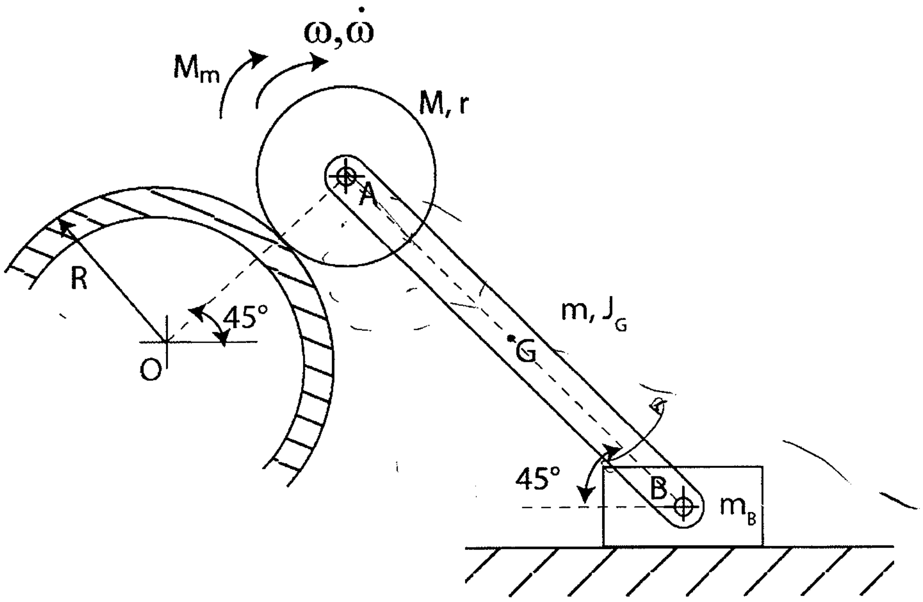
MECCANICA APPLICATA ALLE MACCHINE
Allievi meccanici AA.2010-2011 prova del 25-01-2012

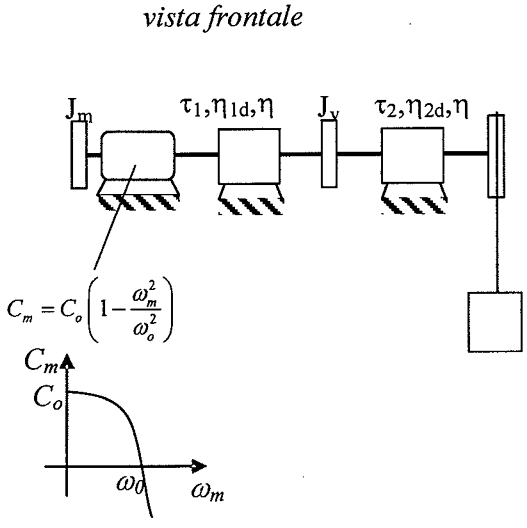
Problema N.1

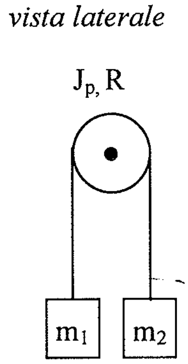


Il sistema meccanico sopra rappresentato è posizionato nel piano verticale. Siano note tutte le caratteristiche geometriche e si faccia riferimento alla posizione di figura. Il disco omogeneo di centro A, di cui sono noti la massa M ed il raggio r, rotola senza strisciare sulla guida circolare fissa di raggio R e centro O (non si consideri alcuna resistenza al rotolamento). L'asta AB, di massa m e momento di inerzia baricentrico J_G, collega il disco ad un corsoio di massa m_B vincolato a muoversi su una guida orizzontale.
Assegnate la velocità angolare ω e l'accelerazione angolare $\dot{\omega}$ del disco A (con il verso indicato in figura) si richiede di determinare per l'istante considerato in figura:

1. Direzione, modulo e verso dei vettori velocità e accelerazione del punto B.
2. Il momento motore Mm da applicare al disco di raggio r in grado di garantire il moto assegnato, nell'ipotesi di trascurare l'attrito tra guida e corsoio.
3. Il momento motore Mm da applicare al disco di raggio r in grado di garantire il moto assegnato, considerando un coefficiente di attrito dinamico f_d tra guida e corsoio (si considerino trascurabili le dimensioni del corsoio).
4. Le reazioni vincolari in A.

Problema N.2





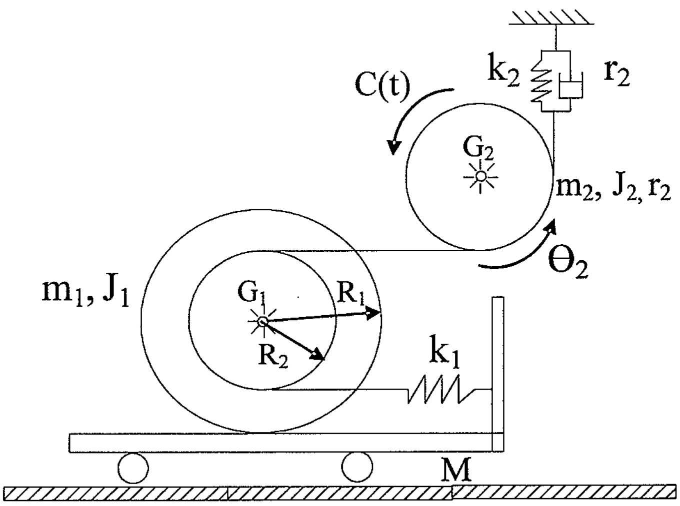
MECCANICA APPLICATA ALLE MACCHINE
Allievi meccanici AA.2010-2011 prova del 25-01-2012

L'impianto di sollevamento rappresentato in figura è movimentato da un motore, con curva caratteristica assegnata, collegato ad una prima trasmissione con rendimento diretto η_{1d}, retrogrado η_{1r} e rapporto di trasmissione τ_1. All'albero di uscita della prima trasmissione è calettato un volano di momento di inerzia J_V. L'albero è quindi collegato ad una seconda trasmissione con rendimento diretto η_{2d}, retrogrado η_{2r} e rapporto di trasmissione τ_2. All'albero in uscita della seconda trasmissione è collegata una puleggia di di momento di inerzia J_p e raggio R (vista laterale in figura). Sulla puleggia si avvolge senza strisciare una fune inestensibile alle cui estremità sono collegati due carichi di massa m_1 ed m_2, con $m_1>m_2$.

Si chiede di calcolare, **discutendo per ciascun punto la condizione di moto diretto o retrogrado**:

1) l'accelerazione del motore allo spunto con la massa m_1 in salita;
2) la velocità di regime del motore con la massa m_1 in salita;
3) la velocità di regime del motore con la massa m_1 in discesa.

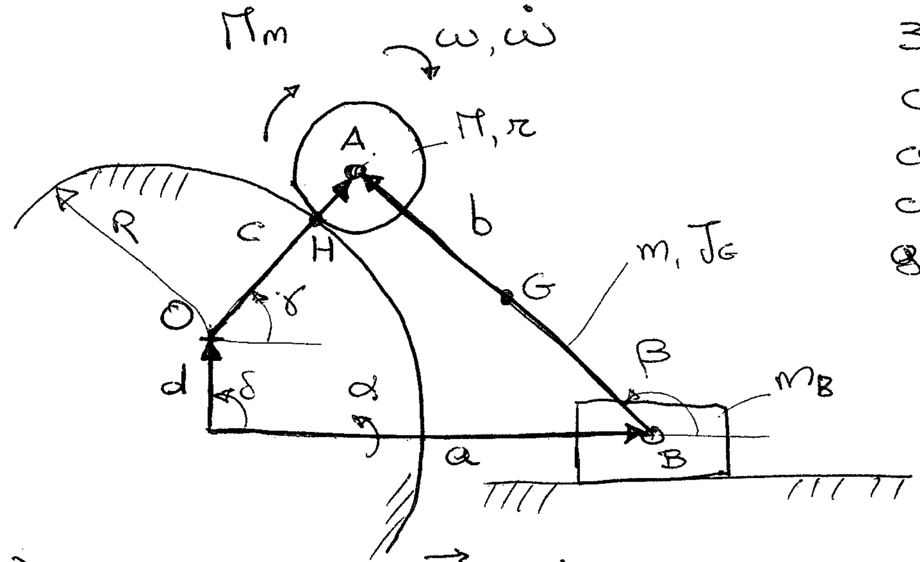
Problema N.3



Il meccanismo in figura, di caratteristiche geometriche note, si trova nella posizione di equilibrio statico. Il carrello di massa M è vincolato a traslare su una guida orizzontale fissa. I dischi di raggio R_1 ed R_2 sono solidali tra loro ed hanno massa complessiva m_1 e momento di inerzia baricentrico complessivo J_1. Essi sono incernierati a terra nel centro G_1. Tra il disco di raggio maggiore R_1 ed il carrello di massa M esiste un vincolo di rotolamento senza strisciamento. Sul disco di raggio minore R_2 si avvolge senza strisciare una fune inestensibile, la cui estremità inferiore è collegata al carrello di massa M tramite una molla di rigidezza k_1. L'altra estremità della fune si avvolge senza strisciare sul disco di centro G_2, (dotato di raggio r_2, massa m_2 e momento di inerzia baricentrico J_2), quindi è collegata a terra per mezzo di un gruppo molla-smorzatore di costanti k_2 ed r_2. Anche il disco di centro G_2 è incernierato a terra nel proprio centro. Sul disco agisce una coppia varabile nel tempo $C(t) = C_0 cos(2\Omega t)$.

Considerando come grado di libertà la rotazione θ_2 del disco G_2 con il verso indicato in figura, si richiede di calcolare:
1. l'equazione di moto del sistema;
2. la pulsazione propria del sistema;
3. la risposta a regime del sistema.

Problema N° 1



Computo dei gdl:

3 corpi rigidi:	9 gdl -
cerniera A:	2 gdv -
cerniera B:	2 gdv -
contatto H:	2 gdv -
guida corsoio:	2 gdv
TOTALE	1 gdl

1) Calcolare $\vec{V}_B$, $\vec{a}_B$

COST	VAR
b	a
$c = R + r$	β
d	γ
$\alpha = 0$	
$\delta = \pi/2$	

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{d} + \vec{c}$$

$$a e^{i\alpha} + b e^{i\gamma} = d e^{i\delta} + c e^{i\gamma}$$

Noto H c.i.r. del disco:

$$|\vec{V}_A| = \dot{\gamma} c = -\omega r \quad \Rightarrow \begin{cases} \dot{\gamma} = -\dfrac{\omega r}{c} = -\dfrac{\omega r}{R+r} \\ \ddot{\gamma} = -\dfrac{\dot{\omega} r}{R+r} \end{cases}$$

Quindi ho 2 incognite: $a(t)$, $\beta(t)$

Sistema posizione:

$$\begin{cases} a \overset{1}{\cancel{\cos\alpha}} + b\cos\beta = d \overset{0}{\cancel{\cos\delta}} + c\cos\gamma \\ a \overset{0}{\cancel{\sin\alpha}} + b\sin\beta = d \overset{1}{\cancel{\sin\delta}} + c\sin\gamma \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b\cos\beta = c\cos\gamma \\ b\sin\beta = d + c\sin\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \\ \beta \end{cases}$$

Velocità:

$$\dot{a} + b i \dot{\beta} e^{i\beta} = c i \dot{\gamma} e^{i\gamma}$$

$$\begin{cases} \dot{a} - b\dot{\beta}\sin\beta = -c\dot{\gamma}\sin\gamma \\ b\dot{\beta}\cos\beta = c\dot{\gamma}\cos\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{a} \\ \dot{\beta} \end{cases}$$

Accelerazione:

$$\ddot{a} + b i \ddot{\beta} e^{i\beta} - b\dot{\beta}^2 e^{i\beta} = c i \ddot{\gamma} e^{i\gamma} - c\dot{\gamma}^2 e^{i\gamma}$$

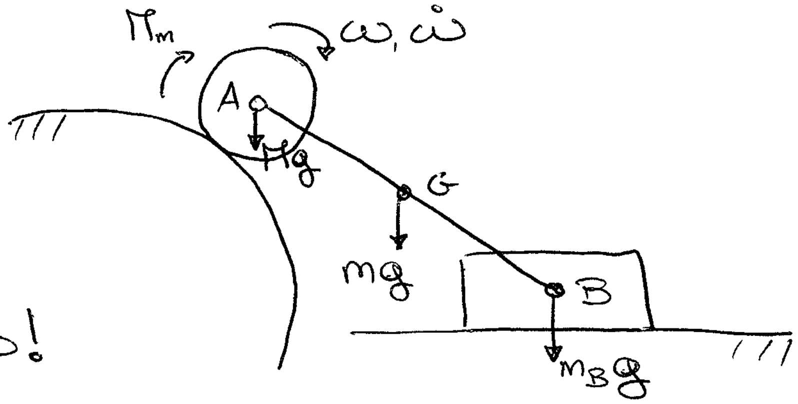
$$\begin{cases} \ddot{a} - b\ddot{\beta}\sin\beta - b\dot{\beta}^2\cos\beta = -c\ddot{\gamma}\sin\gamma - c\dot{\gamma}^2\cos\gamma \\ b\ddot{\beta}\cos\beta - b\dot{\beta}^2\sin\beta = +c\ddot{\gamma}\cos\gamma - c\dot{\gamma}^2\sin\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{a} \\ \ddot{\beta} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \vec{V}_B = \dot{a}\,\vec{i} \\ \hline \vec{a}_B = \ddot{a}\,\vec{i} \end{array}}$$

2) Calcolare M_m, no attrito guida - corsoio

Utilizzo il teorema dell'Energia Cinetica

$$W + W' = \frac{dE_c}{dt}$$



Il sistema è posto nel piano verticale
$\Rightarrow$ considero forze peso!

$$W = \vec{M}_m \cdot \vec{\omega} + M\vec{g} \cdot \vec{V}_A + m\vec{g} \cdot \vec{V}_G + \underbrace{\cancel{m_B \vec{g} \cdot \vec{V}_B}}_{\text{sono } \perp}$$

$$\vec{V}_G = \vec{V}_B + \vec{\omega}_{AB} \wedge (G - B) = \dot{a}\,\vec{i} - \dot{\beta}\,\overline{GB}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \dot{\beta}\,\overline{GB}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$$

$$W' = 0$$

$$E_c = \frac{1}{2} M V_A^2 + \frac{1}{2} J_A \omega^2 + \frac{1}{2} m V_G^2 + \frac{1}{2} J_G \omega_{AB}^2 + \frac{1}{2} m_B V_B^2$$
$$= \frac{1}{2} M r^2 \omega^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2}\right)\omega^2 + \frac{1}{2} m V_G^2 + \frac{1}{2} J_G \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} m_B \dot{a}^2$$

Il generico termine di velocità può essere visto come: $V^2 = \vec{V} \cdot \vec{V}$ e $\omega^2 = \vec{\omega} \cdot \vec{\omega}$ $\Rightarrow$

$$\frac{dE_c}{dt} = M r^2 \omega \dot{\omega} + \frac{MR^2}{2}\omega\dot{\omega} + m \vec{V}_G \cdot \vec{a}_G + J_G \dot{\beta}\ddot{\beta} + m_B \dot{a}\ddot{a}$$

$$\vec{a}_G = \vec{a}_B + \dot{\vec{\omega}}_{AB} \wedge (G - B) + \vec{\omega}_{AB} \wedge (\vec{\omega}_{AB} \wedge (G - B))$$
$$= \ddot{a}\,\vec{i} - \ddot{\beta}\,\overline{GB}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \ddot{\beta}\,\overline{GB}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + \dot{\beta}^2\,\overline{GB}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \dot{\beta}^2\,\overline{GB}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$$

$$W + \cancel{W'}^{=0} = \frac{dE_c}{dt}$$

$$M_m\,\omega + M_g\,\omega r\frac{\sqrt{2}}{2} + mg\dot{\beta}\,\overline{GB}\frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= M r^2\omega\dot{\omega} + \frac{MR^2}{2}\omega\dot{\omega} + m\left(\dot{a} - \dot{\beta}\,\overline{GB}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\ddot{a} - \ddot{\beta}\,\overline{GB}\frac{\sqrt{2}}{2} + \dot{\beta}^2\,\overline{GB}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) +$$

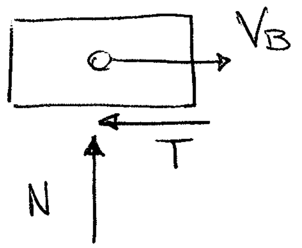
$$+ m\left(-\dot{\beta}\,\overline{GB}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\ddot{\beta}\,\overline{GB}\frac{\sqrt{2}}{2} - \dot{\beta}^2\,\overline{GB}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + J_G\dot{\beta}\ddot{\beta} + m_B\dot{a}\ddot{a}$$

Da qui ricavo M_m!

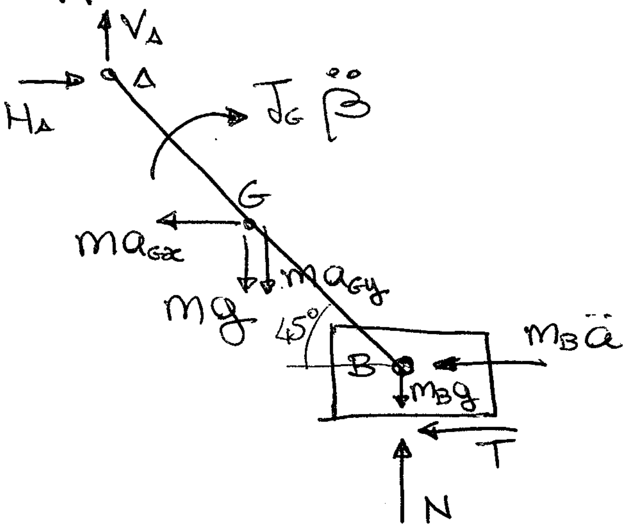
3) Calcolare M_m, considerando attrito dinamico tra corsoio e guida.

Ora $W' = \vec{T}\cdot\vec{V}_B = -T\dot{a}$

dove $T = f_d N$



Per il calcolo di N, sfrutto il principio di D'Alembert applicato al sotto-sistema ASTA $\overline{AB}$ + CORSOIO:



$I \simeq 0$

$\sum M_A = 0$ (+)

considerando il corsoio di dimensioni trascurabili

$$N l\cos 45° - \overbrace{(f_d N)}^{T}\, l\sin 45° - m_B g\, l\cos 45° - m_B\ddot{a}\, l\sin 45° +$$

$$- mg\frac{l}{2}\cos 45° - m a_{Gy}\frac{l}{2}\cos 45° - m a_{Gx}\frac{l}{2}\sin 45° - J_G\ddot{\beta} = 0$$

4) Reazioni vincolari in A

Considero ancora il sotto-sistema asta $\overline{AB}$ + corsoio e scrivo 2 equilibri di F, in direzione orizzontale e verticale:

$$\sum F_x^{(asta+corsoio)} = 0$$

$$H_A - m a_{Gx} - m_B \ddot{a} - T = 0$$

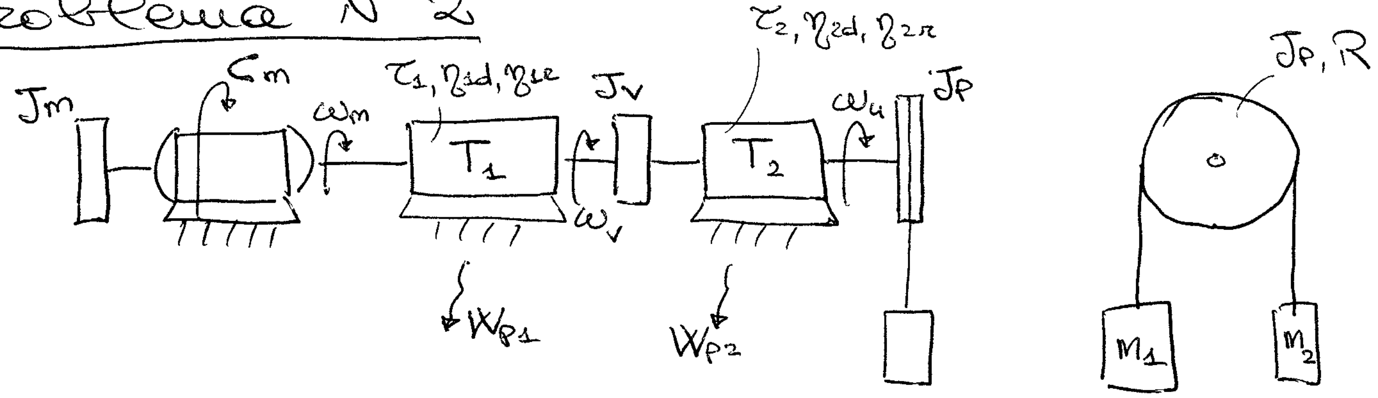
$$\boxed{H_A = m a_{Gx} + m_B \ddot{a} + T}$$

$$\sum F_y^{(asta+corsoio)} = 0$$

$$V_A - mg - m a_{Gy} - m_B g + N = 0$$

$$\boxed{V_A = mg + m a_{Gy} + m_B g - N}$$

Problema N° 2



1) ω_m? allo spunto con m_1 in salita.
Il moto è DIRETTO.

$$W_m = C_m \cdot \omega_m$$

$$W_{p1} = -(1-\eta_{1d})\, W_{e1} = -(1-\eta_{1d})\left(C_m \omega_m - J_m \dot{\omega}_m \omega_m\right)$$

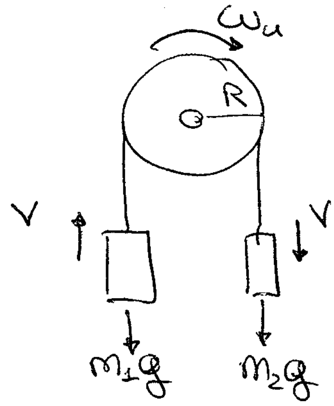
$$W_{p2} = -(1-\eta_{2d})\, W_{e2} = -(1-\eta_{2d})\left(W_{e1} \cdot \eta_{1d} - J_v \dot{\omega}_v \omega_v\right)$$

$$= -(1-\eta_{2d})\left[\left(C_m \omega_m - J_m \dot{\omega}_m \omega_m\right)\eta_{1d} - J_v \tau_1^2 \dot{\omega}_m \omega_m\right]$$

$$W_p = W_{p1} + W_{p2}$$

$$= -(1-\eta_{1d})\left(C_m \omega_m - J_m \dot{\omega}_m \omega_m\right) - (1-\eta_{2d})\left[\left(C_m \omega_m - J_m \dot{\omega}_m \omega_m\right)\eta_{1d} - J_v \tau_1^2 \dot{\omega}_m \omega_m\right]$$

$$W_u = -m_1 g R \omega_u + m_2 g R \omega_u$$



Dato che $m_1 > m_2 \Rightarrow W_u < 0 \Rightarrow$ MOTO DIRETTO!

$$\omega_u = \tau_2 \omega_v = \tau_2 \tau_1 \omega_m$$

$$\dot{\omega}_u = \tau_2 \tau_1 \dot{\omega}_m$$

$$\Rightarrow W_u = -m_1 g R \tau_2 \tau_1 \omega_m + m_2 g R \tau_2 \tau_1 \omega_m$$

$$E_c = \frac{1}{2} J_m \omega_m^2 + \frac{1}{2} J_v \omega_v^2 + \frac{1}{2} J_p \omega_u^2 + \frac{1}{2} m_1 V^2 + \frac{1}{2} m_2 V^2$$

dove $\omega_v = \tau_1 \omega_m$

$\omega_u = \tau_2 \tau_1 \omega_m$

$V = R \omega_u = R \tau_2 \tau_1 \omega_m$

$$E_c = \frac{1}{2}\left[J_m + J_v \tau_1^2 + J_p \tau_2^2 \tau_1^2 + (m_1 + m_2) R^2 \tau_2^2 \tau_1^2\right] \omega_m^2$$

$$\frac{dE_c}{dt} = [\,\text{---}\,]\, \omega_m \dot{\omega}_m$$

$$W_m + W_p + W_u = \frac{dE_c}{dt}$$

$$\cancel{C_m\omega_m} - (\cancel{1}-\eta_{1d})(C_m\omega_m - J_m\dot\omega_m\omega_m) - (1-\eta_{2d})\left[(C_m\omega_m - J_m\dot\omega_m\omega_m)\eta_{1d} - \right.$$
$$\left. - J_v\tau_1^2\dot\omega_m\omega_m\right] - m_1 g R\tau_2\tau_1\omega_m + m_2 g R\tau_2\tau_1\omega_m =$$
$$= \left[\cancel{J_m} + J_v\tau_1^2 + J_p\tau_2^2\tau_1^2 + (m_1+m_2)R^2\tau_2^2\tau_1^2\right]\omega_m\dot\omega_m$$

$$\Downarrow$$

$$\eta_{1d}(\cancel{C_m\omega_m - J_m\dot\omega_m\omega_m}) - (\cancel{C_m\omega_m - J_m\dot\omega_m\omega_m})\eta_{1d} + \cancel{J_v\tau_1^2\dot\omega_m\omega_m} +$$
$$+\eta_{2d}\left[(C_m\cancel{\omega_m} - J_m\dot\omega_m\cancel{\omega_m})\eta_{1d} - J_v\tau_1^2\dot\omega_m\cancel{\omega_m}\right] - (m_1-m_2)gR\tau_2\tau_1\cancel{\omega_m} =$$
$$= \left[\cancel{J_v\tau_1^2} + J_p\tau_2^2\tau_1^2 + (m_1+m_2)R^2\tau_2^2\tau_1^2\right]\cancel{\omega_m}\dot\omega_m$$

$$\Downarrow$$

$$\left\{\left[J_p + (m_1+m_2)R^2\right]\tau_2^2\tau_1^2 + J_m\eta_{1d}\eta_{2d} + J_v\tau_1^2\eta_{2d}\right\}\dot\omega_m =$$
$$= \eta_{2d}C_m - (m_1-m_2)gR\tau_2\tau_1 \qquad (*)$$

Siamo allo spunto $\Rightarrow C_m = C_0$

$$\boxed{\dot\omega_m = \frac{\eta_{2d}C_0 - (m_1-m_2)gR\tau_2\tau_1}{\left[J_p + (m_1+m_2)R^2\right]\tau_2^2\tau_1^2 + J_m\eta_{1d}\eta_{2d} + J_v\tau_1^2\eta_{2d}}}$$

2) ω_m? a regime con m_1 in salita.

Il I membro della $(*)$ è nullo perché a regime $\dot\omega_m = 0$ $\Rightarrow$

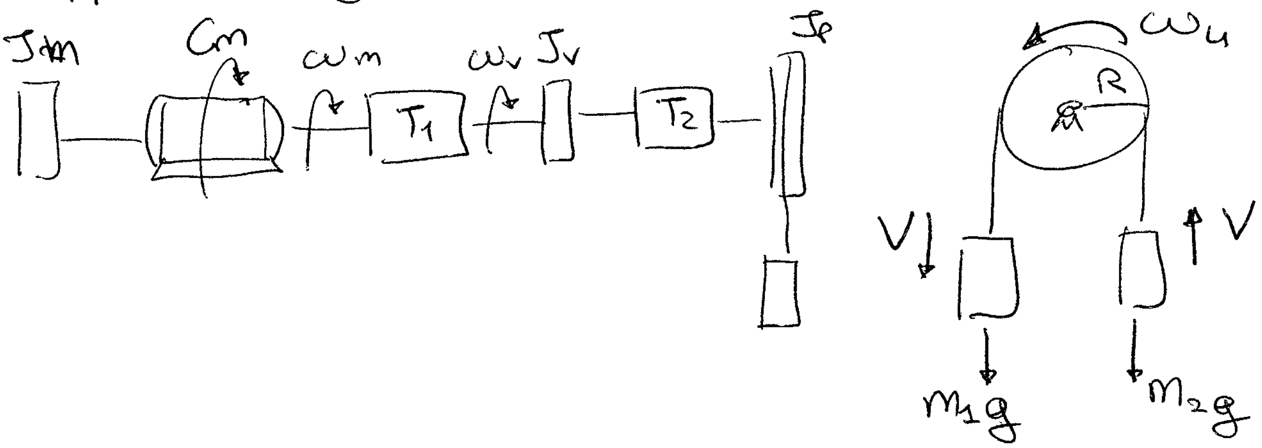
$$\eta_{2d}C_m - (m_1-m_2)gR\tau_2\tau_1 = 0$$

$$\Rightarrow C_m = \frac{(m_1-m_2)gR\tau_2\tau_1}{\eta_{2d}} > 0 \Rightarrow \text{MOTO DIRETTO}$$

$$C_m = C_0\left(1 - \frac{\omega_m^2}{\omega_0^2}\right) \Rightarrow \omega_m^2 = \omega_0^2\left(1 - \frac{C_m}{C_0}\right)$$

$$\boxed{\omega_m = \omega_0\sqrt{1 - \frac{C_m}{C_0}}}$$

3) ω_m? a regime con m_1 in discesa.



$$W_m = C_m \omega_m$$

$$W_u = m_1 g R \tau_2 \tau_1 \omega_m - m_2 g R \tau_2 \tau_1 \omega_m > 0 \Rightarrow \text{MOTO RETROGRADO}$$

$$W_p = -(1 - \eta_{1r}\eta_{2r}) W_e = -(1 - \eta_{1r}\eta_{2r})(m_1 - m_2) g R \tau_2 \tau_1 \omega_m$$

$$\frac{dE_c}{dt} = 0$$

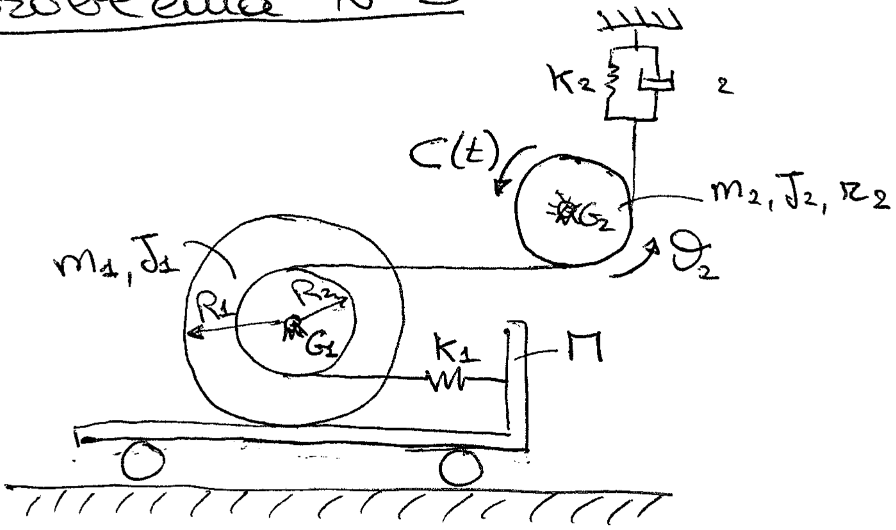
$$W_m + W_p + W_u = 0$$

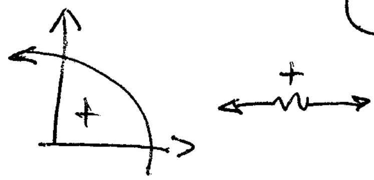
$$C_m \cancel{\omega_m} - (\cancel{1} - \eta_{1r}\eta_{2r})(m_1 - m_2) g R \tau_2 \tau_1 \cancel{\omega_m} + \cancel{(m_1 - m_2) g R \tau_2 \tau_1 \omega_m} = 0$$

$$C_m = -\eta_{1r}\eta_{2r}(m_1 - m_2) g R \tau_1 \tau_2$$

$$C_m = C_0 \left(1 - \frac{\omega_m^2}{\omega_0^2}\right) \Rightarrow \boxed{\omega_m = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{C_m}{C_0}}}$$

Problema N° 3





1 gdl : ϑ_2

1) equazione di moto del sistema.

$$E_c = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2$$

$$\omega_2 = \dot{\vartheta}_2$$

$$\omega_1 \cdot R_2 = -\dot{\vartheta}_2 r_2 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = -\dot{\vartheta}_2 \frac{r_2}{R_2}$$

$$V = \omega_1 R_1 = -\dot{\vartheta}_2 \frac{r_2 R_1}{R_2}$$

$$E_c = \frac{1}{2} M \left(-\frac{r_2 R_1}{R_2} \dot{\vartheta}_2\right)^2 + \frac{1}{2} J_1 \left(-\frac{r_2}{R_2} \dot{\vartheta}_2\right)^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\vartheta}_2^2$$

$$V = \frac{1}{2} K_1 \Delta \ell_1^2 + \frac{1}{2} K_2 \Delta \ell_2^2$$

$$\Delta \ell_1 = \vartheta_2 r_2 - \vartheta_2 \frac{r_2}{R_2} R_1 = (R_2 - R_1) \frac{r_2}{R_2} \vartheta_2$$

$$\Delta \ell_2 = -R_2 \vartheta_2$$

$$V = \frac{1}{2} K_1 \left((R_2 - R_1) \frac{r_2}{R_2} \vartheta_2\right)^2 + \frac{1}{2} K_2 (-R_2 \vartheta_2)^2$$

$$D = \frac{1}{2} c_2 (-r_2 \dot{\vartheta}_2)^2$$

$$\delta^* L = C(t) \cdot \delta^* \vartheta_2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot\vartheta_2}\right) - \cancel{\frac{\partial E_c}{\partial \vartheta_2}}^{=0} + \frac{\partial D}{\partial \dot\vartheta_2} + \frac{\partial V}{\partial \vartheta_2} = Q$$

$$\boxed{\left[M\left(-\frac{r_2 R_1}{R_2}\right)^2 + J_1\left(-\frac{r_2}{R_2}\right)^2 + J_2\right]\ddot\vartheta_2 + c_2 r_2^2\,\dot\vartheta_2 + \left[K_1 (R_2 - R_1)^2 \frac{r_2^2}{R_2^2} + K_2 R_2^2\right]\vartheta_2 = C_0 \cos(2\Omega t)}$$

2) pulsazione propria del sistema.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K^*}{J^*}} = \sqrt{\frac{K_1 (R_2 - R_1)^2 \frac{r_2^2}{R_2^2} + K_2 R_2^2}{M\left(-\frac{r_2 R_1}{R_2}\right)^2 + J_1\left(-\frac{r_2}{R_2}\right)^2 + J_2}}$$

(sistema libero non smorzato)

$$\boxed{\omega = \omega_0 \sqrt{1 - h^2}}$$ dove $h = \dfrac{r^*}{2 J^* \omega_0}$

3) risposta a regime del sistema.

$$C(t) = C_0 \cos(2\Omega t) = \operatorname{Re}\left(C_0 e^{i 2\Omega t}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$J^* \ddot\vartheta_2 + r^* \dot\vartheta_2 + K^* \vartheta_2 = C_0 e^{i2\Omega t}$$

$$\vartheta_2 = \bar\vartheta_2 e^{i2\Omega t}$$

$$\left(-4\Omega^2 J^* + i 2\Omega r^* + K^*\right)\bar\vartheta_2 \cancel{e^{i2\Omega t}} = C_0 \cancel{e^{i2\Omega t}}$$

$$\boxed{\bar\vartheta_2 = \frac{C_0}{(-4\Omega^2 J^* + K^*) + i\, 2\Omega r^*}}$$

Razionalizzo:

$$\bar{\vartheta}_2 = \frac{C_0}{(-4\Omega^2 J^* + K^*) + i\,2\Omega r^*} \cdot \frac{(-4\Omega^2 J^* + K^*) - i\,2\Omega r^*}{(-4\Omega^2 J^* + K^*) - i\,2\Omega r^*}$$

$$= \frac{C_0\left[(-4\Omega^2 J^* + K^*) - i\,2\Omega r^*\right]}{(-4\Omega^2 J^* + K^*)^2 - (2\Omega r^*)^2}$$

$$|\bar{\vartheta}_2| = \frac{C_0\sqrt{(-4\Omega^2 J^* + K^*)^2 + (2\Omega r^*)^2}}{(-4\Omega^2 J^* + K^*)^2 - (2\Omega r^*)^2} \qquad \text{MODULO}$$

$$\measuredangle(\bar{\vartheta}_2) = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\Omega r^*}{-4\Omega^2 J^* + K^*}\right) \qquad \text{FASE}$$