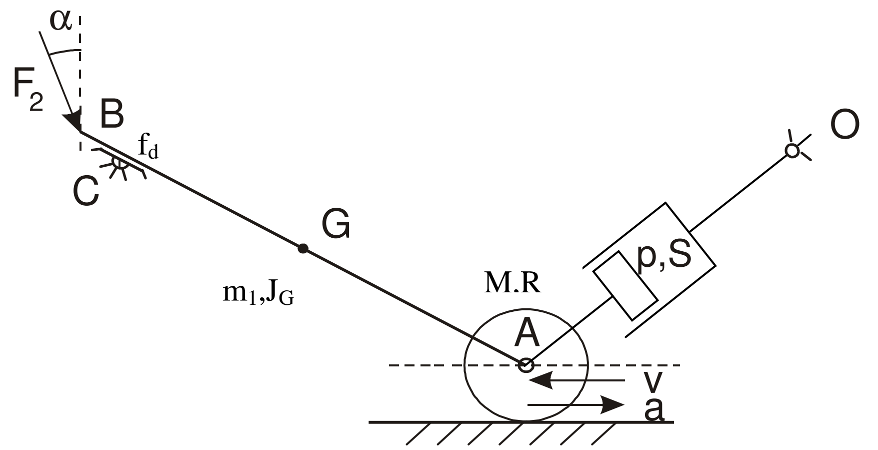
MECCANICA APPLICATA ALLE MACCHINE
Allievi meccanici AA.2011-2012 prova del 11-09-2012

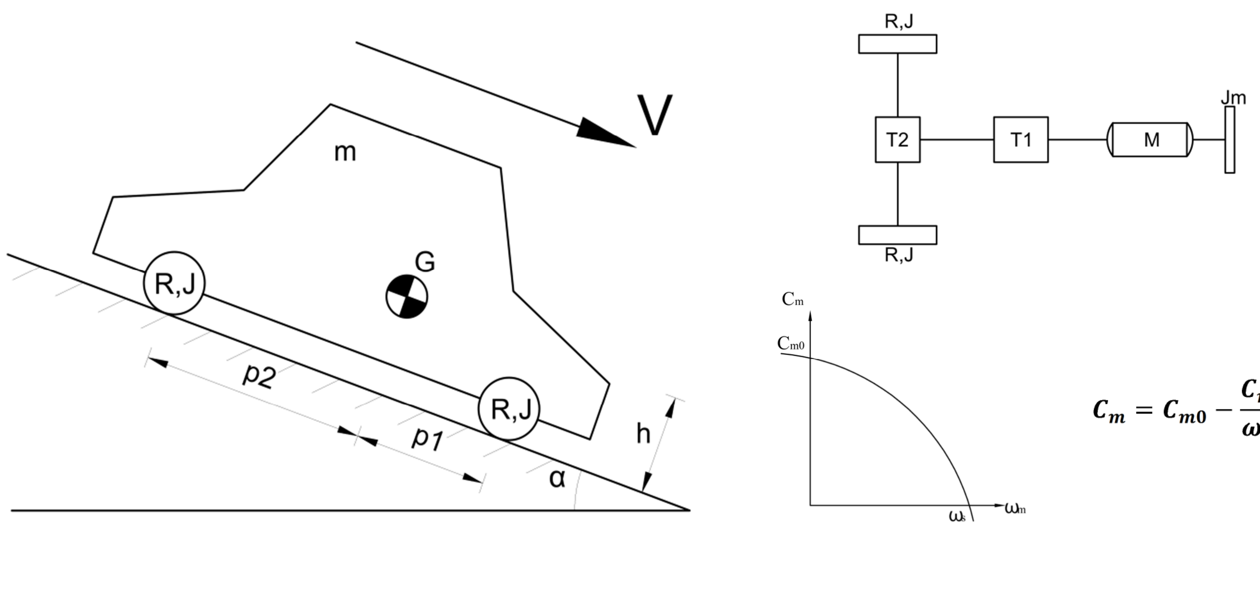
Problema N.1

Il sistema meccanico illustrato in figura giace in un piano verticale. L'asta AB è incernierata in A ad un disco omogeneo di raggio R e massa M, che rotola senza strisciare su un piano orizzontale con resistenza al rotolamento trascurabile. L'asta AB è inoltre vincolata da una guida orientabile scabra rappresentata in figura dal vincolo pattino-cerniera situato in C (bilatero). Nel punto di estremità B dell'asta è applicata una forza F_2, di modulo e direzione costante, sempre orientata con un angolo α rispetto alla direzione verticale. L'asta AB ha massa m_1, momento di inerzia baricentrico J_G e lunghezza L, con il baricentro G posto ad L/2.
Nel centro del disco A è incernierato lo stelo di un attuatore idraulico, di massa e momento di inerzia trascurabili, con pressione pari a p e con superficie del pistone pari ad S. Il cilindro dell'attuatore è a sua volta incernierato a terra nel punto O.
Nell'istante considerato il centro A del disco si muove con velocità **v** ed accelerazione **a** assegnate, secondo i versi indicati in figura.
Supponendo note tutte le grandezze geometriche e la posizione del sistema nell'atto di moto rappresentato in figura, si chiede di:

1) determinare i vettori velocità angolare ed accelerazione angolare dell'asta AB;
2) determinare i velocità ed accelerazione del baricentro G dell'asta AB;
3) calcolare le azioni scambiate in C tra il pattino e l'asta AB, considerando un coefficiente di attrito dinamico f_d nel contatto tra asta e pattino;
4) calcolare la velocità di sfilo del pistone;
5) calcolare la pressione p che garantisce l'atto di moto assegnato, in presenza di attrito dinamico nel contatto tra l'asta ed il pattino in C.



Problema N.2



$$C_m = C_{m0} - \frac{C_{m0}}{\omega_s^2}\omega_m^2$$

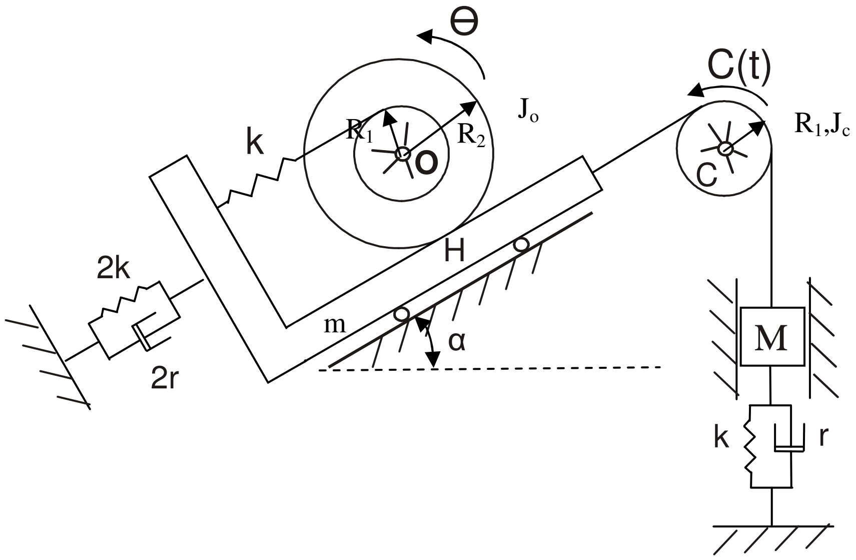
MECCANICA APPLICATA ALLE MACCHINE
Allievi meccanici AA.2011-2012 prova del 11-09-2012

Il sistema in figura rappresenta un'automobile che procede in discesa lungo un piano inclinato, con vincoli di puro rotolamento tra ruote e piano. Siano m la massa totale del veicolo, J il momento di inerzia di ciascuna delle quattro ruote di raggio R (si trascuri invece la massa delle ruote). Si consideri una resistenza al rotolamento fra le ruote del veicolo ed il piano inclinato (coefficiente f_v).
Il moto è garantito da un motore M di caratteristica assegnata. Il sistema di trasmissione a valle del motore è costituito da due trasmissioni in serie: la prima di rapporto τ_1 e rendimenti η_{d1}, η_{r1}, la seconda di rapporto τ_2 e rendimenti η_{d2}, η_{r2}. Gli alberi in uscita dalla seconda trasmissione, collegati alle due ruote posteriori, hanno la medesima velocità angolare.
Si chiede di calcolare, <u>discutendo la condizione di moto diretto o retrogrado per mezzo dei dati forniti in tabella</u>:

1) La coppia motrice C_m da fornire per garantire un'accelerazione del veicolo in discesa pari a 2 m/s^2.
2) La verifica di aderenza sulle ruote motrici nelle condizioni del punto 1.
3) La velocità V di discesa a regime.

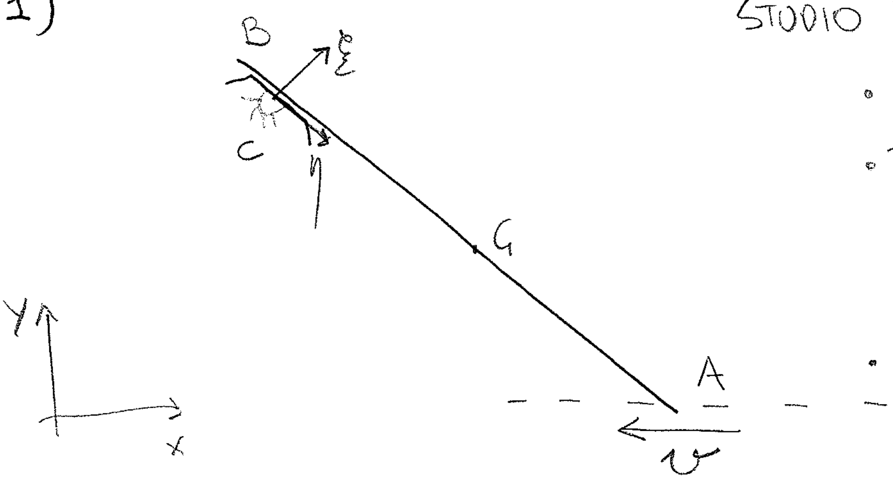
m	1200 kg	τ_1	0.30
J	0.75 kgm^2	τ_2	0.25
R	0.25 m	f_v	0.01
α	10°		

Problema N.3



Il sistema rappresentato in figura si trova nel piano verticale. Una coppia di dischi solidali tra loro, di raggio R_1 ed R_2 e momento di inerzia complessivo J_o, è incernierata a terra nel punto O. Un carrello di massa m è vincolato a scorrere su un piano inclinato di un angolo α rispetto all'orizzontale, ed è vincolato al disco di raggio maggiore R_2 nel punto H mediante un vincolo di rotolamento senza strisciamento. Sul disco di raggio minore R_1 si avvolge senza strisciare una fune inestensibile di massa trascurabile che termina con una molla di rigidezza k, la cui estremità sinistra è vincolata al carrello. L'estremità sinistra del carrello è a sua volta collegata a terra mediante un gruppo molla-smorzatore di rigidezza 2k e smorzamento 2r. L'estremità destra del carrello è collegata ad una fune inestensibile di massa trascurabile che viene rinviata da una puleggia, di raggio R_1 e momento di inerzia J_C, incernierata a terra nel centro C. La fune è quindi collegata ad una massa M vincolata a traslare in direzione verticale e a sua volta collegata a terra mediante un gruppo molla-smorzatore di rigidezza k e smorzamento r.
Determinare:
1) l'equazione di moto del sistema nell'intorno della posizione di equilibrio statico, utilizzando come variabile indipendente la rotazione Θ indicata in figura;
2) la risposta a regime del sistema e la zona di funzionamento dello stesso, sapendo che R_2=0.4m, R_1=0.2m, k=3000N/m, m=20kg, J_0=2.2kgm^2, J_c=1.5 kgm^2, M=10 kg, r=30 Ns/m, $C(t)=C_0\cos(\Omega t)$ con Ω=5rad/s.

1.1)

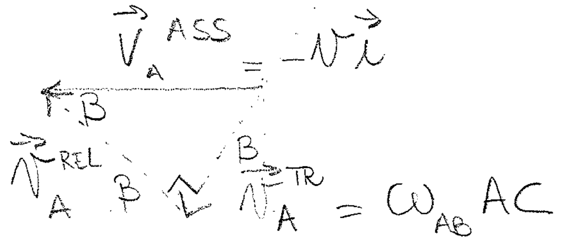


STUDIO IL MOTO DEL PUNTO A

- MOTO ASSOLUTO A: RETTILINEO
- TRASCINAMENTO: CIRCONFERENZA DI CENTRO C E RAGGIO AC
- RELATIVO: RETTILINEO LUNGO ASSE y

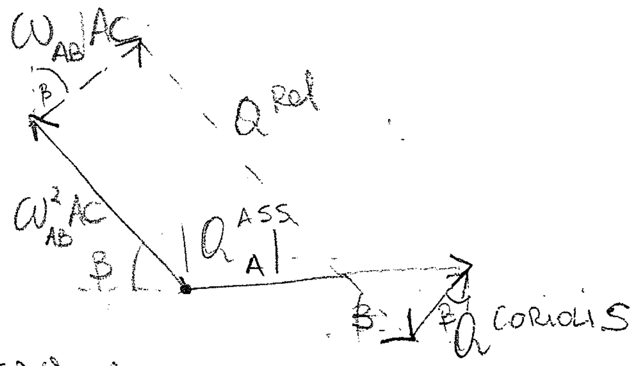
$$\vec{v}_A^{\,ASS} = \vec{v}_A^{\,TR} + \vec{v}_A^{\,REL}$$

v	? $\omega_{AB} AC$	v_{REL} ?
$//x$	$\perp AC$	$//AC$



$$\vec{v}_e^{\,REL} = V\cos\beta\, e^{i(\pi-\beta)}$$

$$\vec{\omega}_{AB} = -\frac{V\sin\beta}{AC}\vec{K}$$



$$\vec{a}_A^{\,ASS} = \vec{a}_{A,n}^{\,TR} + \vec{a}_{A,t}^{\,TR} + \vec{a}_A^{\,rel} + \vec{a}_A^{\,COR}$$

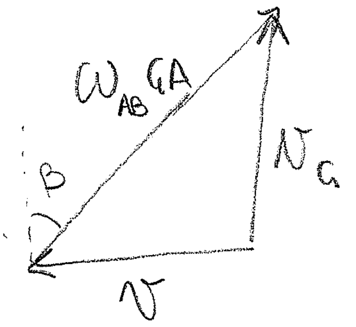
a	$\omega_{AB}^2 AC$	$\dot{\omega}_{AB} AC$?	a_{REL} ?	$2\omega v_{rel}$
$//x$	$//AC$	$\perp AC$	$//AC$	$\perp AC$

$$\begin{cases} \dot{\omega}_{AB} AC\sin\beta - \omega_{AB}^2 AC\cos\beta + a^{Rel}\cos\beta + 2\omega_{AB} V_{rel}\sin\beta = a \\ \dot{\omega}_{AB} AC\cos\beta + \omega_{AB}^2 AC\sin\beta - a^{Rel}\sin\beta + 2\omega_{AB} V_{rel}\cos\beta = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \dot{\omega}_{AB},\ a^{Rel}$$

1.2) TEO DI RIVALS

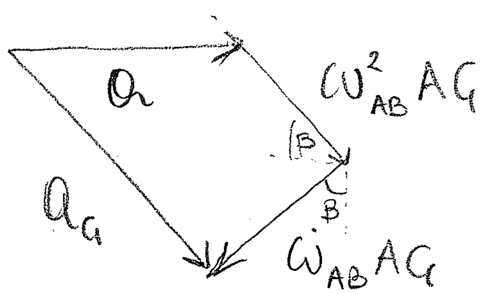
$$\vec{v}_G = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{AB} \wedge (G-A)$$



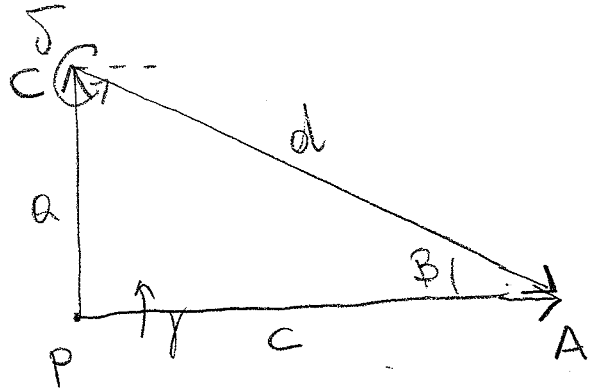
$$\begin{cases} v_{Gx} = -v + \omega_{AB} GA \sin\beta \\ v_{Gy} = \omega_{AB} GA \cos\beta \end{cases}$$

$$\vec{a}_G = \vec{a}_A + \dot{\omega}_{AB} \wedge (G-A) + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge (G-A)\right)$$

$$\begin{cases} a_{Gx} = a + \omega_{AB}^2 AG \cos\beta - \dot{\omega}_{AB} AG \sin\beta \\ a_{Gy} = -\omega_{AB}^2 AG \sin\beta - \dot{\omega}_{AB} AG \cos\beta \end{cases}$$



EQUAZIONE DI CHIUSURA (ALTERNATIVO)



COST	VAR
$a, \alpha = \frac{\pi}{2}$	
$\gamma = 0$	c
	d, δ

$\dot{c} = -v$

$\vec{\omega}_{AB} = \dot{\delta} \vec{k}$

$$a e^{i\alpha} + d e^{i\delta} = c \underbrace{e^{i\gamma}}_{=1}$$

$$\begin{cases} a \underbrace{\cos\alpha}_{=0} + d\cos\delta = c \underbrace{\cos\gamma}_{=1} \\ a \underbrace{\sin\alpha}_{=1} + d\sin\delta = c \underbrace{\sin\gamma}_{=0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} d\cos\delta = c \\ a + d\sin\delta = 0 \end{cases}$$

$$\dot{d} e^{i\delta} + d\dot{\delta} e^{i(\delta + \frac{\pi}{2})} = \dot{c}$$

$$\begin{cases} -d\dot\delta\sin\delta + \dot d\cos\delta = \dot c \\ \dot d\sin\delta + d\dot\delta\cos\delta = 0 \end{cases} \qquad \dot d = -\frac{d\dot\delta\cos\delta}{\sin\delta}$$

$$-d\dot\delta\sin\delta - \frac{d\dot\delta\cos\delta\cos\delta}{\sin\delta} = \dot c$$

$$-d\dot\delta\,\frac{\overbrace{\sin\delta^2+\cos\delta^2}^{1}}{\sin\delta} = \dot c \Rightarrow \frac{-d\dot\delta}{\sin\delta} = \dot c \Rightarrow \dot\delta = -\frac{\dot c\sin\delta}{d}$$

NOTA:

$\dot c > 0$ SE $\vec v$ VERSO DESTRA.

NEL NOSTRO CASO $\vec v$ VERSO SINISTRA $\Rightarrow \dot c < 0$;

ESSENDO INOLTRE $\sin\delta < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ per $\vec v$ VERSO SINISTRA $\to \dot\delta < 0$ IN MANIERA, $\dot d < 0$

IN ACCORDO CON QUANTO OTTENUTO CON I MOTI RELATIVI

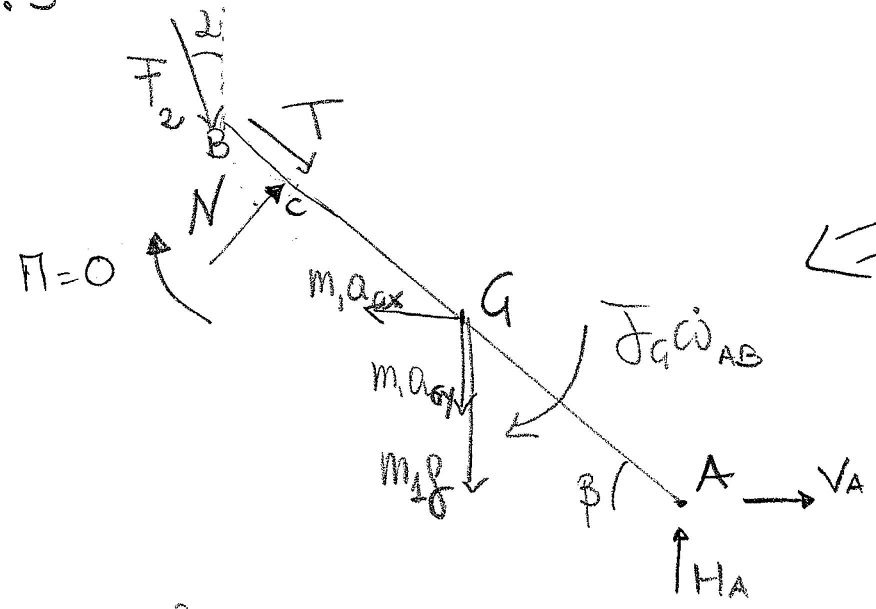
$$\vec\omega_{AB} = -\frac{V\sin\beta}{AC}, \quad (\sin\delta = -\sin\beta,\ AC = d)$$

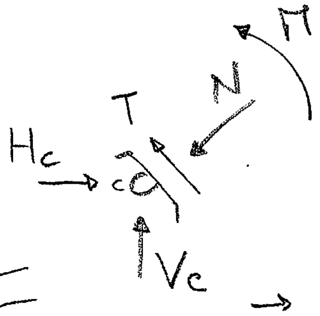
$$\underbrace{\ddot d e^{i\delta}}_{a^{REL}} \underbrace{+2\dot d\dot\delta e^{i\left(\delta+\frac{\pi}{2}\right)}}_{a^{CORIOLIS}} \underbrace{+ d\ddot\delta e^{i\left(\delta+\frac{\pi}{2}\right)}}_{a_{T}^{TR}} \underbrace{-d\dot\delta^2 e^{i\delta}}_{a_{n}^{TR}} = \underbrace{\ddot c}_{a}$$

$$\begin{cases} -d\ddot\delta\sin\delta - d\dot\delta^2\cos\delta - 2\dot d\dot\delta\sin\delta + \ddot d\cos\delta = \ddot c \\ d\ddot\delta\cos\delta - d\dot\delta^2\sin\delta + 2\dot d\dot\delta\cos\delta + \ddot d\sin\delta = 0 \end{cases} \Rightarrow \ddot\delta, \ddot d$$

ESSENDO $\sin\delta = -\sin\beta$ e $\cos\delta = \cos\beta$, $\ddot\delta\vec k = \dot{\vec\omega}_{AB}$, $\ddot d = a_{rel}$

1.3



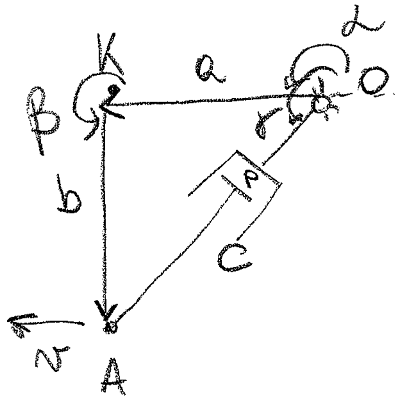


$$\Sigma \vec{M}_c = 0$$
$$M = 0$$

$$T = f_d N$$

$$\Sigma \vec{M}^*_A = 0 \quad F_2 \cos\alpha\, AB \cos\beta - F_2 \sin\alpha\, AB \sin\beta - N \qquad - J_G \dot\omega_{AB} +$$
$$+ m_1 a_{Gx}\, GA \sin\beta + m_1 a_{Gy}\, GA \cos\beta + m_1 g\, GA \cos\beta = 0$$
$$\Rightarrow N$$

1.4



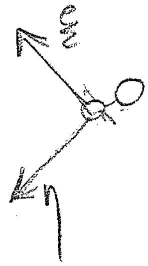
COST	VAR
α	a $(\dot a = V)$
b, β	
	c, γ

$$a e^{i\alpha} + b e^{i\beta} = c e^{i\gamma} \qquad \begin{cases} -a = c\cos\gamma \\ -b = c \sin\gamma \end{cases}$$
$$\dot a e^{i\alpha} = \dot c e^{i\gamma} + c\dot\gamma e^{i(\gamma + \frac{\pi}{2})}$$

$$\begin{cases} -\dot a = \dot c \cos\gamma - c\dot\gamma \sin\gamma \\ 0 = \dot c \sin\gamma + c\dot\gamma\cos\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot\gamma = \dfrac{\dot a \sin\gamma}{c} \\ \dot c = -\dfrac{c\dot\gamma\cos\gamma}{\sin\gamma} = -\dot a \cos\gamma \end{cases}$$

MOTI RELATIVI (IN ALTERNATIVA)

TERNA ROTANTE CON L'ATTUATORE OA

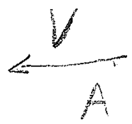


MOTO DEL PUNTO A:

ASSOLUTO: RETTILINEA $// X$

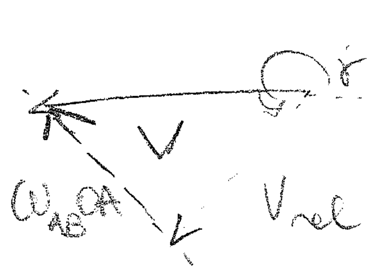
TRASCINAMENTO: CIRCONFERENZA DI CENTRO O E RAGGIO OA

RELATIVA: RETTILINEA $// \eta$



$$\vec{v}_A^{ASS} = \vec{v}_A^{TR} + \vec{v}_A^{Rel}$$

V	? $\omega_{AO} AO$	v_{REL} ?
$// x$	$\perp AO$	$// \eta$



$$V_{rel} = V\cos(\gamma - \pi) = -V\cos\gamma$$

1.5 $\quad W + W' = \dfrac{dE_c}{dt}$

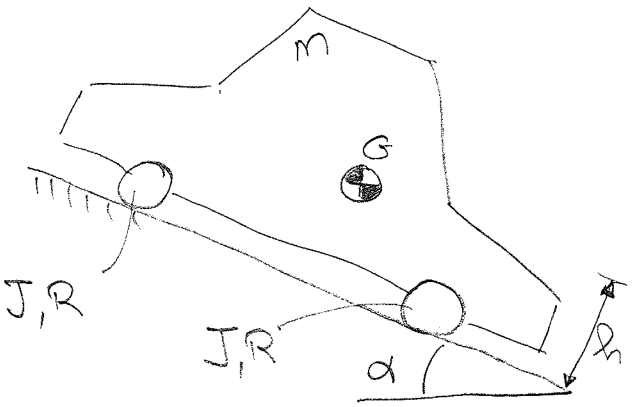
$$pS\dot{c} - m_1 g \cdot v_{Gy} - F_2 \cos\alpha \, V_{By} + F_2 \sin\alpha \, V_{Bx} - T \cdot \dot{d} =$$

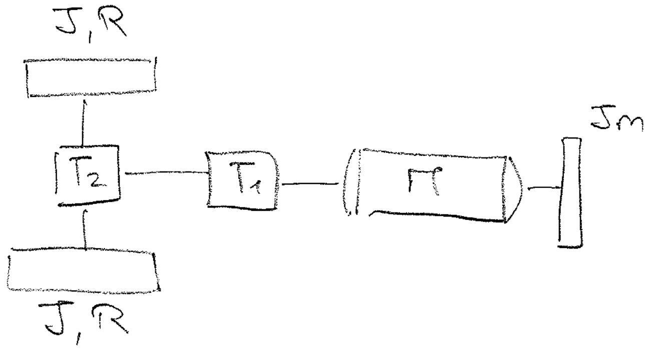
$$= \underbrace{+ m_1 \vec{a}_G \cdot \vec{v}_G + J_G \vec{\omega}_{AB} \cdot \dot{\vec{\omega}}_{AB} + M \vec{\omega}_d \cdot \dot{\vec{\omega}}_d + M \vec{v} \cdot \vec{a}}_{\text{CON I PROPRI SEGNI}}$$

$$\vec{\omega}_d = \frac{v}{R}\vec{k} \qquad \vec{V} = -V\vec{i}$$

$$\dot{\vec{\omega}}_d = -\frac{a}{R}\vec{k} \qquad \vec{a} = +a\vec{i}$$

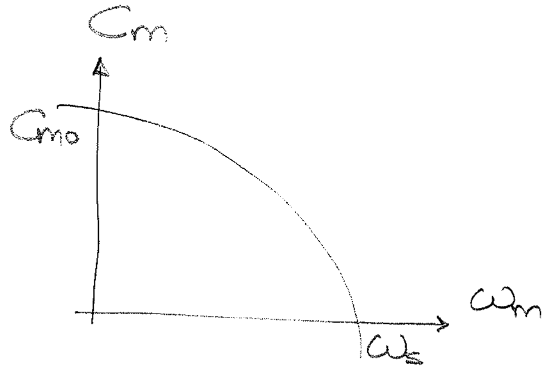
Problema 2



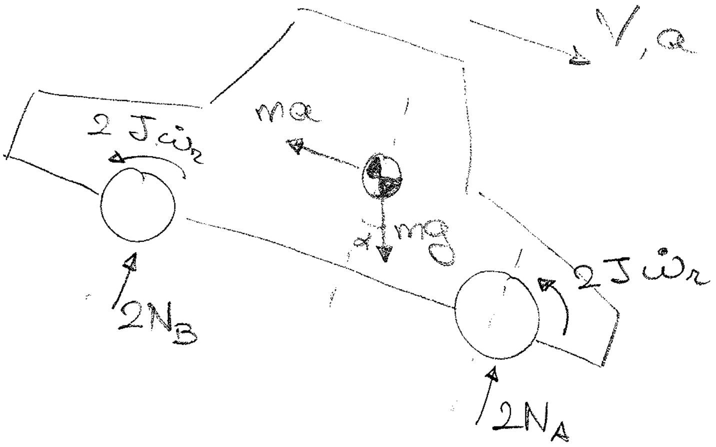


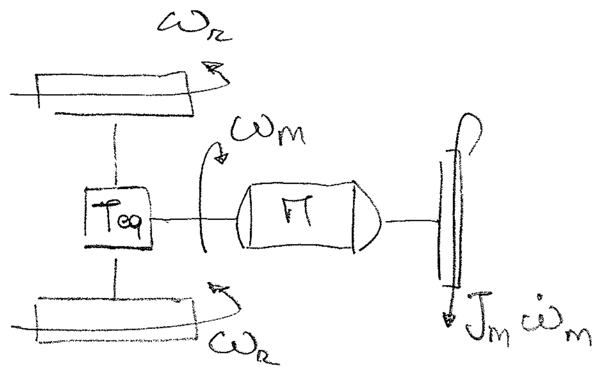
$m = 1200\ kg$
$J = 0{,}75\ kg\,m^2$
$R = 0{,}25\ m$
$\alpha = 10°$

$\tau_1 = 0{,}30$
$\tau_2 = 0{,}25$
$f_v = 0{,}01$



1) C_m per garantire $a = 2\ \frac{m}{s^2}$ in discesa:





$$W_1 = C_m\omega_m - J_m\dot{\omega}_m\omega_m$$

$$W_2 = Mg\sin\alpha V - 2N_A u\,\omega_r - 2N_B u\,\omega_r - maV - 4J_r\dot{\omega}_r\omega_r$$

Legami cinematici:

$\tau_{eq} = \tau_2\tau_1$ $\qquad \omega_r = \tau_{eq}\omega_m \qquad \dot{\omega}_r = \tau_{eq}\dot{\omega}_m$

$\eta_{D,eq} = \eta_{D1}\eta_{D2}$ $\qquad V = R\omega_r = R\tau_{eq}\omega_m \qquad a = R\tau_{eq}\dot{\omega}_m$

$\eta_{R,eq} = \eta_{R1}\eta_{R2}$

$\Sigma F_V = 0 \implies 2N_A + 2N_B = mg\cos\alpha$

$u = f_v R$

$$\Rightarrow W_2 = mg(\sin\alpha - f_v\cos\alpha)R\,\tau_{eq}\,\omega_m - (mR^2+4J)\,\tau_{eq}^2\,\dot\omega_m\,\omega_m$$

$$\overset{!}{=} -10{,}66\cdot\omega_m < 0 \Rightarrow \text{MOTO DIRETTO!!}$$

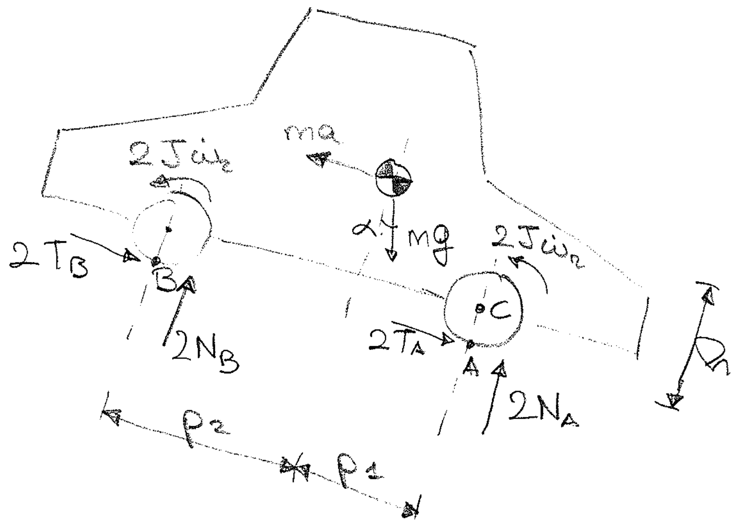
$$W_p = -(1-\eta_{D,eq})(C_m\omega_m - J_m\dot\omega_m\omega_m)$$

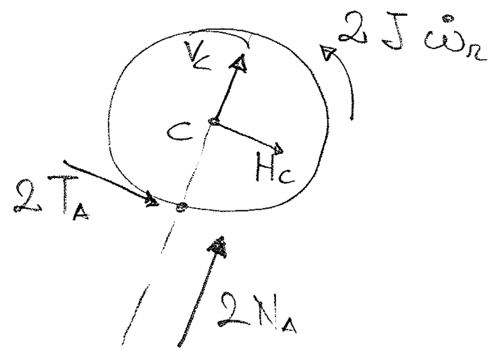
$$\cancel{C_m\omega_m - J_m\dot\omega_m\omega_m} + mg(\sin\alpha - f_v\cos\alpha)R\,\tau_{eq}\,\cancel{\omega_m} +$$

$$-(mR^2+4J)\,\tau_{eq}^2\,\dot\omega_m\,\cancel{\omega_m} - (\cancel{1}-\eta_{D,eq})(C_m\cancel{\omega_m} - J_m\dot\omega_m\cancel{\omega_m}) = 0$$

$$\boxed{C_m = \frac{\left[(mR^2+4J)\,\tau_{eq} + \eta_{D,eq}J_m\right]\dot\omega_m - mg(\sin\alpha - f_v\cos\alpha)R\,\tau_{eq}}{\eta_{D,eq}}}$$

2) Verifica dell'aderenza delle ruote motrici:



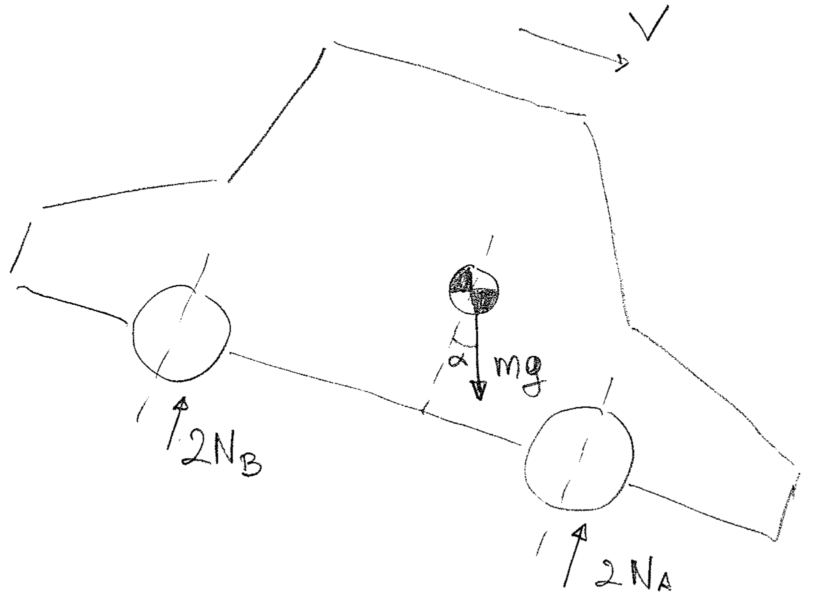


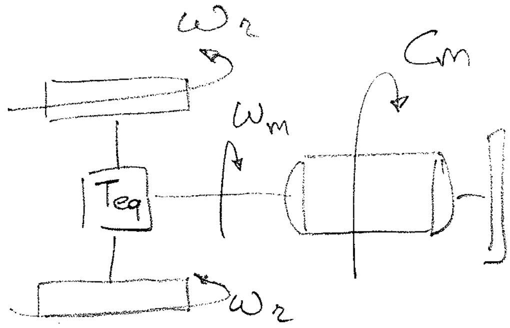
$$\begin{cases} \sum F_V^{(auto)} = 0 \\ \sum M_B^{(auto)} = 0 \\ \\ \sum F_H^{(auto)} = 0 \\ \sum M_C^{(ruota)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2N_A + 2N_B - mg\cos\alpha = 0 \\ 2N_B u + 2J\dot\omega_r + (ma - mg\sin\alpha)h - mg\cos\alpha\, p_2 + \\ + 2N_A(p_1+p_2+u) + 2J\dot\omega_r = 0 \\ 2T_A + 2T_B - ma + mg\sin\alpha = 0 \\ 2J\dot\omega_r + 2T_A R + 2N_A u = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_A \\ N_B \\ T_B \\ T_A \end{cases}$$

Verifica di aderenza: $\boxed{T_B \le f_s N_B}$

3) Velocità V dell'automobile a regime in discesa: 8





$W_1 = C_m \omega_m$

$W_2 = mg \sin\alpha \, V - 2N_A u \omega_r - 2N_B u \omega_r$

$\overset{!}{=} mg(\sin\alpha - f_v \cos\alpha) R \tau_{eq} \omega_m$

$\overset{!}{=} +36,14 \cdot \omega_m \quad > 0 \quad \Rightarrow$ MOTO RETROGRADO !!

$W_P = -(1-\eta_{R,eq})\, mg(\sin\alpha - f_v\cos\alpha) R \tau_{eq} \omega_m$

$C_m \cancel{\omega_m} + \cancel{mg(\sin\alpha - f_v\cos\alpha) R \tau_{eq} \omega_m} - (\cancel{1} - \eta_{R,eq})\, mg(\sin\alpha - f_v\cos\alpha) R \tau_{eq} \cancel{\omega_m} = 0$

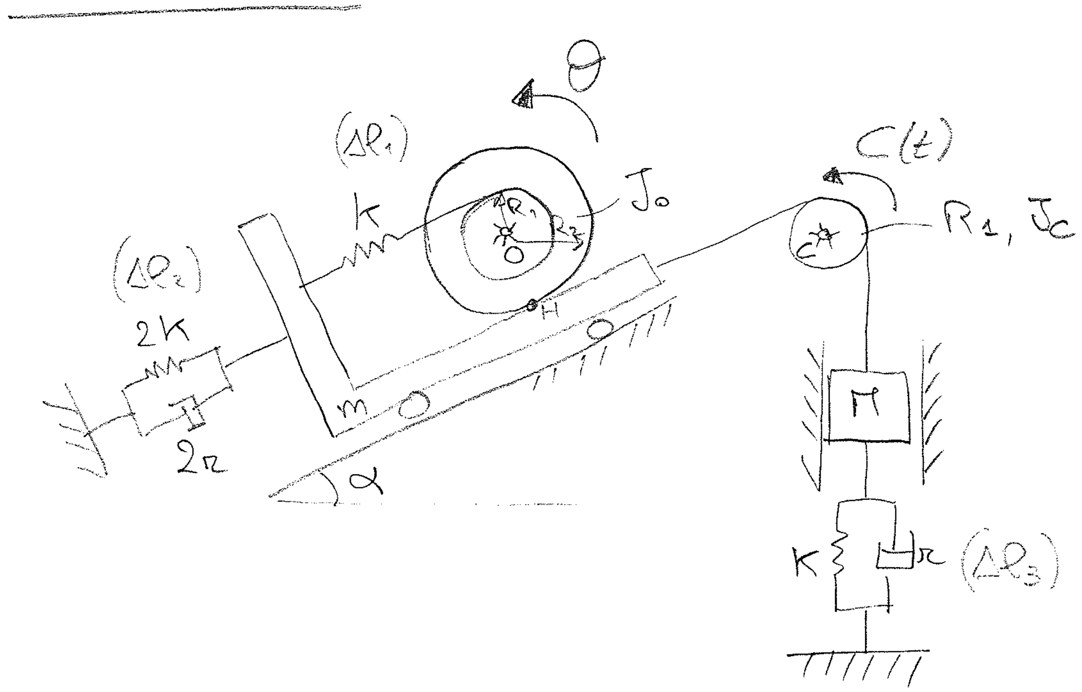
$\Rightarrow C_{m,reg} = -\eta_{R,eq}\, mg(\sin\alpha - f_v\cos\alpha) R \tau_{eq}$

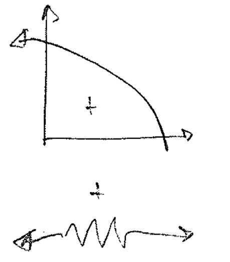
Con la curva caratteristica del motore ricavo $\omega_{m,reg}$:

$$C_m = C_{m0} - \frac{C_{m0}}{\omega_s^2}\omega_m^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_{m,reg} = \sqrt{\frac{C_{m0} - C_m}{C_{m0}}\, \omega_s^2}}$$

Problema 3





1 gdl: ϑ

1) Equazione del moto perturbato:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot\vartheta}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial \vartheta} + \frac{\partial D}{\partial \dot\vartheta} + \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = Q_\vartheta$$

legami cinematici:

$V_{car} = R_2 \dot\vartheta$ $\quad \Delta l_1 = -(R_1+R_2)\vartheta$ $\quad \delta^*\vartheta_c = -\frac{R_2}{R_1}\delta^*\vartheta$

$\omega_c = -\frac{R_2}{R_1}\dot\vartheta$ $\quad \Delta l_2 = R_2\vartheta$ $\quad \Delta\dot l_2 = R_2\dot\vartheta$

$V_M = -R_2\dot\vartheta$ $\quad \Delta l_3 = -R_2\vartheta$ $\quad \Delta\dot l_3 = -R_2\dot\vartheta$

$h_M = -R_2\vartheta$

$h_m = R_2\vartheta\cos\alpha$

$$E_c = \frac{1}{2}\left[J_0 + mR_2^2 + J_c\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 + MR_2^2\right]\dot\vartheta^2 = \frac{1}{2}J^*\dot\vartheta^2$$

$$D = \frac{1}{2}\left(2rR_2^2 + rR_2^2\right)\dot\vartheta^2 = \frac{1}{2}r^*\dot\vartheta^2$$

$$V = \frac{1}{2}\left[k(R_1+R_2)^2 + 2kR_2^2 + kR_2^2\right]\vartheta^2 = \frac{1}{2}k^*\vartheta^2$$

$$Q_\vartheta = -\frac{R_2}{R_1}C(t)$$

NB: tutti i legami cinematici sono lineari, quindi i termini legati alla forza peso si semplificano coi precarichi statici delle molle.

Equaz. moto perturbato:

$$\boxed{J^* \ddot{\bar{\vartheta}} + r^* \dot{\bar{\vartheta}} + K^* \bar{\vartheta} = -\frac{R_2}{R_1} C(t)}$$

2) Soluzione a regime:

$$J^* \ddot{\bar{\vartheta}} + r^* \dot{\bar{\vartheta}} + K^* \bar{\vartheta} = \mathrm{Re}\left(-\frac{R_2}{R_1} C_0 e^{i\Omega t}\right)$$

soluz. $\bar{\vartheta}(t) = \bar{\vartheta}_0 e^{i\Omega t}$

$$\Rightarrow \bar{\vartheta}_0 = \frac{-R_2/R_1 \cdot C_0}{-J^*\Omega^2 + K^* + i\Omega r^*}$$

$$|\bar{\vartheta}_0| = \frac{C_0 \frac{R_2}{R_1} / K^*}{\sqrt{(1-a^2)^2 + (2ah)^2}} \qquad \psi = \mathrm{arctg}\left(-\frac{2ah}{1-a^2}\right)$$

$$\boxed{\vartheta(t) = |\bar{\vartheta}_0| \cos(\Omega t + \psi + \pi)}$$

$J^* = 13 \ \mathrm{kg\,m^2}$

$r^* = 14{,}4 \ \mathrm{Nsm}$

$K^* = 2520 \ \mathrm{Nm}$

$$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{K^*}{J^*}} = 13{,}92 \ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

$$h = \frac{r^*}{2 J^* \omega_0} = 0{,}04$$

$$a = \frac{\Omega}{\omega_0} = 0{,}36 \Rightarrow \boxed{\text{ZONA QUASI STATICA}}$$