left(J_2 \tau^2 + m_3 \tau^2 R_3^2 + J_3 \tau^2\right)\dot{\omega}_m \omega_m}_{<0 \text{ perché allo spunto}}$$

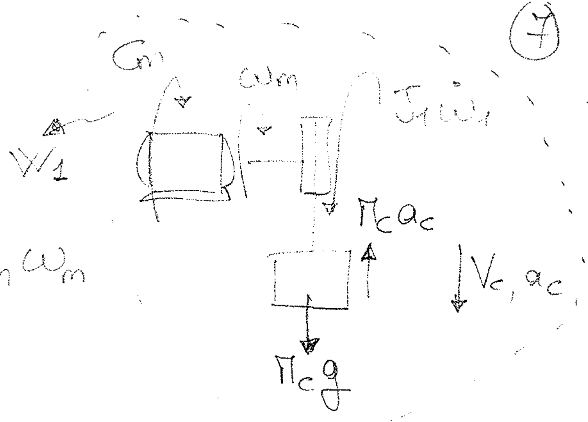
$$\Rightarrow W_2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\text{MOTO DIRETTO}}$$

$$W_p = -(1-\eta_D)\,W_1$$

$$W_m + W_r - (1-\eta_D)\,W_1 = \frac{dE_c}{dt}$$

dove W_1:

$$-W_1 + W_m = \frac{dE_c}{dt}$$



$$W_1 = C_m\omega_m + M_c g R_1 \omega_m - J_1\dot\omega_m\omega_m - M_c R_1^2\dot\omega_m\omega_m$$

$$\Downarrow$$

$$\cancel{C_m\omega_m} + \cancel{M_c g R_1\omega_m} - (m_3+M_P) g\,\tau R_3\omega_m +$$

$$-(\cancel{1}-\eta_D)(C_m\omega_m + M_c g R_1\omega_m - J_1\dot\omega_m\omega_m - M_c R_1^2\dot\omega_m\omega_m) =$$

$$= (\cancel{J_1} + \cancel{M_c R_1^2} + J_2\tau^2 + m_3R_3^2\tau^2 + J_3\tau^2 + M_P R_3^2\tau^2)\cancel{\omega_m}\dot\omega_m$$

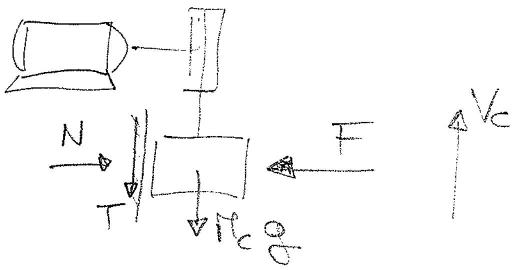
$$\dot\omega_m = \frac{\eta_D(C_{m0} + M_c g R_1) - (m_3+M_P) g\,\tau R_3}{\eta_D(J_1 + M_c R_1^2) + (J_2+J_3)\tau^2 + (m_3+M_P)R_3^2\tau^2} =$$

$$= \frac{380{,}36 \quad - \quad 245{,}74}{4{,}16 \quad + \quad 0{,}13} = 31{,}38\ \frac{rad}{s^2}$$

$$a_P = \tau R_3\dot\omega_m = \boxed{0{,}16\ \frac{m}{s^2}}$$

3) valore di F che garantisce $a_P = 0{,}05\ \frac{m}{s^2}$ in discesa, con motore spento e M_c in salita.

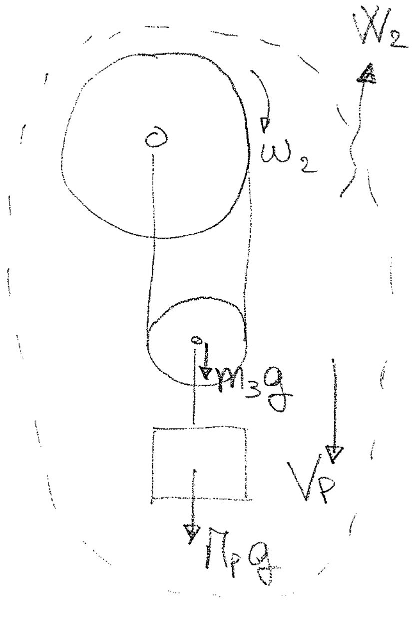
$$W_m + W_r + W_P = \frac{dE_c}{dt}$$



$$W_m = -M_c g V_c - T V_c$$

$$W_r = m_3 g V_3 + M_P g V_c$$

studio del moto lato utilizzatore:



$$-W_2 + W_u = \frac{dE_c}{dt}$$

$$W_2 = (m_3+M_P) g\,\tau R_3\omega_m - (J_2\tau^2 + m_3R_3^2\tau^2 + J_3\tau^2 + M_P R_3^2\tau^2)\omega_m\dot\omega_m$$

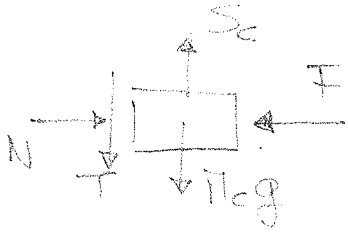
se $a_P = 0{,}05\ \frac{m}{s^2} \Rightarrow \dot\omega_m = 10\ \frac{rad}{s^2}$

$$W_2 = \Big\{ \underbrace{(m_3 + M_p)\, g\, \tau R_3}_{245,74} - \underbrace{\big[(J_2 + J_3)\,\tau^2 + (m_3 + M_p)\,\tau^2 R_3^2\big]\, \dot\omega_m}_{1,28} \Big\}\, \omega_m$$

$$= 244,46\ \omega_m > 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\text{MOTO RETROGRADO}}$$

$$\Rightarrow \quad W_p = -(1 - \eta_R)\, W_2$$

$$T = f_d\, N = f_d\, F$$



$$W_m + W_r - (1 - \eta_R)\, W_2 = \frac{dE_c}{dt}$$

$$-M_c\, g\, R_1 \cancel{\omega_m} - f_d\, F R_1 \cancel{\omega_m} + (m_3 + M_p)\, g\, \tau R_3 \cancel{\omega_m} +$$

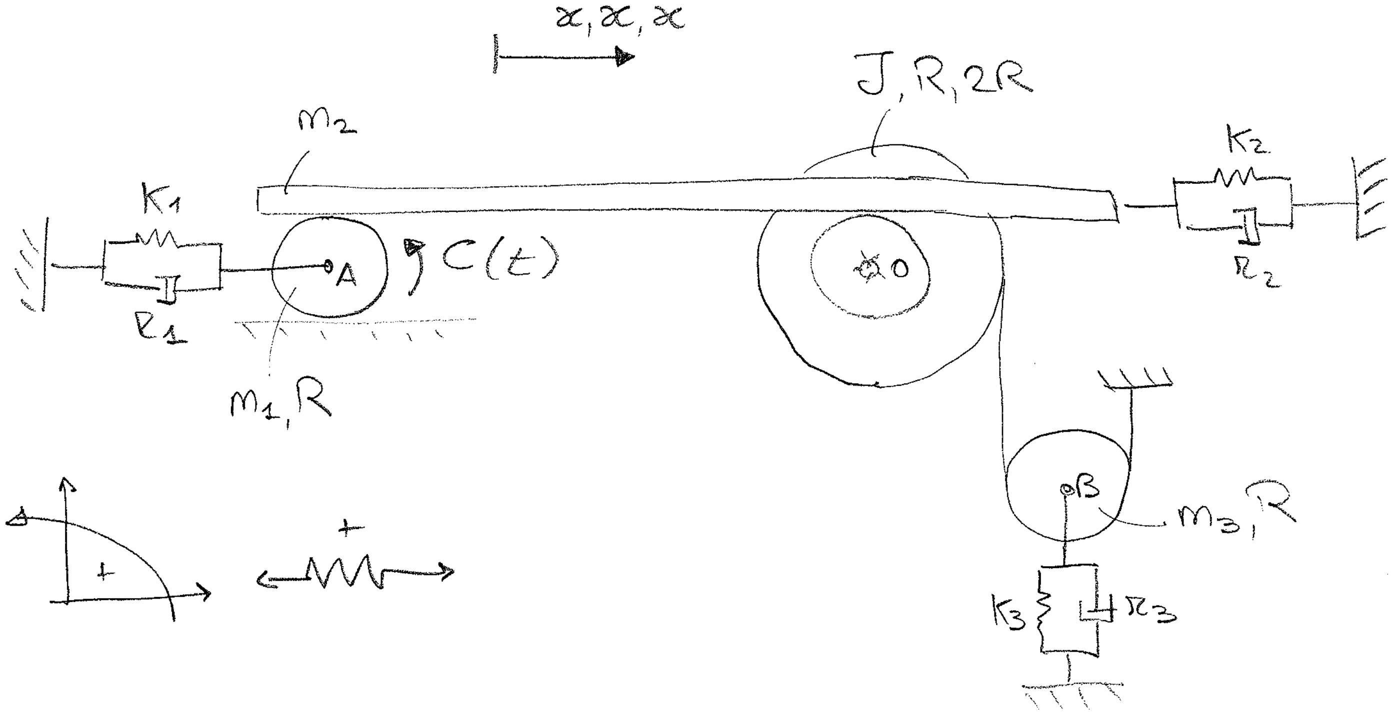
$$-(\cancel{1} - \eta_R) \Big\{ (m_3 + M_p)\, g\, \tau R_3\, \omega_m - \big[(J_2 + J_3)\,\tau^2 + (m_3 + M_p)\,\tau^2 R_3^2\, \dot\omega_m\, \omega_m\big] \Big\} =$$

$$= (J_1 + M_c R_1^2)\, \omega_m\, \dot\omega_m + \big[J_2 + J_3 + (m_3 + M_p) R_3^2\big]\, \tau^2\, \omega_m\, \dot\omega_m$$

$$F = \frac{-M_c\, g\, R_1 + \eta_R\, (m_3 + M_p)\, g\, \tau R_3 - \Big[\big[J_2 + J_3 + (m_3 + M_p) R_3^2\big]\, \tau^2 \eta_R + J_1 + M_c R_1^2\Big]\, \dot\omega_m}{f_d\, R_1}$$

$$= \frac{-122,63 + 221,17 - 57,73}{0,125} = \boxed{326,47\ \text{N}}$$

Problema 3



1) Equaz. di moto del sistema perturbato

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial V}{\partial x} = Q_x$$

legami cinematici:

$$J_1 = \frac{m_1 R^2}{2} \qquad J_3 = \frac{m_3 R^2}{2}$$

$$V_1 = \frac{\dot{x}}{2} \qquad V_2 = \dot{x} \qquad V_3 = -\dot{x} \qquad \omega_1 = -\frac{\dot{x}}{2R} \qquad \omega = -\frac{\dot{x}}{R} \qquad \omega_3 = \frac{\dot{x}}{R}$$

$$\Delta l_1 = \frac{x}{2} \qquad \Delta l_2 = -x \qquad \Delta l_3 = -x \qquad h_3 = -x$$

$$\Delta\dot{l}_1 = \frac{\dot{x}}{2} \qquad \Delta\dot{l}_2 = -\dot{x} \qquad \Delta\dot{l}_3 = -\dot{x}$$

$$\delta^* \vartheta_c = \frac{1}{R}\, \delta^* x$$

$$\Downarrow$$

$$E_c = \frac{1}{2}\left[\frac{m_1}{4} + \frac{J_1}{4R^2} + m_2 + \frac{J}{R_2} + m_3 + \frac{J_3}{R^2}\right]\dot{x}^2 = \frac{1}{2} m^* \dot{x}^2$$

$$D = \frac{1}{2}\left[\frac{r_1}{4} + r_2 + r_3\right]\dot{x}^2 = \frac{1}{2} r^* \dot{x}^2 \qquad Q_x = -\frac{C(t)}{R}$$

$$V = \frac{1}{2}\left[\frac{K_1}{4} + r_2 + r_3\right] x^2 - m_3 g x = \frac{1}{2} K^* x^2 - m_3 g x$$

Tutti i legami cinematici sono lineari, quindi i termini legati all'energia potenziale gravitazionale si semplificano coi precarichi statici.

$\bar{x}$ → variabile che descrive il moto perturbato =>

$$\boxed{m^* \ddot{\bar{x}} + r^* \dot{\bar{x}} + K^* \bar{x} = -\frac{1}{R} C(t)}$$

2) Frequenza propria del sistema.

$m^* = 70 \text{ Kg}$

$r^* = 52{,}5 \ \frac{Ns}{m}$

$K^* = 2775 \ \frac{N}{m}$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{K^*}{m^*}} = 6{,}30 \ \frac{rad}{s}$

$h = \frac{r^*}{2m^*\omega_0} = 0{,}06 < 1$ => SISTEMA SUBCRITICO

$$\omega = \omega_0\sqrt{1-h^2} = 6{,}29 \ \frac{rad}{s}$$

$$\boxed{f = \frac{\omega}{2\pi} = 1 \text{ Hz}}$$

3) Risposta a regime del sistema e zona di funzionamento.

$$m^* \ddot{\bar{x}} + r^* \dot{\bar{x}} + K^* \bar{x} = \mathrm{Re}\left(-\frac{1}{R} C_0 e^{i\Omega t}\right)$$

soluzione $\bar{x}(t) = \bar{X}_0 e^{i\Omega t}$

$$\bar{X}_0 = \frac{-\frac{C_0}{R}}{(K^* - m^*\Omega^2) + i r^*\Omega}$$

$$|\bar{X}_0| = \frac{\frac{C_0}{R}/K^*}{\sqrt{(1-a^2)^2 + (2ah)^2}} \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{2ah}{1-a^2}\right)$$

$$\boxed{\bar{x}(t) = |\bar{X}_0| \cos(\Omega t + \varphi + \pi)}$$

$a = \frac{\Omega}{\omega_0} = 0{,}48 < 1$ => ZONA QUASISTATICA