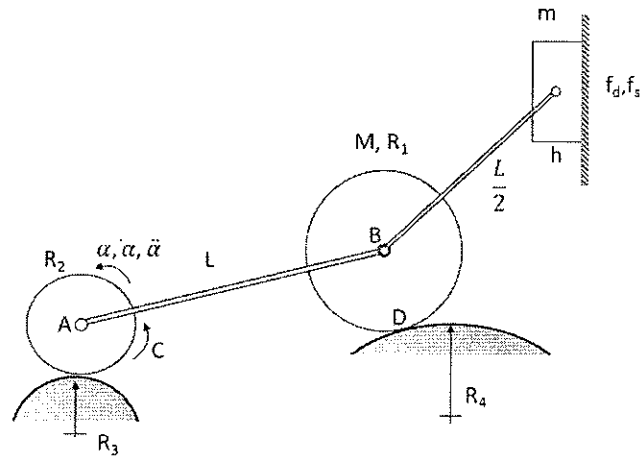


Problema N.1

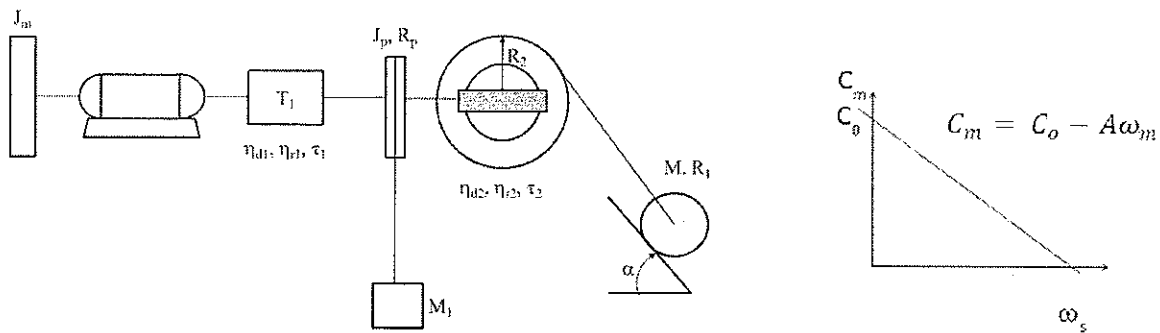


Il meccanismo indicato in figura è posto nel piano verticale e risulta di caratteristiche geometriche note. Sono note la massa M del disco di raggio R_1 e la massa m del corsoio, mentre il disco di raggio R_2 e le due aste sono considerate privi di massa. Entrambi i dischi rotolano senza strisciare sulle guide curvilinee rispettivamente di raggio R_3 ed R_4 . Sono noti il coefficiente di attrito statico e dinamico tra corsoio e guida rettilinea, si ipotizza assente l'attrito volvente fra i dischi e le rispettive guide.

Al disco di raggio R_2 è applicata una coppia C e sono note velocità ed accelerazione angolare $\dot{\alpha}$, $\ddot{\alpha}$.
 Si determinino:

1. Velocità e accelerazione del centro B del disco di massa M
2. Velocità e accelerazione del corsoio di massa m
3. Il momento motore C al fine di garantire il moto, considerando NULLO l'attrito dinamico tra corsoio e guida rettilinea.
4. Il momento motore C al fine di garantire il moto considerando attrito dinamico fra corsoio e guida.
5. La verifica di aderenza in D .

Problema N.2



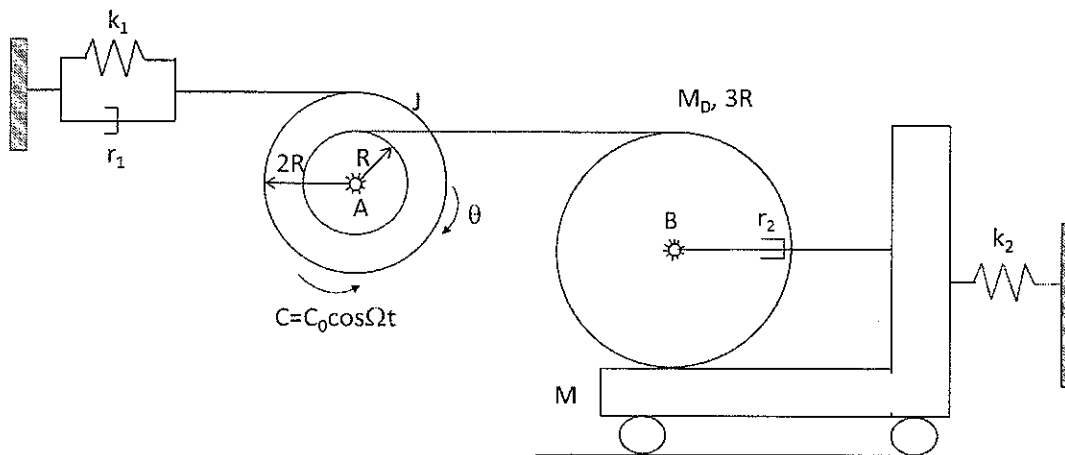
M_1	5	kg
M	5	kg
R_1	1	m
α	10°	
f_v	0.1	

Il sistema in figura è costituito da una macchina ad un grado di libertà. Sono presenti due trasmissioni in serie: la prima è realizzata mediante un riduttore ad ingranaggi con rapporto di trasmissione e rendimento pari rispettivamente a τ_1 e η_{d1}, η_{r1} , mentre la seconda è costituita da una vite senza fine, caratterizzata da rapporto di trasmissione e rendimento τ_2 e η_{d2}, η_{r2} . Tra le due trasmissioni si trova una puleggia di raggio R_p e momento d'inerzia J_p , che solleva una massa M_1 . L'utilizzatore a valle della seconda trasmissione è costituito da un disco di massa M e raggio R_1 che rotola senza strisciare su un piano inclinato di angolo α . Il centro del disco è collegato alla puleggia di raggio R_2 tramite fune inestensibile parallela al piano inclinato.

Noti i dati in tabella, da utilizzarsi ai fini della discussione del flusso di potenza, e la legge di funzionamento del motore, si richiede di identificare:

1. la coppia del motore per garantire un'accelerazione in discesa del disco di 3 m/s^2 , considerando la massa M_1 in salita;
2. la ω del motore per garantire a regime la salita della massa M_1 e la discesa del disco di massa M

Problema N.3



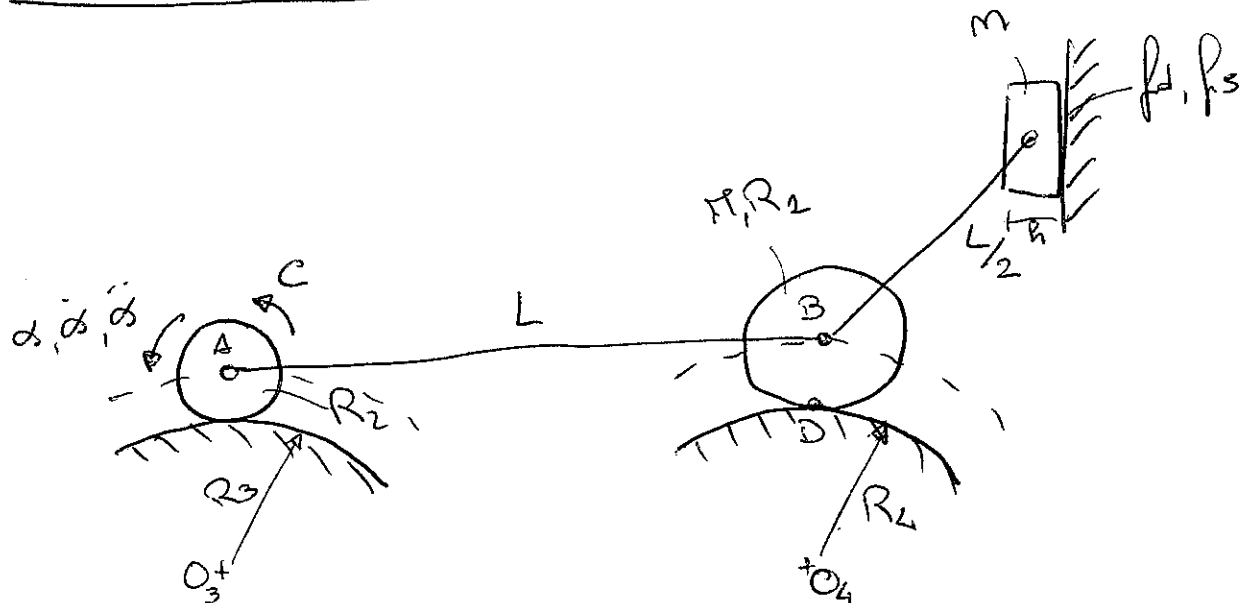
r_1	3000	Ns/m		M	200	kg
r_2	1000	Ns/m		M_d	50	kg
k_1	1,00E+04	N/m		R	1	m
k_2	5,00E+04	N/m		C_0	7	Nm
J	100	kgm ²		Ω	30	rad/s

Il sistema rappresentato in figura è posto nel piano orizzontale. Una coppia di dischi solidali tra loro, di raggi R e $2R$ e momento d'inerzia complessivo J , è vincolata a terra in A . Sul disco di raggio $2R$ si avvolge una fune inestensibile collegata ad un gruppo molla smorzatore. Una seconda fune si avvolge sul disco di raggio R e, all'altra estremità, su un disco di raggio $3R$ e massa M_d , vincolato a terra in B , che rotola senza strisciare su un carrellino di massa M . Il carrellino è vincolato a traslare su una guida rettilinea, ed è collegato a terra con una molla di rigidità k_2 , al centro del disco con uno smorzatore viscoso r_2 . Sul sistema di dischi è applicata una coppia $C(t) = C_0 \cos(\Omega t)$. Si richiede di calcolare, noti i dati riportati in tabella e data la coordinata libera θ :

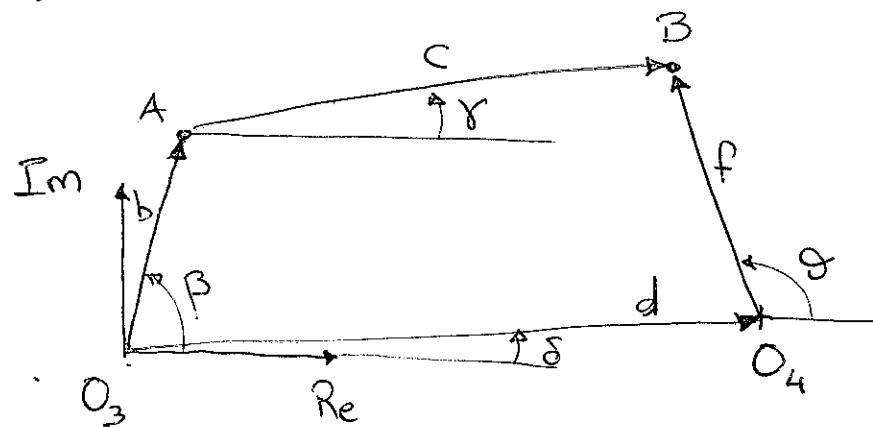
1. l'equazione di moto del sistema.
2. la frequenza propria del sistema smorzato.
3. La risposta a regime del sistema. Si richiede inoltre di identificare la zona di lavoro del sistema.

Problema 1

①



1) Velocità, accelerazioni pt. B



$$\overline{O_3A} + \overline{AB} = \overline{O_3O_4} + \overline{O_4B}$$

$$be^{i\beta} + ce^{i\gamma} = de^{i\delta} + fe^{i\theta}$$

cost	var
$b = R_2 + R_3$	$\beta \rightarrow$ esprimibile in $f(\alpha)$
$c = L$	
$d = \overline{O_3O_4}$	$\gamma ?$
$f = R_1 + R_4$	$\theta ?$
δ	



$$V_A = b\dot{\beta} = R_2\dot{\alpha} \Rightarrow \dot{\beta} = \frac{R_2}{R_2 + R_3}\dot{\alpha}$$

Derivo:

$$b\dot{\beta}e^{i\beta} + c\dot{\gamma}e^{i\gamma} = f\dot{\theta}e^{i\theta}$$

$$\begin{cases} -b\dot{\beta}\sin\beta - c\dot{\gamma}\sin\gamma = -f\dot{\theta}\sin\theta \\ b\dot{\beta}\cos\beta + c\dot{\gamma}\cos\gamma = f\dot{\theta}\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\gamma} \\ \dot{\theta} \end{cases}$$

Derivo ancora:

$$\begin{cases} -b\ddot{\beta} \sin\beta - b\dot{\beta}^2 \cos\beta - c\ddot{\gamma} \sin\gamma - c\dot{\gamma}^2 \cos\gamma = -f\ddot{\theta} \sin\theta - f\dot{\theta}^2 \cos\theta \\ b\ddot{\beta} \cos\beta - b\dot{\beta}^2 \sin\beta + c\ddot{\gamma} \cos\gamma - c\dot{\gamma}^2 \sin\gamma = f\ddot{\theta} \cos\theta - f\dot{\theta}^2 \sin\theta \end{cases}$$

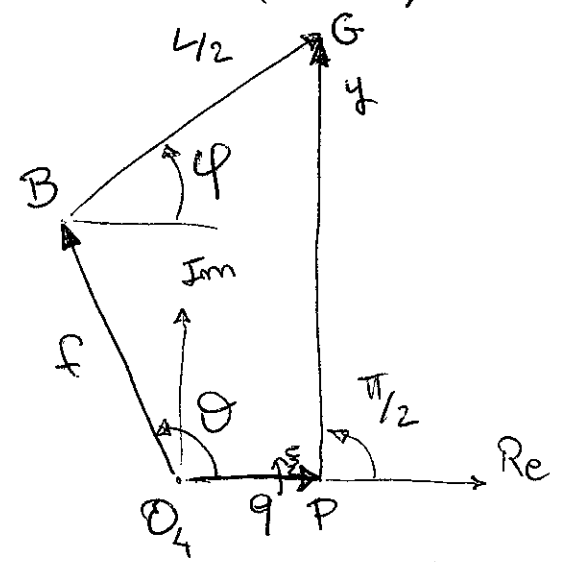
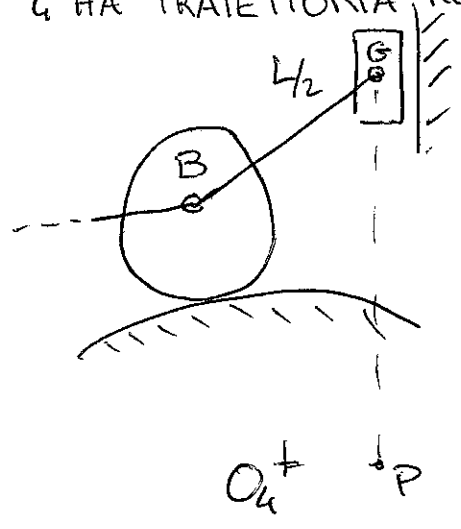
$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{\gamma} \\ \ddot{\theta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_B = f i \dot{\theta} e^{i\theta} = \boxed{f \dot{\theta} e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})}}$$

$$\vec{a}_B = -f \dot{\theta}^2 e^{i\theta} + f i \ddot{\theta} e^{i\theta} = \boxed{-f \dot{\theta}^2 e^{i\theta} + f \ddot{\theta} e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})}}$$

2) Velocità, accelerazione
G HA TRAIETTORIA RETTILINEA

corsoio (pt. G)



$$f e^{i\theta} + \frac{L}{2} e^{i\varphi} = q + iy$$

cost	var
f	θ (noto)
$q, \frac{L}{2}$	φ ?
$B_G = \frac{L}{2}$	y ?

Derivo:

$$f i \dot{\theta} e^{i\theta} + \frac{L}{2} i \dot{\varphi} e^{i\varphi} = i \dot{y} = \vec{V}_G$$

$$f \dot{\theta} \sin\theta - \frac{L}{2} \dot{\varphi} \sin\varphi = 0$$

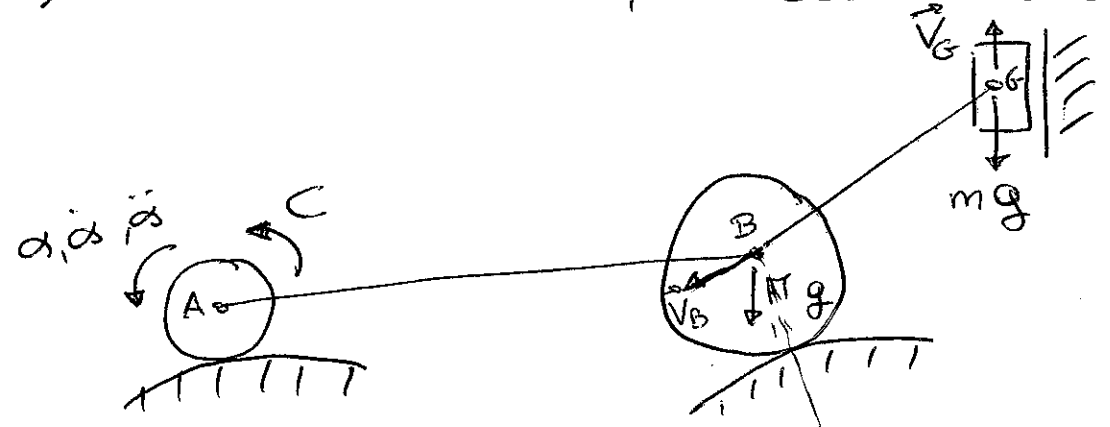
$$f \dot{\theta} \cos\theta + \frac{L}{2} \dot{\varphi} \cos\varphi = \dot{y}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\varphi} \\ \dot{y} \end{cases}$$

$$f \ddot{\theta} e^{i\theta} - f \dot{\theta}^2 e^{i\theta} + \frac{L}{2} i \ddot{\varphi} e^{i\varphi} - \frac{L}{2} \dot{\varphi}^2 e^{i\varphi} = i \ddot{y} = \vec{a}_G$$

$$\begin{cases} -f \ddot{\theta} \sin \theta - f \dot{\theta}^2 \cos \theta - \frac{L}{2} \dot{\varphi} \sin \varphi + \frac{L}{2} \dot{\varphi}^2 \cos \varphi = 0 \\ f \ddot{\theta} \cos \theta - f \dot{\theta}^2 \sin \theta + \frac{L}{2} \ddot{\varphi} \cos \varphi - \frac{L}{2} \dot{\varphi}^2 \sin \varphi = \ddot{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\varphi} \\ \ddot{y} \end{cases}$$

3) Mov. motore C, senza attrito:



$$W + W' = \frac{dE_c}{dt}$$

$$W = C \dot{\alpha} + \pi \vec{g} \cdot \vec{V}_B + m \vec{g} \cdot \vec{V}_G$$

$$= C \dot{\alpha} - m g \dot{y} - \pi g V_{B,y} \quad V_{B,y} = f \dot{\theta} \cos \theta$$

$$W' = 0$$

$$E_c = \frac{1}{2} \pi V_B^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi R_1^2}{2} \right) \omega_1^2 + \frac{1}{2} m V_G^2$$

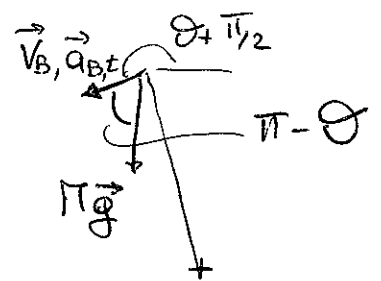
$$\frac{dE_c}{dt} = \pi V_B a_{B,t} + \frac{\pi R_1^2}{2} \omega_1 \dot{\omega}_1 + m V_G a_G$$

dove $\omega_1 = \frac{R_1 + R_4}{R_1} \dot{\theta}$

$$\dot{\omega}_1 = \frac{R_1 + R_4}{R_1} \ddot{\theta}$$

$$V_G = \dot{y} \quad a_G = \ddot{y}$$

$$|\vec{V}_B| = f \dot{\theta} \quad |\vec{a}_{B,t}| = f \ddot{\theta}$$



$$v_{B,y} = f \dot{\theta} \cos \vartheta$$

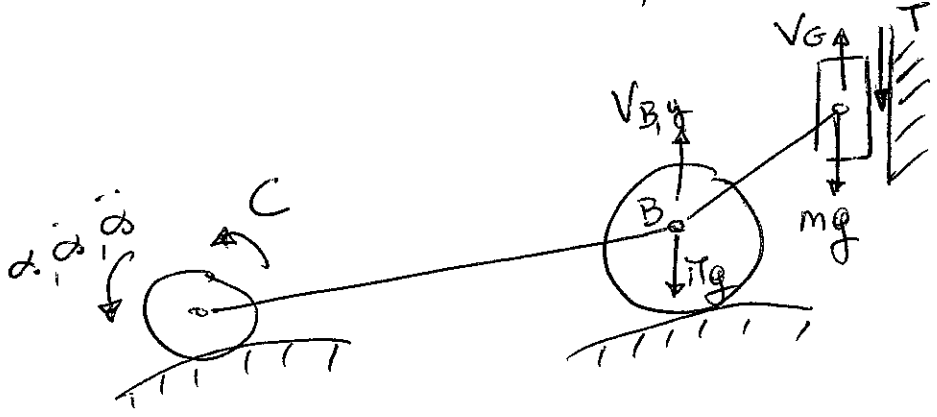
$$a_{B,y} = f \ddot{\theta} \cos \vartheta$$



$$C \ddot{\alpha} - mg \ddot{y} - \pi g f \dot{\theta} \cos \vartheta = \pi f^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + \frac{\pi R_1^2}{2} \left(\frac{R_1 + R_4}{R_1} \right)^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + m \ddot{y} \ddot{y}$$

$$\Rightarrow \boxed{C = \dots}$$

4) flow motore C, con attrito dinamico:



NB: assegnato $\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}$
 il corsoio scende $\Rightarrow T$ diretta verso l'alto, ma, secondo la convenzione usata per i numeri complessi, \vec{v}_G è diretta verso l'alto $\Rightarrow \dot{y} > 0$ quindi nel disegno indicato \vec{T} diretta verso il basso

$$W + W' = \frac{dE_c}{dt}$$

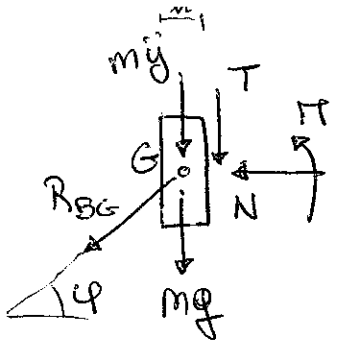
$$W = C \ddot{\alpha} - mg \ddot{y} - \pi g f \dot{\theta} \cos \vartheta$$

$$W' = -T |\vec{v}_{rel}| = -T \dot{y}$$

$$\frac{dE_c}{dt} = \pi f^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + \frac{\pi R_1^2}{2} \left(\frac{R_1 + R_4}{R_1} \right)^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + m \ddot{y} \ddot{y}$$

attrito dinamico $\Rightarrow |\vec{T}| = f_d |\vec{N}|$

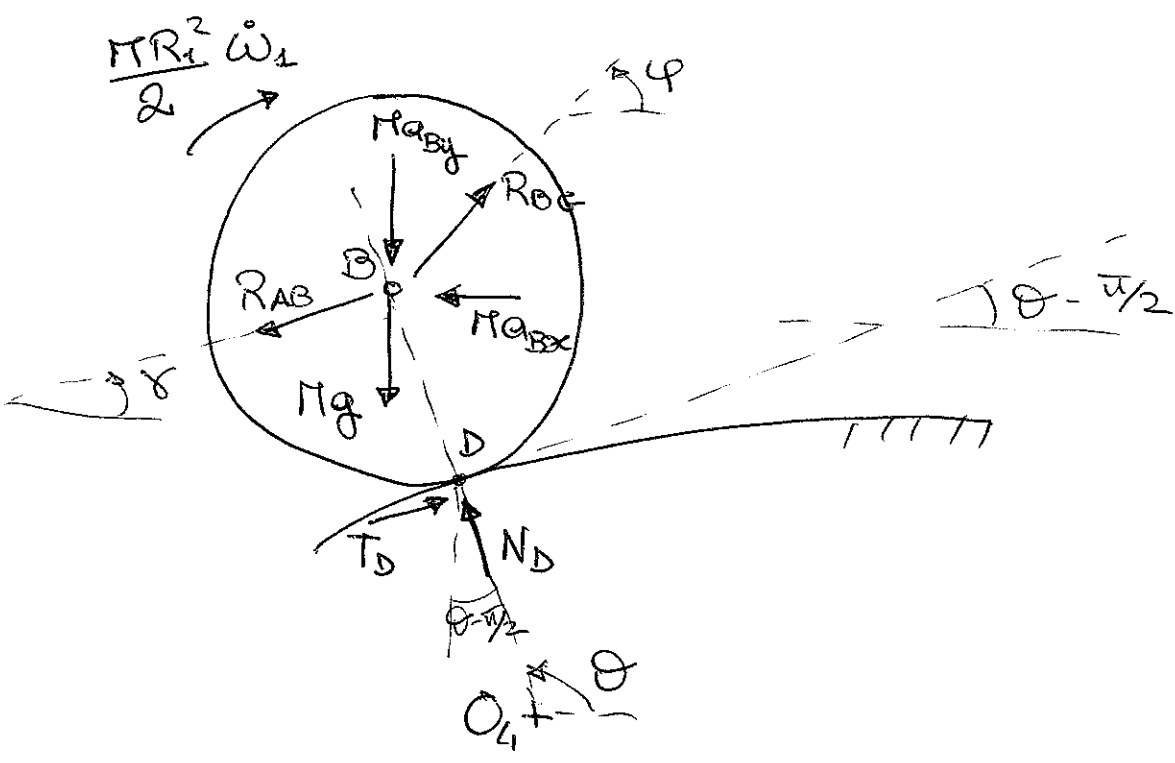
4 incognite: T, N, M, R_{BG}
 4 equazioni: 3 equaz. di equilibrio
 $|\vec{T}| = \mu_d |\vec{N}|$



$$\left(\sum M_G = 0 \right) \begin{cases} N + R_{BG} \cos \varphi = 0 \\ -m\dot{y} - mg - T - R_{BG} \sin \varphi = 0 \\ M - T \frac{h}{2} = 0 \\ T = \mu_d N \end{cases}$$

=> Metto insieme tutto e ricavo C!

5) Verifica aderenza in D



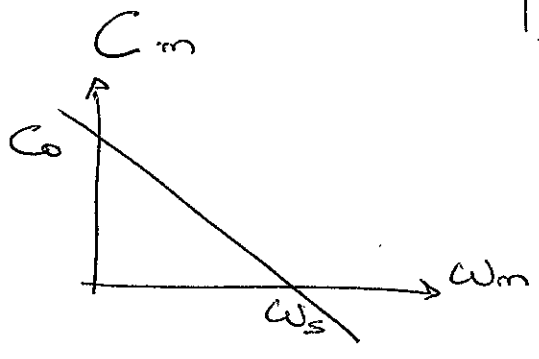
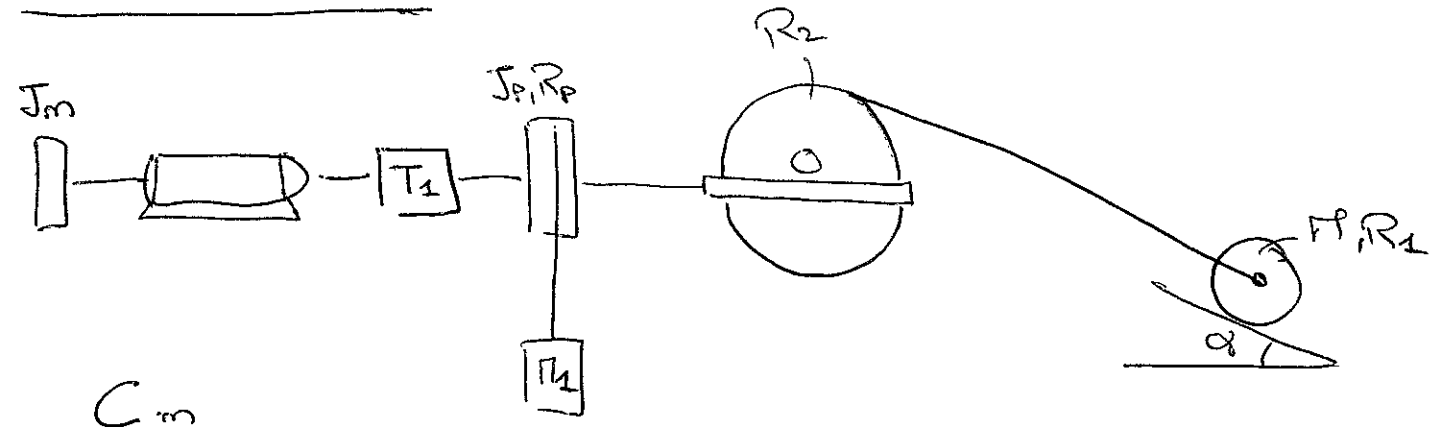
3 incognite: T_D, N_D, R_{AB}
 3 equaz. di equilibrio ($\sum F_x, \sum F_y, \sum M_B = 0$)

$$\begin{cases} -M a_{Bx} - R_{AB} \cos \gamma + R_{BG} \cos \varphi + T_D \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) - N_D \sin(\theta - \frac{\pi}{2}) = 0 \\ -M a_{By} - Mg + R_{BG} \sin \varphi - R_{AB} \sin \gamma + T_D \sin(\theta - \frac{\pi}{2}) + N_D \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) = 0 \\ T_D R_1 - \frac{MR_1^2}{2} \dot{\omega}_1 = 0 \end{cases}$$

Poi verifico che $|\vec{T}_D| \leq \mu_s |\vec{N}_D|$

Problema 2

6



1) C_{motore} con $a_0 = 3 \frac{m}{s^2}$

$$W_m + W_{R1} + W_{R2} + W_P = \frac{dE_c}{dt}$$

$$W_m = C_m \omega_m \quad W_{R1} = -m_1 g v_1$$

$$W_{R2} = m_2 g \sin \alpha v - N u \omega$$

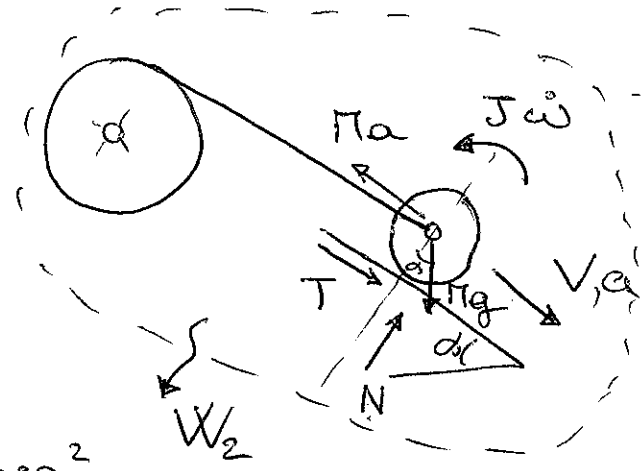
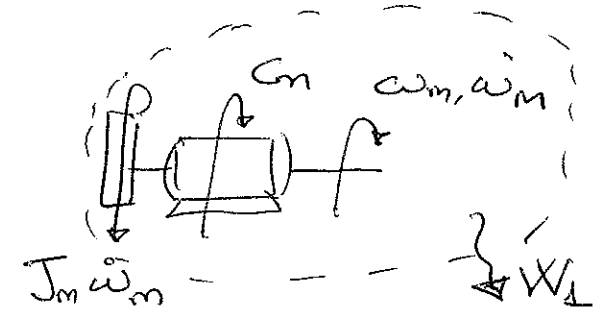
$$W_P = W_{P1} + W_{P2}$$

comincio dalla T_2 :

$$W_2 = m_2 g \sin \alpha v - N u \omega + - m_2 a v - J \dot{\omega}$$

dove: $\omega = \frac{v}{R_1}$ e $\dot{\omega} = \frac{a}{R_1}$, $J = \frac{m R_1^2}{2}$

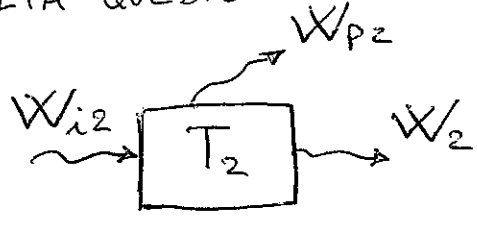
$$W_2 = m_2 g \sin \alpha \cancel{N} \cancel{R_1} \frac{v}{\cancel{R_1}} - m_2 a v - \frac{m R_1^2}{2 \cancel{R_1}} a v$$



$$N = Mg \cos \alpha$$

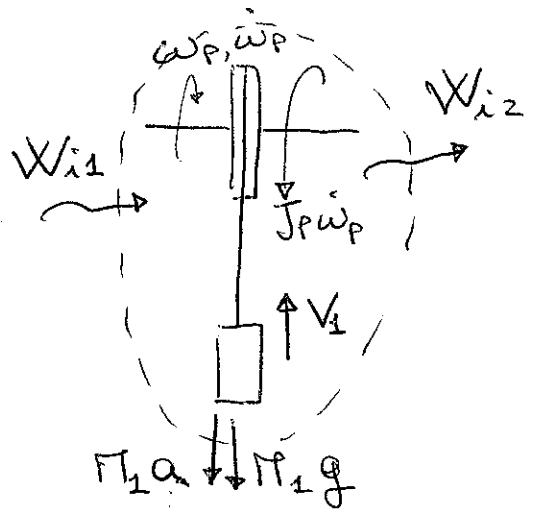
$$W_2 = \left[Mg (\sin \alpha - f_r \cos \alpha) - Ma - \frac{M}{2} a \right] V = -18,8 \text{ V}$$

=> moto diretto a cavallo della trasmissione T_2 ! (NELLA REALTÀ QUESTO MOVIMENTO NON SAREBBE POSSIBILE PERCHÉ LA FUNE NON AMMETTE AZIONE NORMALE DI COMPRESSIONE)

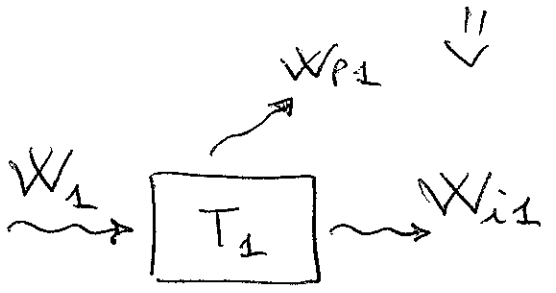


PERCHÉ LA FUNE NON AMMETTE AZIONE NORMALE DI COMPRESSIONE

$$W_{i1} = W_{i2} + M_1 g V_1 + M_1 a_1 V_1 + J_P \dot{\omega}_P \omega_P$$



Non conosco il valore perché non conosco J_P , però posso affermare che $W_{i1} > 0$



MOTO DIRETTO a cavallo della trasmissione T_1 !

$$W_1 = C_m \omega_m - J_m \dot{\omega}_m \omega_m$$

$$W_{p1} = -(1 - \eta_{d1}) (C_m \omega_m - J_m \dot{\omega}_m \omega_m)$$

$$W_{i1} = \eta_{d1} (C_m \omega_m - J_m \dot{\omega}_m \omega_m)$$

$$W_{i2} = W_{i1} - M_1 g V_1 - M_1 a_1 V_1 - J_P \dot{\omega}_P \omega_P$$

dove: $\omega_P = \frac{V}{R_2 \tau_2}$, $V_1 = \frac{R_P}{R_2 \tau_2} V$, $\omega_m = \frac{V}{R_2 \tau_1 \tau_2}$

$$W_{p2} = -(1 - \eta_{d2}) W_{i2}$$

$$= -(1 - \eta_{d2}) \eta_{d1} \left(C_m \omega_m - J_m \dot{\omega}_m \omega_m \right) +$$

$$+ (1 - \eta_{d2}) \left[\Pi_1 g \frac{R_p}{R_2 \tau_2} V + \Pi_2 \left(\frac{R_p}{R_2 \tau_2} \right)^2 Va + J_p \frac{aV}{R_2^2 \tau_2^2} \right]$$

$$W_p = -(1 - \eta_{d1}) \left[C_m \frac{V}{R_2 \tau_2} - J_m \frac{aV}{(R_2 \tau_2)^2} \right] +$$

$$- (1 - \eta_{d2}) \eta_{d1} \left[C_m \frac{V}{R_2 \tau_2} - \frac{J_m}{(R_2 \tau_2)^2} aV \right] +$$

$$+ (1 - \eta_{d2}) \left[\Pi_1 g \frac{R_p}{R_2 \tau_2} V + \Pi_2 \left(\frac{R_p}{R_2 \tau_2} \right)^2 aV + \frac{J_p}{(R_2 \tau_2)^2} aV \right]$$

$$= -(1 - \eta_{d1} \eta_{d2}) \left[C_m \frac{1}{R_2 \tau_2} - \frac{J_m}{(R_2 \tau_2)^2} a \right] V +$$

$$+ (1 - \eta_{d2}) \left[\Pi_1 g \frac{R_p}{R_2 \tau_2} + \Pi_2 \left(\frac{R_p}{R_2 \tau_2} \right)^2 a + \frac{J_p}{(R_2 \tau_2)^2} a \right] V$$

$$E_c = \frac{1}{2} J_m \omega_m^2 + \frac{1}{2} J_p \omega_p^2 + \frac{1}{2} \Pi_1 V_1^2 + \frac{1}{2} \Pi V^2 + \frac{1}{2} \frac{\Pi R_1^2}{2} \omega^2$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{J_m}{(R_2 \tau_2)^2} + \frac{J_p}{(R_2 \tau_2)^2} + \Pi_1 \left(\frac{R_p}{R_2 \tau_2} \right)^2 + \Pi + \frac{\Pi}{2} \right] V^2$$

$$\frac{dE_c}{dt} = [---] Va \quad \left(\bar{\eta}_d = \eta_{d1} \eta_{d2} \quad \bar{\tau} = \tau_1 \tau_2 \right)$$

$$\frac{C_m}{R_2 \tau_2} + \Pi g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - (1 - \bar{\eta}_d) \left[C_m \frac{1}{R_2 \tau_2} - \frac{J_m}{(R_2 \tau_2)^2} a \right] +$$

$$+ (1 - \eta_{d2}) \left[\Pi_1 g \frac{R_p}{R_2 \tau_2} + \Pi_2 \left(\frac{R_p}{R_2 \tau_2} \right)^2 a + \frac{J_p}{(R_2 \tau_2)^2} a \right] =$$

$$= \left[\frac{J_m}{(R_2 \tau_2)^2} + \frac{J_p}{(R_2 \tau_2)^2} + \Pi_1 \left(\frac{R_p}{R_2 \tau_2} \right)^2 + \frac{3}{2} \Pi \right] Va$$

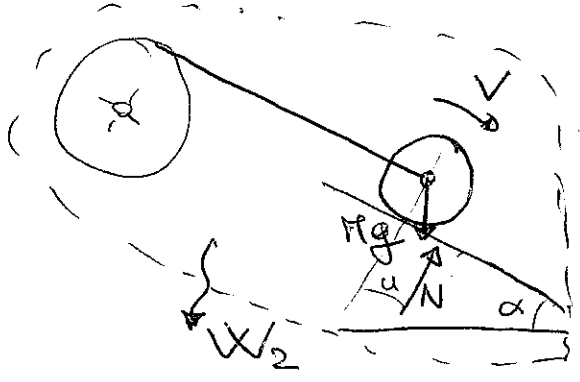
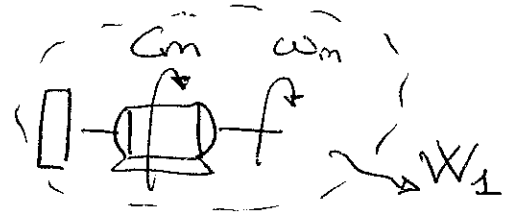
ricavo C!!

2) ω_m a regime ($M_1 \uparrow, M \rightarrow$)

$$W_m + W_{r1} + W_{r2} + W_p = 0$$

$$W_m = C_m \omega_m \quad W_{r1} = -M_1 g V_1$$

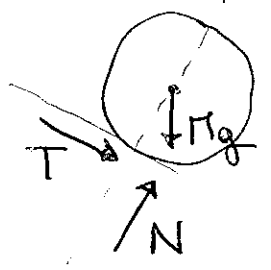
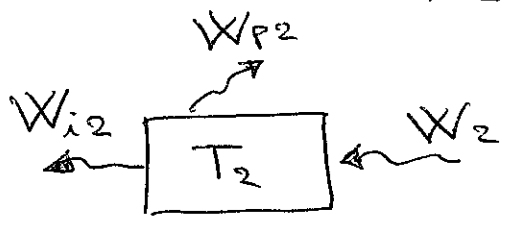
$$W_{r2} = M g \sin \alpha V - N u \omega$$



a regime $W_m = W_1$
 $W_r = W_2$

$$\Rightarrow W_2 = M g (\sin \alpha - f \cos \alpha) V$$

$= 3,67 V > 0 \Rightarrow$ MOTO RETROGRADO A CAVALLO DI T_2



$$W_{i2} = \eta_{r2} W_2$$

$$W_{p2} = -(1 - \eta_{r2}) W_2$$

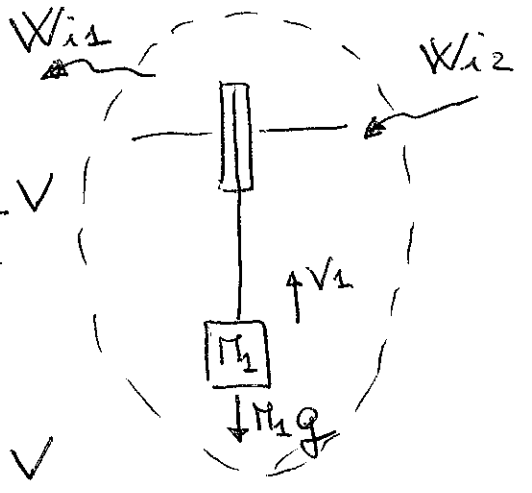
$$W_{i2} - M_1 g V_1 - W_{i1} = 0$$

$$W_{i1} = \eta_{r2} M g (\sin \alpha - f \cos \alpha) V - M_1 g \frac{R_p}{R_2 \tau_2} V$$

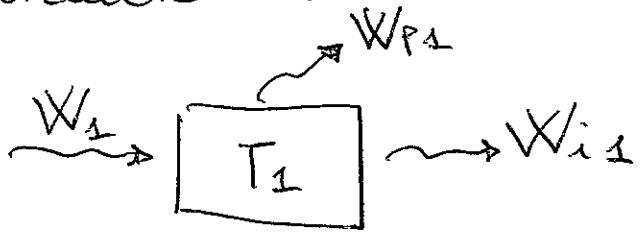
well' Rp che $\frac{R_p}{R_2 \tau_2} = 1$:

$$W_{i1} = \eta_{r2} [M g (\sin \alpha - f \cos \alpha) - M_1 g] V$$

$$= -45,36 \eta_{r2} V$$



$\Rightarrow W_{i1}$ entrante \Rightarrow MOTO DIRETTO A CAVALLO DI T_1



$$W_P = W_{P1} + W_{P2}$$

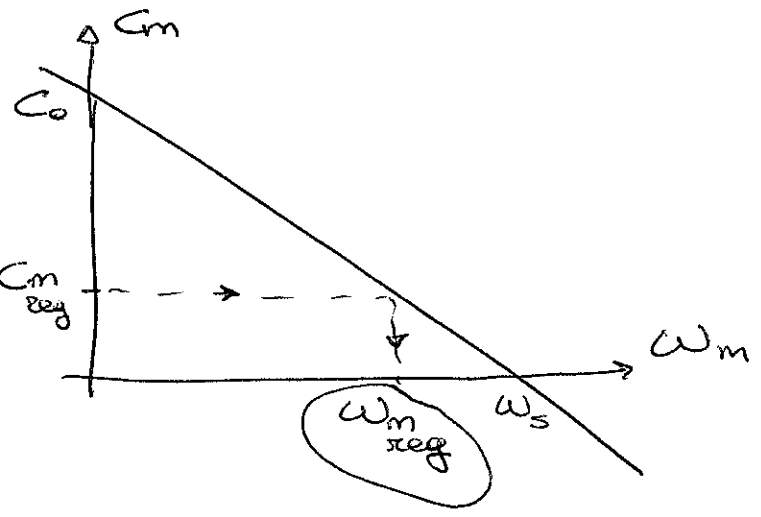
$$= -(1-\eta_{d1}) C_m \omega_m - (1-\eta_{e2}) \Pi q (\sin \alpha - f_v \cos \alpha) V$$

~~$$C_m \frac{V}{R_2 \bar{z}} - \Pi q \left(\frac{R_p}{R_2 \bar{z}_2} \right) V + \Pi q (\sin \alpha - f_v \cos \alpha) V$$~~

~~$$-(1-\eta_{d1}) C_m \frac{V}{R_2 \bar{z}} - (1-\eta_{e2}) \Pi q (\sin \alpha - f_v \cos \alpha) V = 0$$~~

$$-\Pi q + \frac{\eta_{d1}}{R_2 \bar{z}} C_m + \eta_{e2} \Pi q (\sin \alpha - f_v \cos \alpha) = 0$$

$$C_{m, \text{req}} = \left[\Pi q - \Pi q (\sin \alpha - f_v \cos \alpha) \eta_{e2} \right] \frac{R_2 \bar{z}}{\eta_{d1}}$$



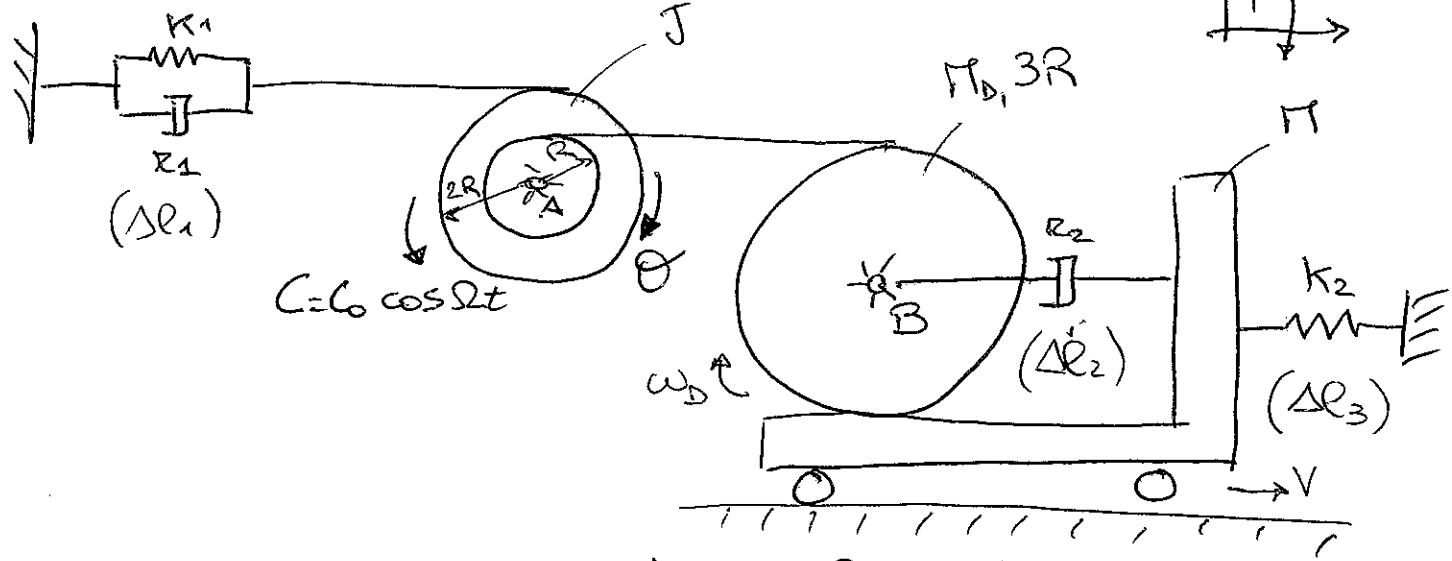
$$C_m = C_0 - A \omega_m$$

$$\omega_m = \frac{C_0 - C_m}{A}$$

$$\Rightarrow \omega_{m, RE} = \frac{C_0 - C_{m, REQ}}{A}$$

Problema 3

(11)



1) Equazione di moto del sistema:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = Q_\theta$$

$$E_c = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{M_D 9R^2}{2} \omega_D^2 + \frac{1}{2} M V^2$$

$$D = \frac{1}{2} r_1 \dot{\Delta e}_1^2 + \frac{1}{2} r_2 \dot{\Delta e}_2^2$$

$$V = \frac{1}{2} K_1 \Delta e_1^2 + \frac{1}{2} K_2 \Delta e_3^2$$

$$\delta L = -C \delta \theta$$

legami cinematici:

$$\omega_D = \frac{\dot{\theta}}{3} \quad V = -R\dot{\theta}$$

$$\Delta e_1 = +2R\theta \quad \Rightarrow \quad \dot{\Delta e}_1 = 2R\dot{\theta}$$

$$\Delta e_2 = -R\dot{\theta}$$

$$\Delta e_3 = +R\dot{\theta}$$

$$E_c = \frac{1}{2} \left[J + \frac{MR^2}{2} + MR^2 \right] \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} J^* \dot{\theta}^2$$

$$D = \frac{1}{2} (r_1 4R^2 + r_2 R^2) \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} r^* \dot{\theta}^2$$

$$V = \frac{1}{2} (k_1 4R^2 + k_2 R^2) \theta^2 = \frac{1}{2} k^* \theta^2$$

$$Q_\theta = -C$$



$$\boxed{J^* \ddot{\theta} + r^* \dot{\theta} + k^* \theta = -C(t)} = -C_0 \cos \Omega t$$

$$2) \omega_0 = \sqrt{\frac{k^*}{J^*}} = 16,64 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow f_0 = 2,65 \text{ Hz}$$

$$J^* = 325 \text{ kgm}^2 \quad r^* = 1,3 \cdot 10^4 \text{ Nsm} \quad k^* = 9 \cdot 10^4 \text{ Nm}$$

Per il calcolo della freq. propria del sistema smorzato, calcolo prima λ :

$$\lambda = \frac{r^*}{2J^* \omega_0} = 1,2 > 1 \Rightarrow \text{smorzamento IPER CRITICO !!}$$

Quindi non esiste freq. propria smorzata.

3) Risposta a regime:

$$|\bar{\theta}_0| = \frac{-C_0}{\sqrt{(k^* - J^* \Omega^2)^2 + (\Omega r^*)^2}} \quad \text{tg } \varphi = -\frac{\Omega r^*}{k^* - J^* \Omega^2}$$

$\Omega > \omega_0 \Rightarrow$ ZONA SISMOGRAFICA

$$30 \frac{\text{rad}}{\text{s}} > 16,64 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$