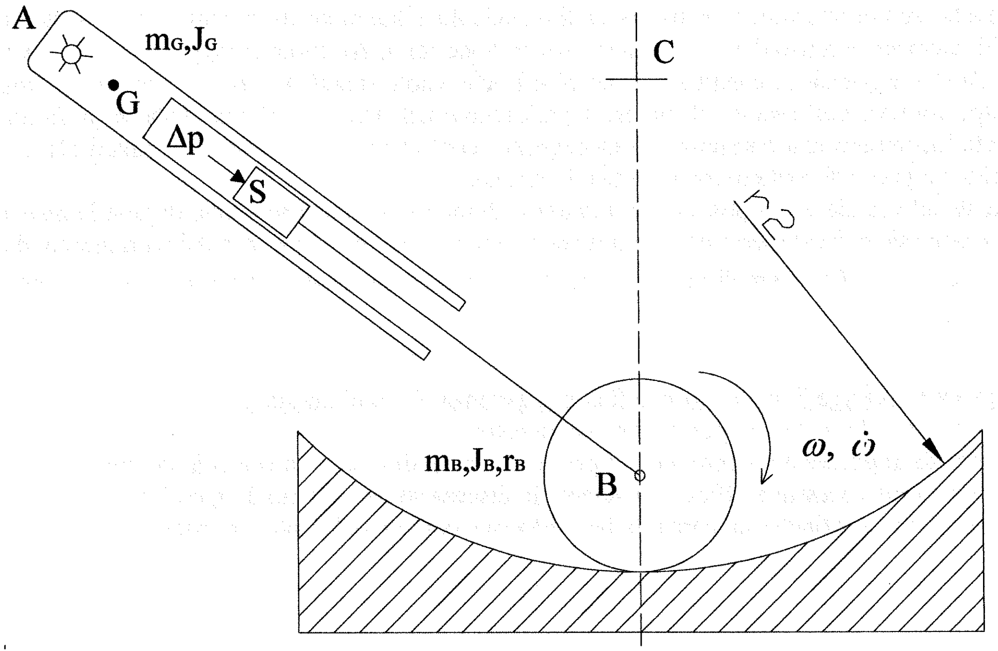
MECCANICA APPLICATA ALLE MACCHINE

Allievi meccanici AA.2010-2011 prova del 08-09-2011

Problema N.1

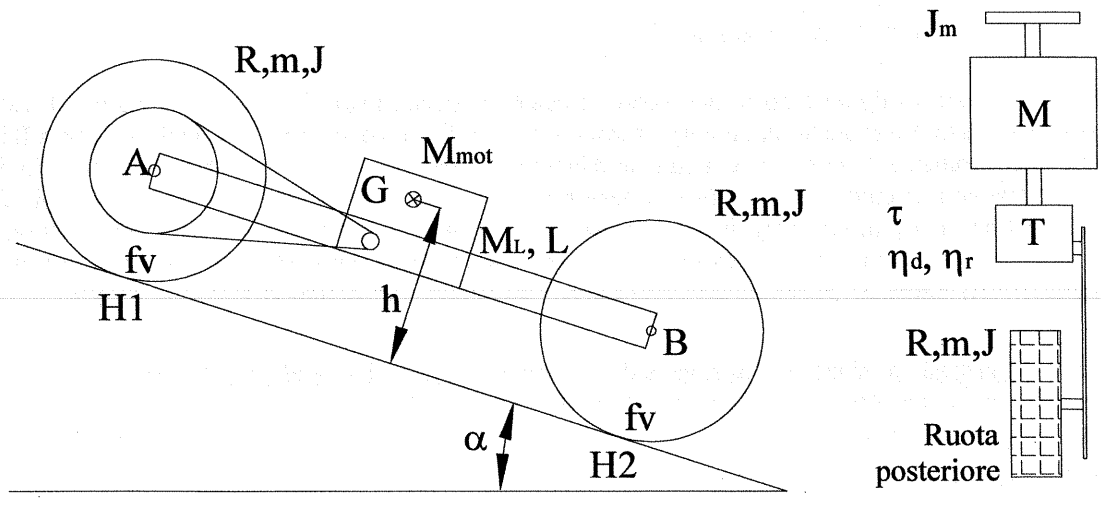


Il meccanismo indicato in figura, di caratteristiche geometriche note, è posto nel piano verticale e risulta azionato da un attuatore incernierato a terra nel punto A. All'estremità dello stelo dell'attuatore (punto B) risulta incernierato un disco omogeneo che rotola senza strisciare su una guida curvilinea di raggio r2 e di centro C. Sono note la massa m_G ed il momento d'inerzia J_G dell'attuatore e la massa m_B e il momento d'inerzia J_B del disco di centro B. Il disco possiede una velocità angolare ed un'accelerazione angolare, rispettivamente ω, $\dot{\omega}$, entrambe note. Nell'attuatore, è presente una pressione Δp che agisce su una superficie nota S (si consideri il corsoio privo di massa). Il coefficiente di attrito radente fra corsoio e le pareti dell'attuatore è pari a f_r, mentre il disco rotola senza strisciare sulla guida curvilinea.

Si determinino per l'atto di moto assegnato in figura:

1. velocità assoluta v_B e accelerazione assoluta a_B del centro della ruota B (modulo e direzione);
2. velocità angolare e accelerazione angolare dell'attuatore;
3. la pressione Δp necessaria corrispondente al moto assegnato considerando **nullo** l'attrito fra corsoio e pareti dell'attuatore;
4. le reazioni vincolari nella cerniera in A nella condizione 3;
5. la pressione Δp necessaria per garantire il moto assegnato considerando attrito fra corsoio e pareti dell'attuatore.

Problema N.2

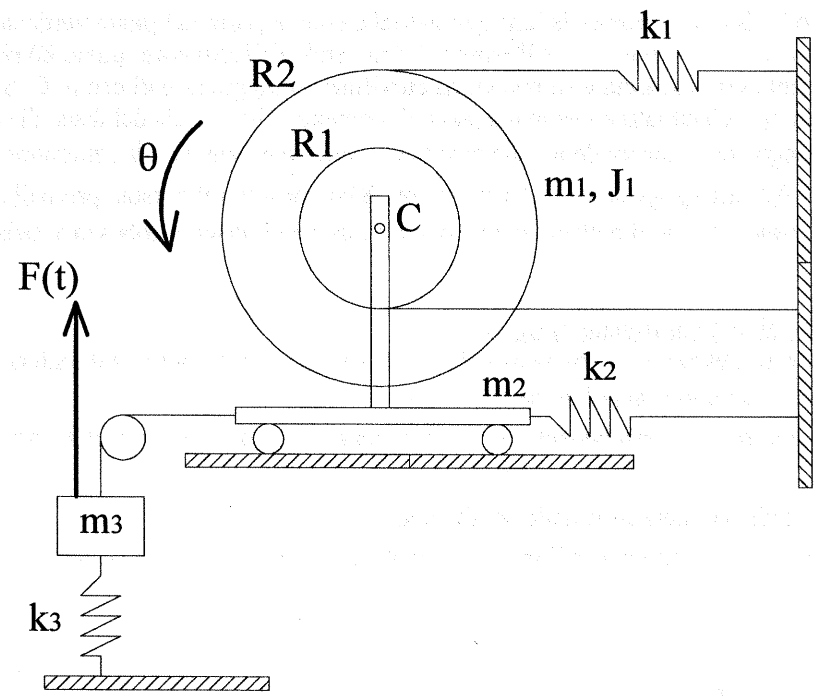


MECCANICA APPLICATA ALLE MACCHINE
Allievi meccanici AA.2010-2011 prova del 08-09-2011

In figura è riportata la rappresentazione schematizzata di un veicolo a due ruote che percorre una discesa con angolo di inclinazione α . Gli elementi essenziali ai fini della sua descrizione sono: due ruote di raggio R e massa m (omogenee), un'asta di massa M_L e lunghezza L, congiunge i baricentri delle ruote (punti A e B), e il motore di massa M_{mot}. Il baricentro del corpo formato dall'asta e dal motore è posizionato nel punto G, ad una distanza h da terra. Nel loro movimento le ruote incontrano una resistenza al rotolamento (coefficiente f_v). I punti denominati H1 e H2 in figura sono rappresentativi del punto di contatto tra le ruote e il terreno.
Il sistema di trazione del veicolo è composto da un momento di inerzia J_m rappresentativo di tutte le masse rotanti lato motore mentre la trasmissione è caratterizzata da un rapporto totale di trasmissione τ e dai rendimento di moto diretto e retrogrado η_d ed η_r. Per semplificare la scrittura delle equazioni, utilizzare la seguente relazione: $2m + M_{mot} + M_L = M$.

<u>Si richiede di calcolare (discutere il tipo di moto e flusso di potenza per ogni quesito):</u>
1. l'accelerazione del veicolo in discesa con motore scollegato;
2. la coppia frenante da applicare all'albero motore per garantire, in discesa, una velocità costante;
3. la minima accelerazione necessaria affinché il veicolo in discesa abbia un moto di tipo diretto;
4. la coppia motrice minima affinché sia garantita la condizione di moto del punto precedente.

Problema N.3



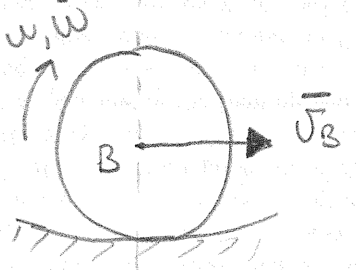
Il meccanismo indicato in figura è posto nel piano verticale, si trova in equilibrio statico e risulta di caratteristiche geometriche note. Esso è composto da un corpo formato da due dischi concentrici e solidali di raggio R1 e R2 (con R2>R1), complessivamente di massa m_1 e momento d'inerzia J_1 incernierato nel suo centro ad un carrello di massa m_2 libero di muoversi su una guida rettilinea (senza nessun attrito). Una fune è avvolta sul disco di raggio R2 e risulta collegata a terra tramite una molla di rigidezza k1, mentre la fune avvolta sul disco R1 è vincolata direttamente a terra. Una terza fune collega una massa m_3 al carrello. La massa è a sua volta vincolata a terra tramite una molla k3 ed è libera di traslare verticalmente. Su di essa agisce infine una forza varabile nel tempo $F(t) = F_0 cos(2\Omega t)$.

<u>Considerando come grado di libertà la rotazione θ della coppia di dischi, si richiede di calcolare:</u>
1. l'equazione di moto del sistema nell'intorno della posizione di equilibrio statico assegnata;
2. la pulsazione propria del sistema;
3. la risposta a regime del sistema.

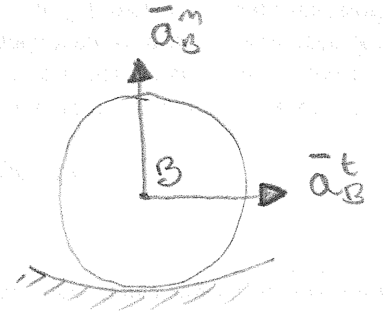
ES 1

$$\begin{cases} \rightarrow \text{pt } B \rightarrow \text{moto circolare attorno a } C \\ \rightarrow \text{pt } G \rightarrow \text{" " " a } A \end{cases}$$

1) note $\omega, \dot{\omega}$ =>



$$\begin{cases} |\bar{v}_B| = \omega \cdot R_B \\ \text{direz} = \text{tg alla guida} \\ \text{(// asse orizzontale)} \end{cases}$$



$$\begin{cases} |\bar{a}_B^t| = \dot{\omega} R_B \\ \text{tg alla guida (// asse } x) \end{cases}$$

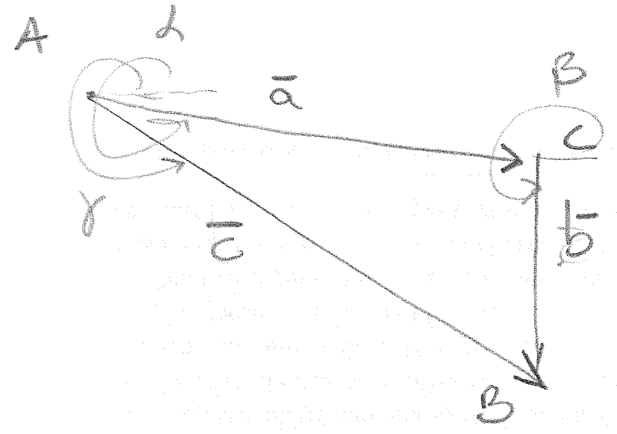
$$\Rightarrow |\bar{v}_B| = \omega_{CB} \cdot \overline{CB} = \omega_{BC} \cdot (R_2 - R_B) \Rightarrow \omega_{BC} = \frac{|\bar{v}_B|}{R_2 - R_B}$$

$$\Rightarrow |a_B^n| = \omega_{BC}^2 \cdot \overline{BC} = \left(\omega \cdot \frac{R_B}{R_2 - R_B}\right)^2 \cdot (R_2 - R_B)$$

*

$$\dot{\omega} R_B = \dot{\omega}_{CB} \cdot \overline{CB} \Rightarrow \dot{\omega}_{CB} = \dot{\omega} \frac{R_B}{R_2 - R_B}$$

2) chiusura ABC



$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{c}$$

$$\begin{cases} \bar{a} = \text{fisso} \\ \bar{b} = \begin{cases} \text{mod. cost} \rightarrow |\bar{b}| = (R_2 - R_3) \\ +\dot{\bar{\beta}} = +\omega_{BC} \; ; \; \ddot{\beta} = \dot{\omega}_{BC} \end{cases} \\ \bar{c} = \text{var.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\cos\alpha + b\cos\beta = c\cos\gamma \\ a\,\mathrm{sen}\,\alpha + b\,\mathrm{sen}\,\beta = c\,\mathrm{sen}\,\gamma \end{cases} \quad \downarrow$$

$$\begin{cases} -b\dot{\beta}\,\mathrm{sen}\,\beta = \dot{c}\cos\gamma - c\dot{\gamma}\,\mathrm{sen}\,\gamma \\ b\dot{\beta}\cos\beta = \dot{c}\,\mathrm{sen}\,\gamma + c\dot{\gamma}\cos\gamma \end{cases} \quad (*)$$

in questo atto di moto $\rightarrow \beta = 270°$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} b\dot{\beta} = \dot{c}\cos\gamma - c\dot{\gamma}\,\mathrm{sen}\gamma \\ \dot{c}\,\mathrm{sen}\gamma + c\dot{\gamma}\cos\gamma = \emptyset \end{cases}$$

$$\dot{\alpha} = -\frac{\omega R \sin\gamma}{c}$$

$\dot{\beta}$ = NOTO

→ INCOGNITE → $\begin{cases} \dot{c} = \text{VELOCITÁ SFILO PISTONE} \\ \dot{\gamma} = \text{VELOCITÁ ANGOLARE ATTUATORE} \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} \cos\gamma & -c\,\mathrm{sen}\gamma \\ \mathrm{sen}\gamma & +c\cos\gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{c} \\ \dot{\gamma} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} +b\dot{\beta} \\ \emptyset \end{Bmatrix} \Rightarrow \text{trovo } \dot{c}, \dot{\gamma}.$$

⇒ derivo ⊛ →

$$\begin{cases} -b\ddot{\beta}\,\mathrm{sen}\beta - b\dot{\beta}^2\cos\beta = \ddot{c}\cos\gamma - \dot{c}\dot{\gamma}\,\mathrm{sen}\gamma - \dot{c}\dot{\gamma}\,\mathrm{sen}\gamma + \\ \qquad - c\ddot{\gamma}\,\mathrm{sen}\gamma - c\dot{\gamma}^2\cos\gamma \\ \\ b\ddot{\beta}\cos\beta - b\dot{\beta}^2\,\mathrm{sen}\beta = \ddot{c}\,\mathrm{sen}\gamma + \dot{c}\dot{\gamma}\cos\gamma + \dot{c}\dot{\gamma}\cos\gamma + \\ \qquad + c\ddot{\gamma}\cos\gamma - c\dot{\gamma}^2\,\mathrm{sen}\gamma \end{cases}$$

⇒ $\ddot{\beta}$ = NOTO

⇒ INCOGNITE $\begin{cases} \ddot{c} = \text{ACC. SFILO PISTONE} \\ \ddot{\gamma} = \text{ACC. ANGOLARE ATTUATORE} \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} \cos\gamma & -c\,\mathrm{sen}\gamma \\ \mathrm{sen}\gamma & +c\cos\gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{c} \\ \ddot{\gamma} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -b\ddot{\beta}\,\mathrm{sen}\beta - b\dot{\beta}^2\cos\beta + 2\dot{c}\dot{\gamma}\,\mathrm{sen}\gamma + \\ + c\dot{\gamma}^2\cos\gamma \\ b\ddot{\beta}\cos\beta - b\dot{\beta}^2\,\mathrm{sen}\beta - 2\dot{c}\dot{\gamma}\cos\gamma + \\ + c\dot{\gamma}^2\,\mathrm{sen}\gamma \end{Bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Trovo $\ddot{c}$, $\ddot{\gamma}$

---

velocità baricentro attuatore:

$$|\bar{v}_G| = \dot{\gamma} \cdot \overline{AG}$$

accelerat. baric. attuatore

$$\begin{cases} |\bar{a}_G^n| = \dot{\gamma}^2 \cdot \overline{AG} \\ |a_G^t| = \ddot{\gamma} \cdot \overline{AG} \end{cases}$$

---

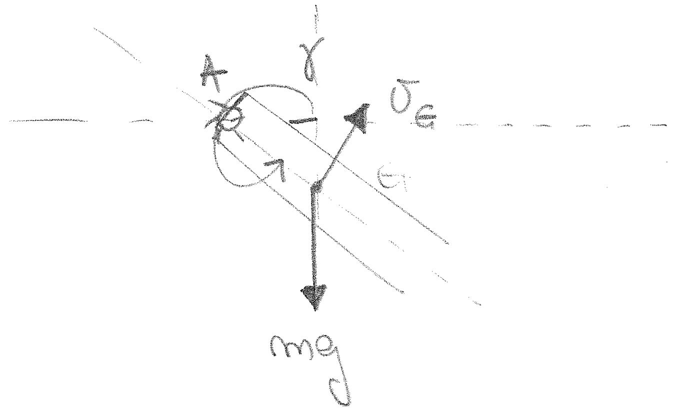
3) Teo E_c

$$\begin{cases} \Pi = \overline{\Delta p S} \times \overline{v}_{pist} + m_G \overline{g} \times \overline{v}_G + m_B \overline{g} \times \overline{v}_B \\ \Pi' = \phi \end{cases}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m_G v_G^2 + \frac{1}{2} J_G \omega_{pist}^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 + \frac{1}{2} J_B \omega^2$$

$$\Pi = \Delta p \cdot S \cdot \dot{c} - m_G g \cdot \dot{\gamma} \overline{AG} \cdot \cos(180 - \gamma) + \cancel{m_B g \, v_B} = \phi$$

QUESTO ATTO di MOTO

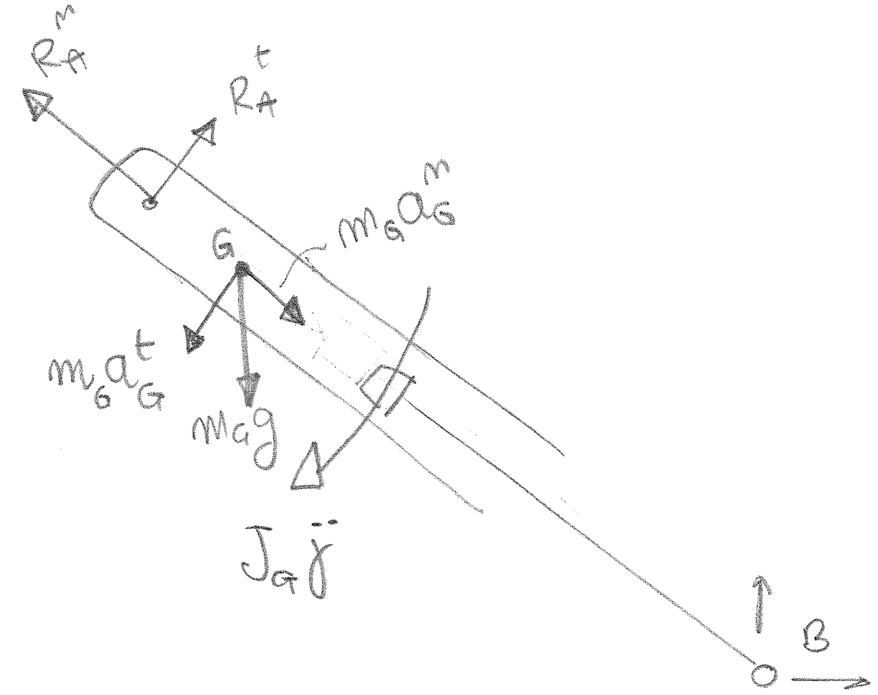


$$\frac{dE_c}{dt} = m_G v_G a_G^t + J_G \dot{\gamma} \ddot{\gamma} + m_B v_B a_B^t + J_B \omega \dot{\omega}$$

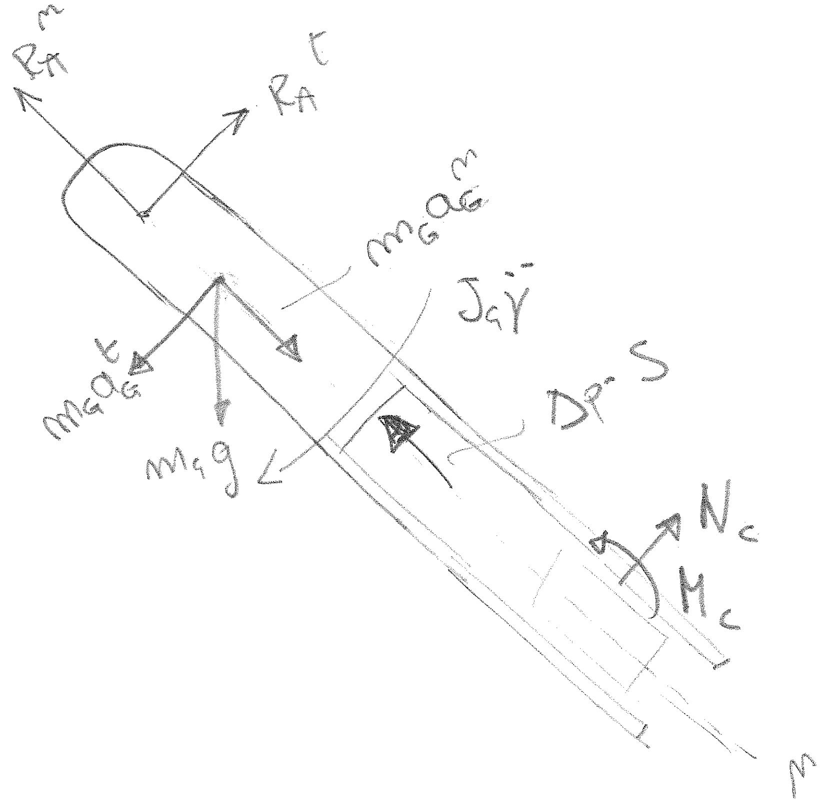
$$\Rightarrow \Delta p \cdot S \cdot \dot{c} = m_G g \dot{\gamma} \overline{AG} \cos(180 - \gamma) + m_G v_G a_G^t + J_G \dot{\gamma} \ddot{\gamma} + m_B v_B a_B^t + J_B \omega \dot{\omega}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Calcolo } \Delta p}$

4)



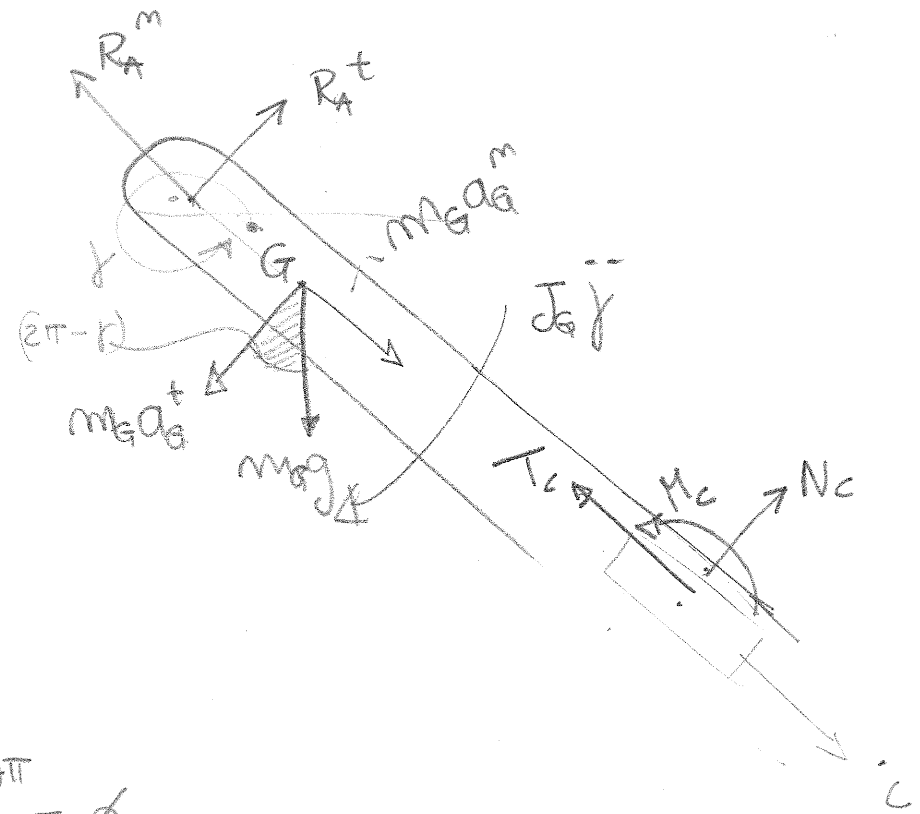
$\Sigma M_B^{Att + pistone} = \emptyset \Rightarrow$ trovo R_A^t



$\Sigma F_n^{Attuatore} = 0 \Rightarrow$ trovo R_A^n

5) se attrito $\Rightarrow$ attrito radente

$$|\bar{T}_c| = f_r \cdot |\bar{N}|$$



$$\Sigma F_t^{A\Pi} = \emptyset$$

$$N_c + R_A^t - m_G a_G^t - m_G g \cos(2\pi - \gamma) = \emptyset \quad \Rightarrow \boxed{N_c}$$

$$\Rightarrow \quad T_C = f_r \cdot N_c$$

$$\Rightarrow \quad \Pi' = - T_C \cdot \dot{C} \quad \Rightarrow \text{potenza persa x attrito}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta p' S \cdot \dot{c} = \Delta p \cdot S \cdot \dot{c} - T_c \cdot \dot{c}$$

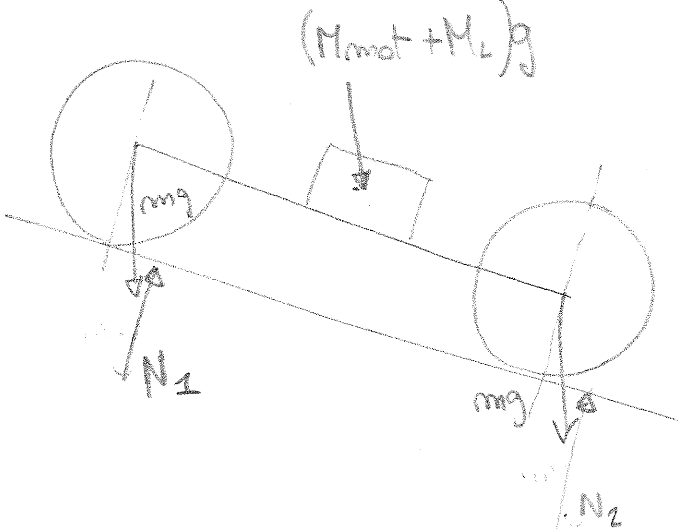
$$\boxed{\Rightarrow \text{calcolo } \Delta p'}$$

ES2

1) Motore scollegato $\Rightarrow W_m = \emptyset \Rightarrow$ moto RETROGRADO

$W_m = \emptyset$

$W_R = (+mg\,\text{sen}\alpha \cdot v_R) \cdot 2 + (M_{mot} + M_L) g\,\text{sen}\alpha\, v_L + W_{ATT\,VOLV}$



$v_L = v_R$

$$W_{ATT\,VOLV} = -N_1 \cdot u \cdot \omega_R - N_2 \cdot u \cdot \omega_R = -(N_1 + N_2) \cdot f_v \cdot R \cdot \frac{v}{R} = -Mg \cdot \cos\alpha\, f_v\, v$$

$$N_1 + N_2 = (2m + M_{mot} + M_L) g \cos\alpha = Mg\cos\alpha$$

$$\Rightarrow W_R = (2m + M_{mot} + M_L) g\,\text{sen}\alpha\, v - Mg\cos\alpha\, f_v v = Mg(\text{sen}\alpha - f_v \cos\alpha) \cdot v$$

$$W_p = -(1-\eta_c) W_e$$

$$W_e = Mg(\mathrm{sen}\,\alpha - f_v \cos\alpha)\, v - \left(M + 2 J/R^2\right) v a$$

$$E_c^{utile} = \left(\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2\right) 2 + \frac{1}{2} M_{mot} v^2 + \frac{1}{2} M_L v^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(2 m v^2 + M_{mot} + M_L\right) v^2 + \frac{1}{2}\left(2 J \omega^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}(M) v^2 + \frac{1}{2}\left(2 J \omega^2\right)$$

$$\frac{dE_c}{dt} = M v a + 2 J \omega \dot{\omega} \qquad \left(\omega = \frac{v}{R}\right)$$

$$= M v \cdot a + 2J \frac{v \cdot a}{R^2}$$

$$= \left(M + 2\frac{J}{R^2}\right) v a$$

$$E_c^{sist} = \frac{1}{2} J_m \omega_m^2 + E_c^{utile} \qquad \left(v = \omega R = \tau \omega_m R\right)$$

$$\frac{dE_c}{dt} = J_m \omega_m \dot{\omega}_m + \left(M + \frac{2J}{R^2}\right) v a$$

$$= J_m \dot{\omega}_m \omega_m + \left(M + \frac{2J}{R^2}\right) \tau^2 R^2 \omega_m \dot{\omega}_m$$

$$W_m + W_e + W_p = \frac{dE_c}{dt}$$

$$\cancel{Mg(\operatorname{sen}\alpha - f_v\cos\alpha)\tau\omega_m R} - \cancel{Mg(\operatorname{sen}\alpha - f_v\cos\alpha)\tau\omega_m R} +$$

$$+ \cancel{\left(M + 2\frac{J}{R^2}\right)\tau^2 R^2 \omega_m \dot{\omega}_m} + \eta_R M g(\operatorname{sen}\alpha - f_v\cos\alpha)\tau\cancel{\omega_m} R +$$

$$- \eta_R\left(M + 2J/R^2\right)\tau^2 R^2 \cancel{\omega_m}\dot{\omega}_m =$$

$$= J_m \cancel{\omega_m}\dot{\omega}_m + \cancel{\left(M + \frac{2J}{R^2}\right)\tau^2 R^2 \omega_m \dot{\omega}_m}$$

$$\dot{\omega}_m\left(J_m + \eta_R\tau^2\left(MR^2 + 2J\right)\right) = \eta_R M g(\operatorname{sen}\alpha - f_v\cos\alpha)\tau R$$

$$\boxed{\dot{\omega}_m = \frac{\eta_R M g(\operatorname{sen}\alpha - f_v\cos\alpha)\tau R}{J_m + \eta_R\tau^2\left(MR^2 + 2J\right)}}$$

2) $W_m = + C_f \cdot \omega_m$ ⇒ ancora moto retrogrado

a regime ⇒ $\frac{dE_c}{dt} = \phi$

$$\boxed{C_f = -\eta_R Mg(\operatorname{sen}\alpha - f_v \cos\alpha)\tau R < 0}$$ x' frenante

---

3) Scrivo Wutiematore → perché moto diretto deve essere < 0

$$\Rightarrow Mg(\operatorname{sen}\alpha - f_v \cos\alpha)\cancel{v} - \left(M + 2J/R^2\right)\cancel{v}a < 0$$

$$\boxed{\Rightarrow a > \frac{Mg(\operatorname{sen}\alpha - f_v \cos\alpha)}{M + 2J/R^2} = a^*}$$

---

4) Moto diretto → $W_m = C_m \omega_m$

$$W_p = -(1-\eta_D)(C_m \omega_m - J_m \omega_m \dot{\omega}_m)$$

$$W_R = Mg(\operatorname{sen}\alpha - f_v \cos\alpha)$$

$$C_m \cancel{\omega_m} - \cancel{C_m} \omega_m + J_m \cancel{\omega_m} \dot{\omega}_m^* + \eta_D C_m \cancel{\omega_m} - \eta_D J_m \cancel{\omega_m} \dot{\omega}_m^* +$$

$$+ Mg\left(\operatorname{sen}\alpha - f_v \cos\alpha\right) \tau \cancel{\omega_m} R =$$

$$= J_m \dot{\omega}^*_{\cancel{m}} \omega_m + \left(M + \frac{2J}{R^2}\right) \tau^2 R^2 \cancel{\omega_m} \dot{\omega}_m^*$$

$$C_m^* = \frac{1}{\eta_D}\left[J_m \eta_D + \left(M + \frac{2J}{R^2}\right)\tau^2 R^2\right] \dot{\omega}_m^* - Mg\left(\operatorname{sen}\alpha - f_v \cos\alpha\right)\tau R$$

$$\left(\text{con} \quad a^* = \tau \dot{\omega}_m^* R\right)$$

Es 3

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2$$

$$V_{el} = \frac{1}{2} k_1 \Delta l_1^2 + \frac{1}{2} k_2 \Delta l_2^2 + \frac{1}{2} k_3 \Delta l_3^2$$

$$V_g = m_3 g h_3$$

$$\delta^* L = F(t) \delta^* y_F$$

	$\dot\theta$
v_1	$-R_1$
ω_1	$+1$
v_2	$-R_1$
v_3	$-R_1$

	θ
Δl_1	$+(R_1+R_2)$
Δl_2	$+R_1$
Δl_3	$-R_1$

$$h_3 = -R_1 \theta$$

$$\delta^* y_F = -R_1 \delta^* \theta$$

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 R_1^2 \dot\theta^2 + \frac{1}{2} J_1 \dot\theta^2 + \frac{1}{2} m_2 R_1^2 \dot\theta^2 + \frac{1}{2} m_3 R_1^2 \dot\theta^2$$

$$= \frac{1}{2} \left(m_1 R_1^2 + J_1 + m_2 R_1^2 + m_3 R_1^2 \right) \dot\theta^2$$

$$= \frac{1}{2} m^* \dot\theta^2$$

$$V_{el} = \frac{1}{2} k_1 (R_1+R_2)^2 \theta^2 + \frac{1}{2} k_2 R_1^2 \theta^2 + \frac{1}{2} k_3 R_1^2 \theta^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(k_1 (R_1+R_2)^2 + k_2 R_1^2 + k_3 R_1^2 \right) \theta^2$$

$$= \frac{1}{2} k^* \theta^2$$

$$V_g = - m_3 g R_1 \theta \Rightarrow \text{lineare in } \theta$$

$$\delta^* L = - F(t) R_1 \delta^* \theta$$

$\Rightarrow$ Lagrange $\Rightarrow$

$$\left(m_1 R_1^2 + J_1 + m_2 R_1^2 + m_3 R_1^2\right)\ddot{\theta} + \left(k_1 (R_1+R_2)^2 + k_2 R_1^2 + k_3 R_1^2\right)$$

$$= - F_0 \cos(2\Omega t) R_1 \cancel{\left(+ m_3 g R_1\right)}$$

$$\bar{F}_0 = - F_0 R_1$$

$$\Rightarrow \boxed{m^* \ddot{\theta} + k^* \theta = \bar{F}_0 \cos(2\Omega t)}$$