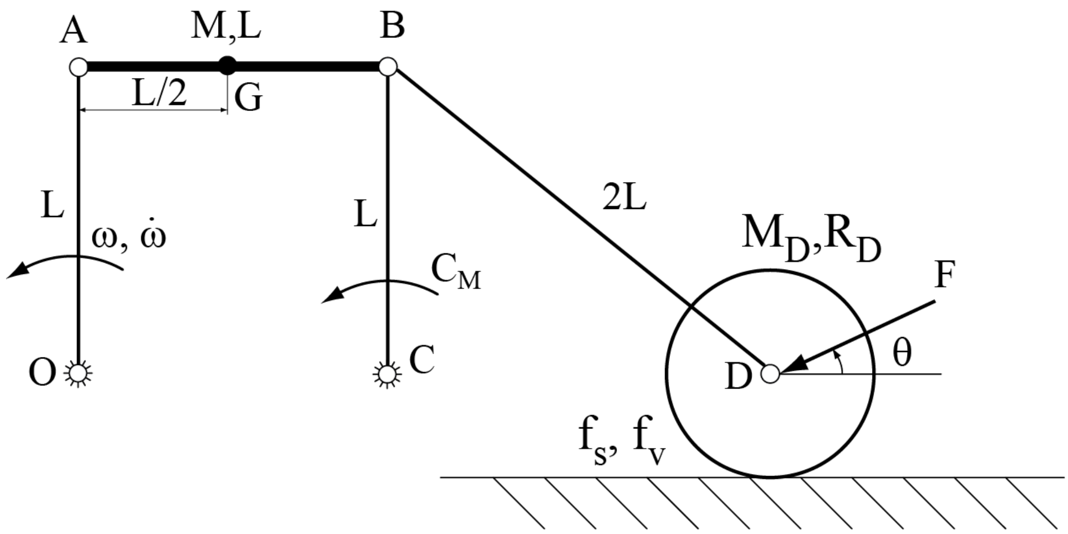
MECCANICA APPLICATA ALLE MACCHINE
Allievi meccanici AA.2011-2012 prova del 25-09-2012

Problema N.1

Il sistema meccanico rappresentato giace nel piano verticale, siano note tutte le sue caratteristiche geometriche facendo riferimento alla posizione indicata in figura. Le aste OA e BC sono vincolate a terra attraverso due cerniere, mentre il disco incernierato nel punto D rotola senza strisciare sulla guida orizzontale, essendo f_s il coefficiente di attrito statico tra il disco e la guida. Si consideri, inoltre, che nel punto D è applicata una forza nota di modulo pari a F, inclinata di un angolo θ rispetto all'orizzontale.
Siano note le lunghezze di tutte le aste e la massa dell'asta AB (con baricentro G) pari a M e del disco pari a M_D.
Considerando note rispettivamente velocità e accelerazione angolare dell'asta OA pari a $\omega, \dot{\omega}$, si richiede di:

1. determinare i vettori velocità ed accelerazione del baricentro G dell'asta AB;
2. determinare la coppia C_M in grado di garantire il moto trascurando la resistenza al rotolamento del disco sulla guida orizzontale;
3. determinare la coppia C_M in grado di garantire il moto considerando la resistenza al rotolamento del disco sulla guida orizzontale mediante un coefficiente f_v;
4. verificare l'aderenza del disco sulla guida orizzontale.



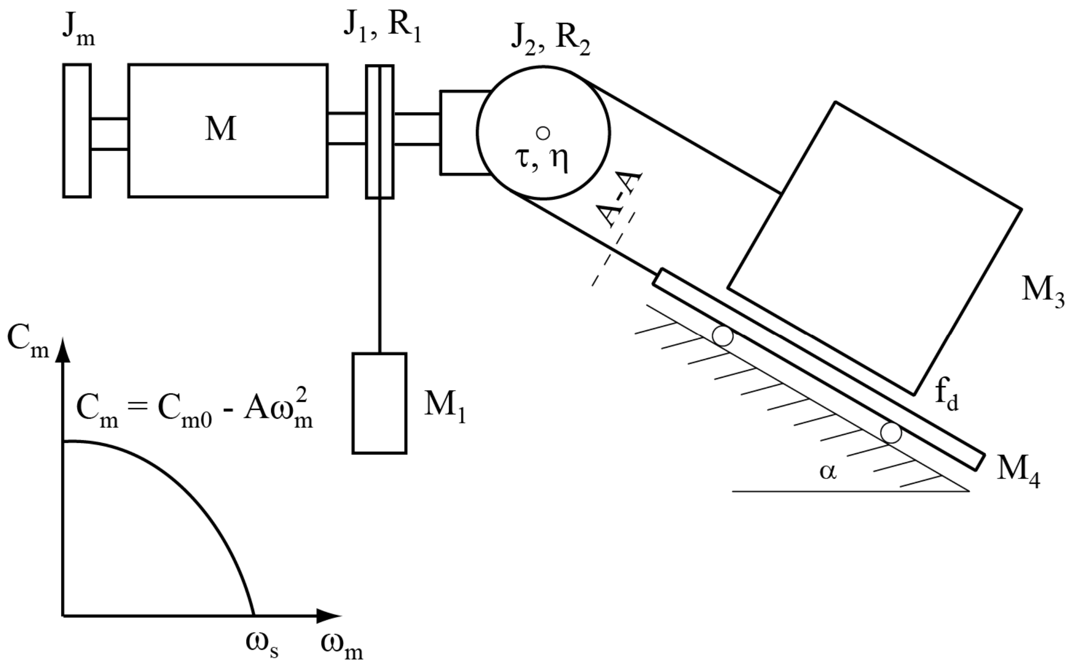
Problema N.2

Il sistema in figura è costituito da un motore sul cui albero sono calettati un volano di momento di inerzia J_m e un disco di momento di inerzia J_1 e raggio R_1 sul quale si avvolge una fune collegata ad una massa M_1. L'albero motore è poi collegato ad una trasmissione di rapporto τ e rendimento η. Sull'albero all'uscita della trasmissione è calettato un disco di raggio R_2 e momento di inerzia J_2 sul quale si avvolge senza strisciare una fune. Un estremo della fune è collegato ad un corpo di massa M_4 che può traslare su un piano inclinato di un angolo α con l'orizzontale, mentre l'altro estremo è collegato ad un corpo di massa M_3 appoggiato sul precedente.
Considerando un coefficiente di attrito dinamico pari a f_d tra i corpi di massa M_3 e M_4, si chiede di calcolare, <u>discutendo la condizione di moto diretto o retrogrado per mezzo dei dati forniti in tabella</u>:

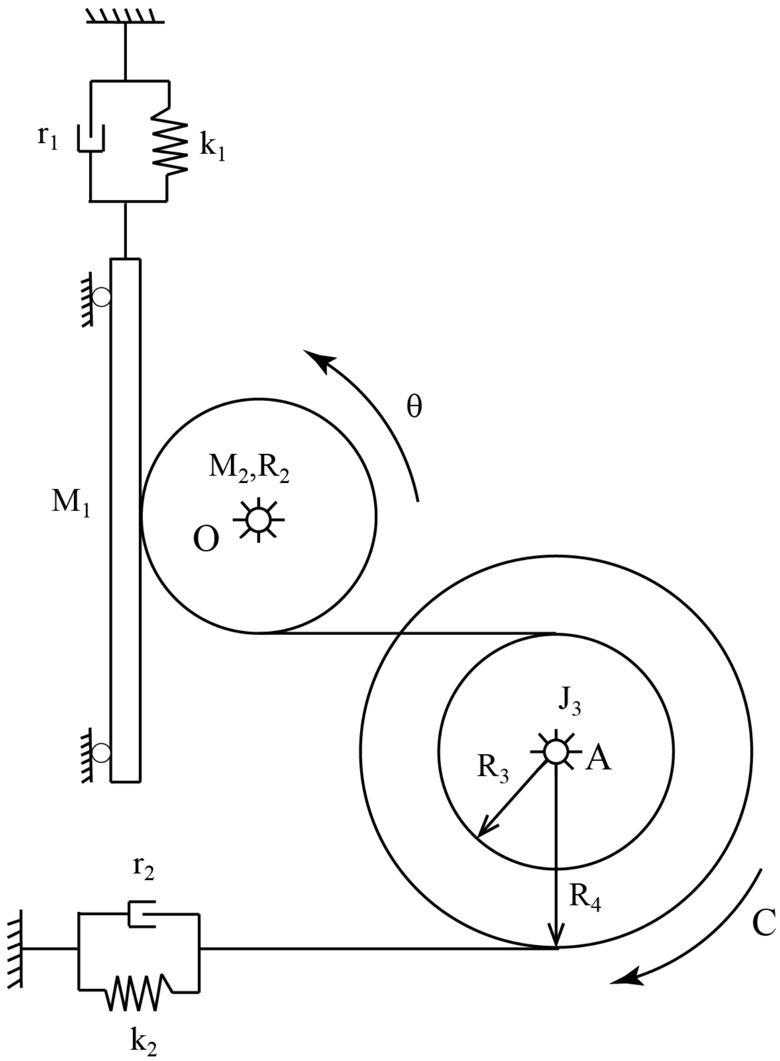
1. l'accelerazione angolare del motore allo spunto, considerando la condizione di massa M_3 e in salita e M_1 in discesa;
2. il tiro della fune nella sezione A-A, nelle condizioni del punto 1;
3. la velocità angolare del motore a regime nel caso in cui la massa M_4 sia in salita (si consideri sempre la massa M_1 in discesa).

M_3	300 kg	τ	0.1
M_4	100 kg	η	0.9
J_2	10 kgm^2	f_d	0.3
R_2	0.3 m	α	30°

MECCANICA APPLICATA ALLE MACCHINE
Allievi meccanici AA.2011-2012 prova del 25-09-2012

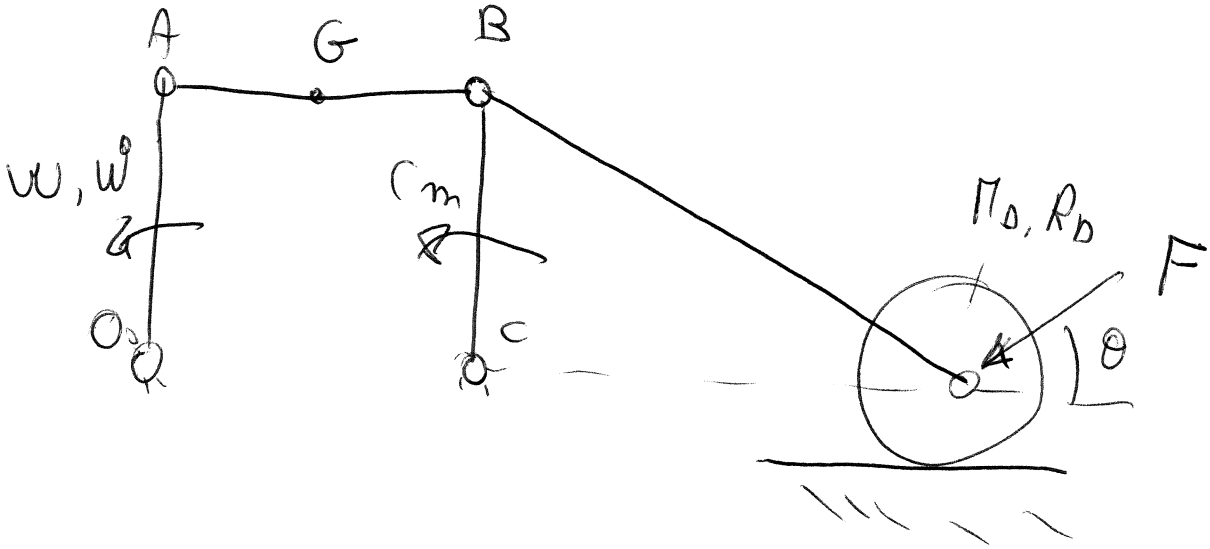


Problema N.3

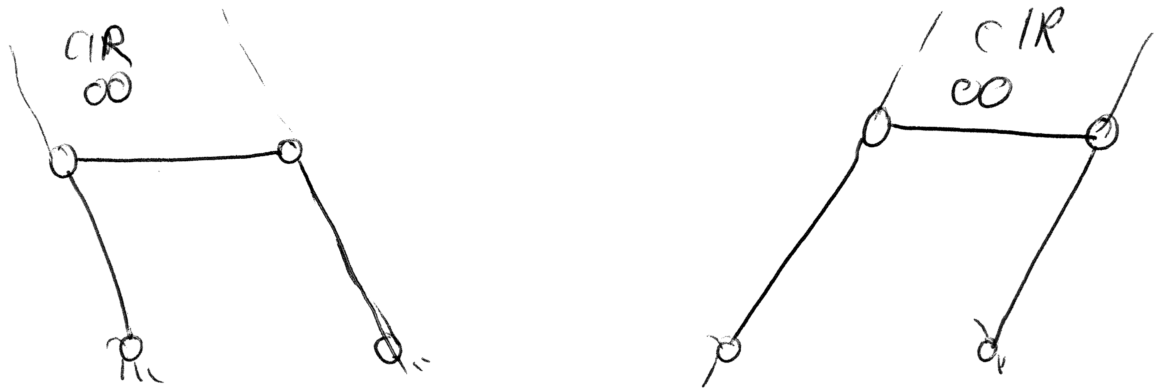


Il sistema rappresentato in figura si trova nel piano verticale. Un corpo di massa M_1 scorre lungo una guida verticale ed è vincolato a terra attraverso un gruppo molla-smorzatore di rigidezza k_1 e smorzamento r_1.
Un disco di massa M_2 e raggio R_2, incernierato a terra nel suo centro O, rotola senza strisciare sul corpo di massa M_1. Una fune collega tale disco ad una coppia di dischi solidali tra loro di momento di inerzia complessivo J_3 con raggio interno pari a R_3 e raggio esterno pari a R_4.
Sul disco di raggio R_4 si avvolge un'altra fune che è collegata a terra attraverso un gruppo molla-smorzatore di rigidezza k_2 e smorzamento r_2.
Determinare:
1. l'equazione di moto del sistema nell'intorno della posizione di equilibrio statico, utilizzando come variabile indipendente la rotazione θ indicata in figura;
2. la risposta del sistema in transitorio e la zona di funzionamento dello stesso a regime, sapendo che M_1=10kg, k_1=3000N/m, r_1=30 Ns/m, M_2=20kg, R_2=0.2m, J_3=1.2kgm^2, R_3=0.3m, R_4=0.5m, k_2=6000N/m, r_2=60 Ns/m, $C(t)=C_0\cos(\Omega t)$ con Ω=5rad/s. Si considerino condizioni iniziali nulle $\theta(0)=0$ e $\dot{\theta}(0)=0$.

1)



disegno il quadrilatero O A B C in due differenti posizioni



$$\omega_{AB} = 0 = cost. \Rightarrow \dot{\omega}_{AB} = 0 \quad \left(\omega_{BC} = \omega, \ \dot{\omega}_{BC} = \dot{\omega}\right)$$

$$\vec{V}_G = \vec{V}_A + \cancel{\vec{\omega}_{AB} \wedge (G-A)} =$$

$$= \omega \vec{k} \wedge (A-O) = \omega \vec{k} \wedge L \vec{j} = -\omega L \vec{i}$$

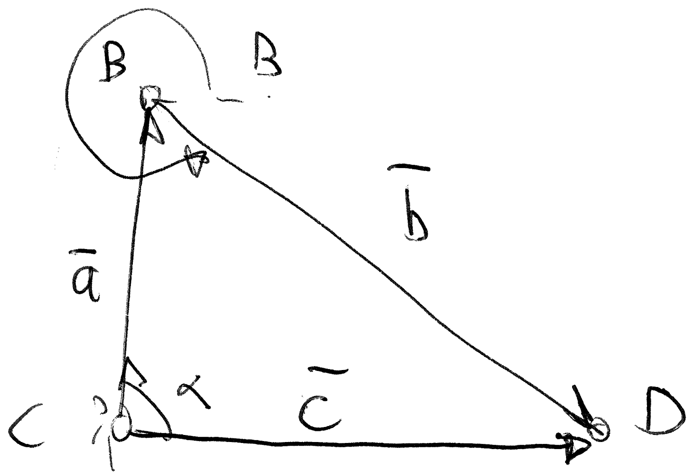
$$\vec{a}_G = \vec{a}_A + \cancel{\vec{\omega}_{AB} \wedge (G-A)} + \cancel{\vec{\omega}_{AB} \wedge (\vec{\omega}_{AB} \wedge (G-A))} =$$

$$= \dot{\omega} \vec{k} \wedge (A-O) + \omega \vec{k} \wedge (\omega \vec{k} \wedge (A-O)) =$$

$$= \dot{\omega} \vec{k} \wedge L \vec{j} + \omega \vec{k} \wedge (\omega \vec{k} \wedge L \vec{j}) =$$

$$= -\dot{\omega} L \vec{i} - \omega^2 L \vec{j}$$

CHIUSURA CBD



$$(B-C) + (D-B) = (D-C)$$

$$a e^{i\alpha} + b e^{i\beta} = c e^{i\gamma}$$

$$\begin{cases} a \cos\alpha + b \cos\beta = c \cos\gamma \\ a \operatorname{sen}\alpha + b \operatorname{sen}\beta = c \operatorname{sen}\gamma \end{cases}$$

derivo: (3)

$$a\dot{\alpha}\, e^{i(\alpha+\frac{\pi}{2})} + b\dot{\beta}\, e^{i(\beta+\frac{\pi}{2})} = \dot{c}\, e^{i\gamma}$$

$$\begin{cases} -a\dot{\alpha}\,\mathrm{sen}\,\alpha - b\dot{\beta}\,\mathrm{sen}\,\beta = \dot{c}\cos\gamma \\ a\dot{\alpha}\cos\alpha + b\dot{\beta}\cos\beta = \dot{c}\,\mathrm{sen}\,\gamma \end{cases}$$

tenuto conto che $\dot{\alpha} = \omega \Rightarrow \dot{\beta}, \dot{c}$

derivo ancora

$$a\ddot{\alpha}\, e^{i(\alpha+\frac{\pi}{2})} - a\dot{\alpha}^2 e^{i\alpha} + b\ddot{\beta}\, e^{i(\beta+\frac{\pi}{2})} - b\dot{\beta}^2 e^{i\beta} =$$
$$= \ddot{c}\, e^{i\gamma}$$

$$\begin{cases} -a\ddot{\alpha}\,\mathrm{sen}\,\alpha - a\dot{\alpha}^2\cos\alpha - b\ddot{\beta}\,\mathrm{sen}\,\beta - b\dot{\beta}^2\cos\beta = \ddot{c}\cos\gamma \\ a\ddot{\alpha}\cos\alpha - a\dot{\alpha}^2\,\mathrm{sen}\,\alpha + b\ddot{\beta}\cos\beta - b\dot{\beta}^2\,\mathrm{sen}\,\beta = \ddot{c}\,\mathrm{sen}\,\gamma \end{cases}$$

$\ddot{\alpha} = \dot{\omega} \Rightarrow \ddot{\beta}, \ddot{c}$

$$\vec{V}_D = \dot{c}\,\vec{i} \qquad \vec{a}_D = \ddot{c}\,\vec{i}$$

$$\vec{\omega}_D = -\frac{\dot{c}}{R_D}\,\vec{k} \qquad \dot{\vec{\omega}}_D = -\frac{\ddot{c}}{R}\,\vec{k}$$

BILANCIO DI POTENZE

$$\Pi + \Pi' = \frac{dE_c}{dt}$$

$$\Pi = \vec{C}_m \times \vec{W}_{BC} + M\vec{g} \times \vec{V}_G + M_D \vec{g} \times \vec{V}_D + \vec{F} \times \vec{V}_D = C_m W - F \cos\theta \, \dot{c}$$

$$E_c = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} J_G w_{AB}^2 + \frac{1}{2} M_D V_D^2 + \frac{1}{2} J_D w_D^2$$

$$\frac{dE_c}{dt} = M v_G a_{G,T} + J_G w_{AB} \dot{w}_{AB} + M_D V_D a_{D,t} + J_D w_D \dot{w}_D =$$

$$= M L^2 w \dot{w} + M_D \dot{c} \ddot{c} + \frac{1}{2} M_D R_D^2 \frac{\dot{c}\ddot{c}}{R_D^2} =$$

$$= M L^2 w \dot{w} + \frac{3}{2} M_D \dot{c} \ddot{c}$$

$$\Pi' = 0$$

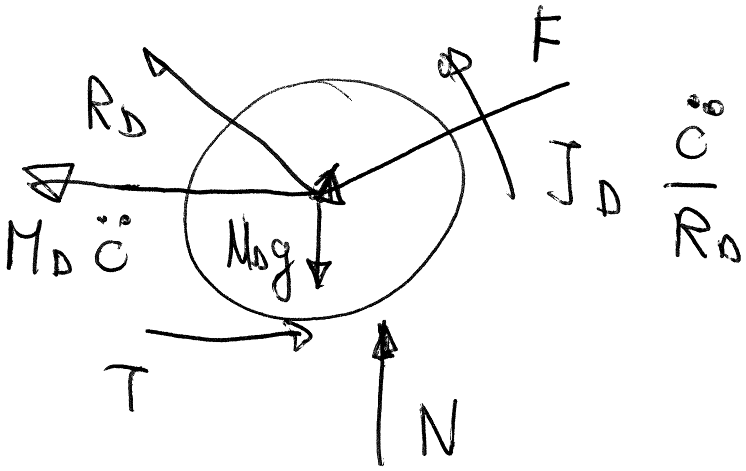
$$C_m = \frac{1}{W} \cdot \left(F \cos\theta \cdot \dot{c} + M L^2 w \dot{w} + \frac{3}{2} M_D \dot{c} \ddot{c} \right)$$

$$\Pi + \Pi' = \frac{dE_c}{dt}$$

$$\Pi' = -N u \, |\omega_D|$$

CONSIDERO IL DISCO

BD è un'asta scarica $\Rightarrow$ biella



$$\sum \vec{F_x} = 0$$

$$\sum \vec{F_y} = 0$$

$$\sum \vec{M_D} = 0$$

3 equazioni

3 incognite $\Rightarrow N, T, R_D$

aderenza $|T| \leq f_D |N|$

$$\Pi' = -N u \, |\omega_D|$$

$$C_m = \frac{1}{\omega} \left(F \cos\theta \, \dot{\theta} + N u \left| \frac{\dot{c}}{R_D} \right| + M L^2 \omega \dot{\omega} + \frac{3}{2} M_D \ddot{c} \dot{c} \right)$$

e) SPUNTO

6

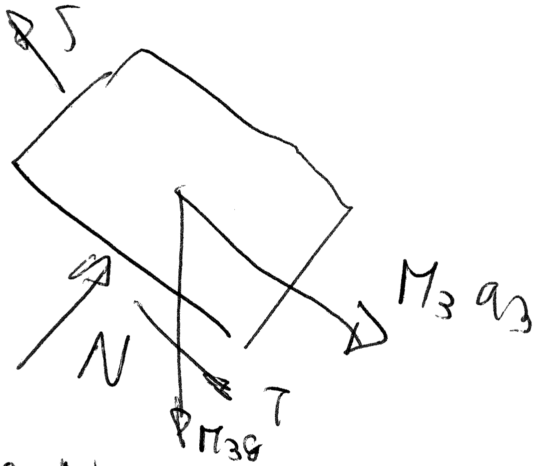
M_3 in salita

M_1 discesa

$$W_m + W_p + W_e = \frac{dE_c}{dt}$$

$$W_m = C_m \, \omega_m$$

$$W_2 = +M_1 g V_1 - M_3 g \,\mathrm{sen}\,\alpha\, V_3 + M_4 g \,\mathrm{sen}\,\alpha\, V_4 + $$
$$- f_d (M_3 g \cos\alpha)\, 2 V_3$$



$$T = f_d N = f_d (M_3 g \cos\alpha)$$

$$W_2 + W_{L,UT} = \frac{dE_{c\,L,UT}}{dt}$$

$$W_2 = -M_3 g \,\mathrm{sen}\,\alpha\, V_3 + M_4 g \,\mathrm{sen}\,\alpha\, V_4 + $$
$$- f_d M_3 g \cos\alpha \, 2 V_3 - M_3 V_3 a_3 - M_4 V_4 a_4 - J_2 \omega_2 \dot{\omega}_2$$

LÈGAMI CINEMATICI

$$\omega_1 = \omega_m \Rightarrow V_1 = \omega_m R_1$$

$$\omega_2 = \tau \omega_m \Rightarrow V_3 = \tau \omega_m R_2 = V_4$$

$$W_2 = -M_3 g (\operatorname{sen}\alpha + f_d \cos\alpha) \tau \omega_m R_2 + M_4 g \operatorname{sen}\alpha \tau \omega_m R_2 +$$
$$- M_3 \tau^2 R_2^2 \omega_m \dot{\omega}_m - M_4 \tau^2 R_2^2 \omega_m \dot{\omega}_m +$$
$$- J_2 \tau^2 \omega_m \dot{\omega}_m$$

il primo termine è > del secondo $\Rightarrow$

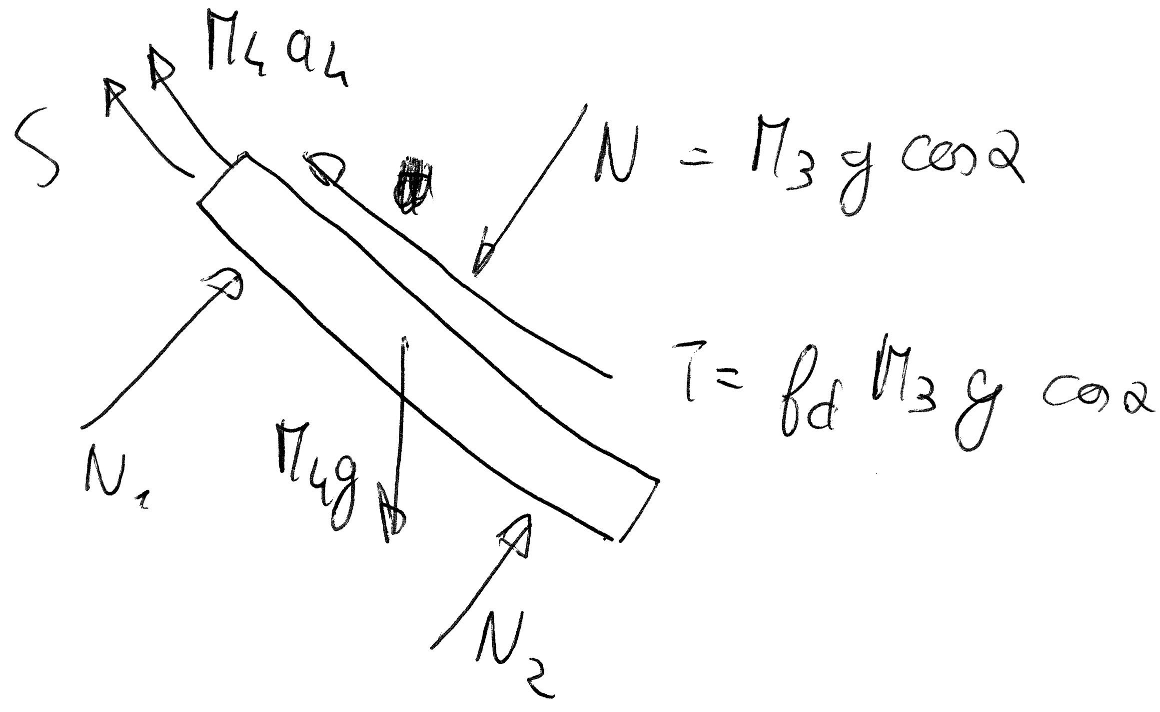
$\Rightarrow$ ~~molto~~ $W_2 < 0 \Rightarrow$ MOTO DIRETTO

$$W_1 = C_m \omega_m - J_m \omega_m \dot{\omega}_m + M_1 g V_1 - M_1 V_1 a_1 - J_1 \omega_1 \dot{\omega}_1$$
$$- M_1 R_1^2 \omega_m \dot{\omega}_m$$

$$W_p = -(1-\eta)\left(C_m \omega_m - J_m \omega_m \dot{\omega}_m + M_1 g R_1 \omega_m - J_1 \omega_m \dot{\omega}_m - M_1 R_1^2 \omega_m \dot{\omega}_m\right)$$

$$\dot{\omega}_m = \frac{\eta C_{m0} + \eta M_1 g R_1 - M_3 g (\operatorname{sen}\alpha + f_d \cos\alpha) \tau R_2 + M_4 g \operatorname{sen}\alpha \tau R_2}{\eta (J_m + J_1) + \eta M_1 R_1^2 + J_2 \tau^2 + (M_3 + M_4) \tau^2 R_2^2}$$

TIRO



$$S = M_4 g \operatorname{sen}\alpha - M_4 a_4 - f_d M_3 g \cos\alpha$$

SALITA M_4

DISCESA M_1

$$W_2 = - M_4 g \operatorname{sen}\alpha\, V_4 + M_3 g \operatorname{sen}\alpha\, V_3 +$$

$$- 2 M_3 g \cos\alpha\, V_3 =$$

$$= (M_3 \operatorname{sen}\alpha - 2 f_d M_3 \cos\alpha - M_4 \operatorname{sen}\alpha) g \tau \omega_m R_2 =$$

$$= \left(300 \cdot \frac{1}{2} - 2\, 300 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 100 \cdot \frac{1}{2}\right) g \tau \omega_m R_2 =$$

$$= (150 - 300 \sqrt{3} \cdot 0.3\; 50) g \tau \omega_m R_2 < 0$$

$\omega_2 < 0 \Rightarrow$ MOTO DIRETTO

9

$$C_m = \frac{(M_3 \operatorname{sen}\alpha - \varepsilon M_3 \cos\alpha - M_4 \operatorname{sen}\alpha)\, g\, \tau\, R_2 - \eta M_1 g R_1}{\eta}$$

$$C_m = C_{m0} - A\omega_m^2 \Rightarrow \omega_m = \sqrt{\frac{C_{m0} - C_m}{A}}$$

10

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial E_c}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = Q_\theta$$

$$E_c = \frac{1}{2} M_1 V_1^2 + \frac{1}{2} J_2 W_2^2 + \frac{1}{2} J_3 w_3^2$$

	$\dot{\theta}$
V_1	$-R_2$
w_2	1
w_3	$-R_2/R_3$

$$E_c = \frac{1}{2} M_1 R_2^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} M_2 R_2^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_3 \left(\frac{R_2}{R_3}\right)^2 \dot{\theta}^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[M_1 R_2^2 + \frac{1}{2} M_2 R_2^2 + J_3 \left(\frac{R_2}{R_3}\right)^2\right]\dot{\theta}^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m^* \dot{\theta}^2$$

$$m^* = 1.333 \ Kg\, m^2$$

$$V = \frac{1}{2} K_1 \Delta l_1^2 + \frac{1}{2} K_2 \Delta l_2^2$$

	θ
Δl_1	R_2
Δl_2	$-R_4 \cdot \frac{R_2}{R_3}$

$$V = \frac{1}{2} K_1 R_2^2 \theta^2 + \frac{1}{2} K_2 \left(R_4 \frac{R_2}{R_3}\right)^2 \theta^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(K_1 R_2^2 + K_2 R_4^2 \frac{R_2^2}{R_3^2}\right)\theta^2 =$$

$$= \frac{1}{2} K^* \theta^2$$

$$K^* = 786.67 \ \text{N/rad}$$

$$D = \frac{1}{2} r_1 \Delta \dot{l}_1^2 + \frac{1}{2} r_2 \Delta \dot{l}_2^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(r_1 R_2^2 + r_2 R_4^2 \frac{R_2^2}{R_3^2}\right)\dot{\theta}^2 =$$

$$= \frac{1}{2} r^* \dot{\theta}^2$$

$$r^* = 7.8667 \ \text{Ns/rad}$$

$$Q_\theta = \frac{\delta L}{\delta \theta}$$

$$\delta L = \vec{C} \times \delta \vec{\theta}_3 = -C\vec{K} \times \left(-\frac{R_2}{R_3}\right)\delta\theta \vec{K} =$$

$$= C \frac{R_2}{R_3} \delta\theta$$

$$Q_0 = C \frac{R_2}{R_3}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} = 24.29 \ rad/s$$

$$h = \frac{r^*}{2m^*\omega_0} = 0.12 < 1$$

$$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1-h^2} = 24.11 \ rad/s$$

$$\theta(t) = A \operatorname{sen}(\omega_d t) + B \cos(\omega_d t) + \theta_0 \cos(\Omega t + \varphi)$$

$$\theta_0 = \frac{C_0 \frac{R_2}{R_3}}{\sqrt{(k^* - m^*\Omega^2) + (r^*\Omega)^2}}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} - \frac{r^*\Omega}{k^* - m^*\Omega^2}$$

Impongo le CI

$$\theta(0) = 0$$

$$B \ \cancel{\theta} + \theta_0 \cos\varphi = 0$$

(13)

$$\dot{\theta}(0) = 0$$

$$\dot{\theta}(t) = A\omega_d \cos(\omega_d t) - B\omega_d \sin(\omega_d t) - \theta_0 \Omega \sin(\Omega t + \varphi)$$

$$\dot{\theta}(0) = A\omega_d - \theta_0 \Omega \sin\varphi$$

$$\begin{cases} B = -\theta_0 \cos\varphi \\ A = \dfrac{1}{\omega_d} \theta_0 \Omega \sin\varphi \end{cases}$$

$$a = \frac{\Omega}{\omega_0} = \frac{5}{24.29} << 1$$ ZONA QUASISTATICA