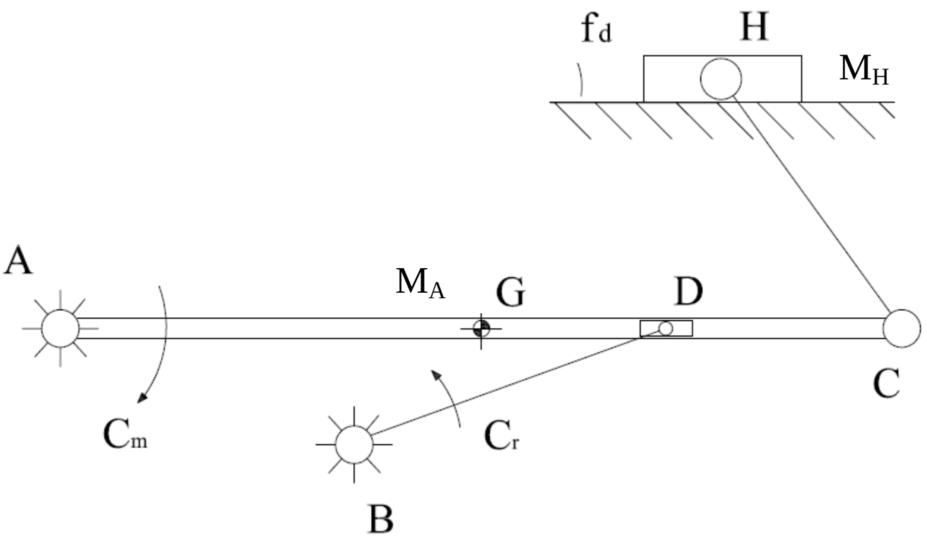
MECCANICA APPLICATA ALLE MACCHINE
Allievi meccanici AA.2009-2010 prova del 07-07-2010

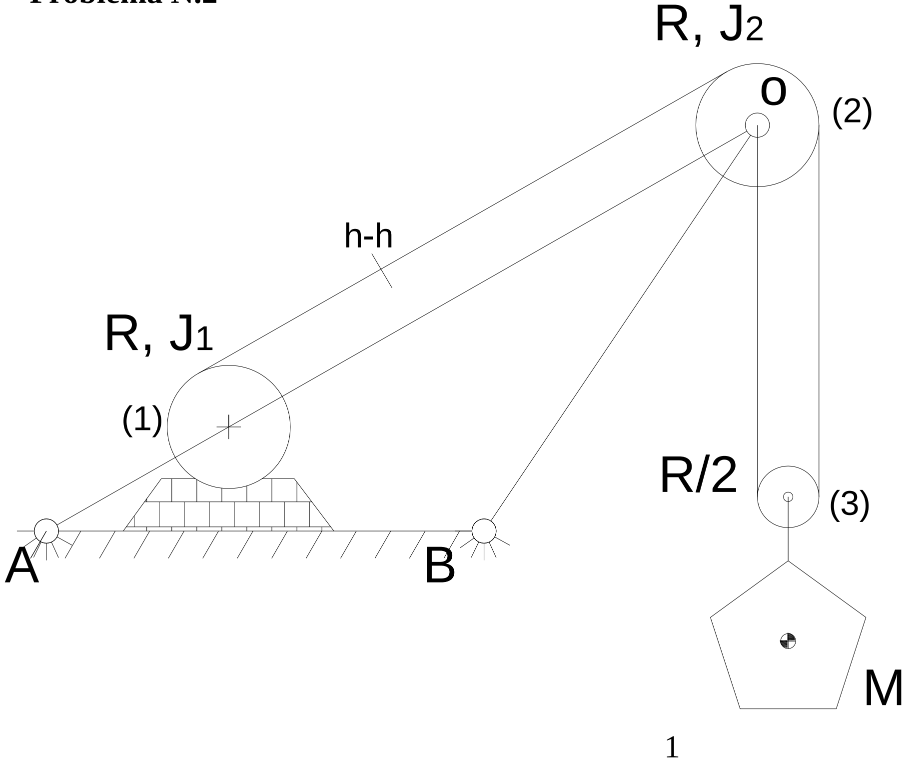
Problema N.1

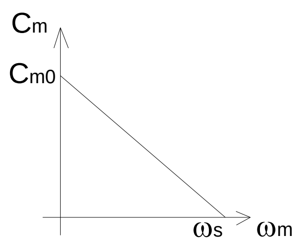


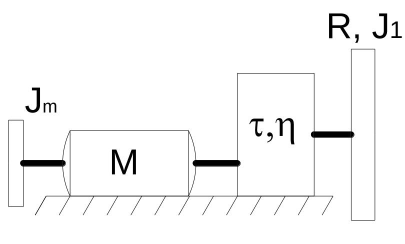
Il sistema meccanico riportato in figura è posizionato nel piano verticale. Siano *l*, *d* ed *h* rispettivamente le lunghezze delle aste AC, BD e CH. Le prime due aste sono vincolate tra loro mediante un corsoio in D, che scorre senza attrito all'interno dell'asta AC. L'asta CH è collegata ad AC con una cerniera in C, mentre in H vi è un corsoio di altezza trascurabile che striscia su un piano orizzontale (vincolo bilatero). Sia f_d il coefficiente di attrito dinamico. Siano M_H la massa del corsoio in H ed M_A la massa dell'asta omogenea AC avente baricentro in G. Masse e momenti di inerzia delle aste BD e CH e del corsoio in D sono trascurabili.
Si consideri il sistema nell'istante in cui l'asta AC è in posizione orizzontale. Noto il valore della coppia resistente C_r e la velocità angolare ω=cost dell'asta BD, concorde con la coppia C_m, si richiede:

1. determinare velocità e accelerazione del corsoio in H;
2. determinare tramite un bilancio di potenze il valore della coppia C_m necessaria a garantire il moto del sistema;
3. calcolare le reazioni vincolari in C.

Problema N.2







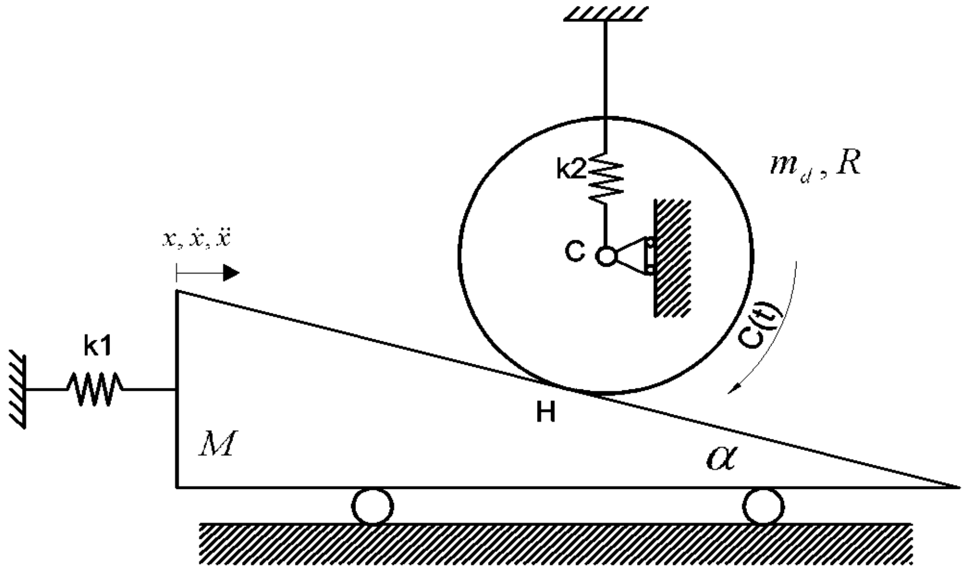
Il sistema rappresentato in figura schematizza il funzionamento di una gru da carico. La fune per il sollevamento del carico di massa M ha un'estremità vincolata nel punto O (centro della carrucola 2 facente parte dell'arco a 3 cerniere ABO), si avvolge sulla carrucola (3), sulla carrucola (2) e quindi sulla puleggia (1), messa in rotazione dal sistema motore trasmissione anch'esso rappresentato in figura. Il carico M è appeso al centro della puleggia (3).
Il gruppo motore, trasmissione, puleggia (1) è solidale con il telaio costituito dall'arco a 3 cerniere AOB.
Supponendo:

- fune inestensibile
- attriti sulle carrucole e sulla puleggia trascurabili
- puleggia (3) di massa ed inerzia trascurabili

Si determinino:

1. Supponendo il sistema inizialmente fermo, determinare l'accelerazione angolare dell'albero motore con cui viene SOLLEVATO il carico M allo spunto.
2. La coppia motrice a regime per sollevare il carico.
3. La potenza del motore a regime per sollevare il carico.
4. Il tiro della fune nella sezione h-h nella condizione di lavoro individuata nel punto 1.
5. La coppia motrice a regime necessaria per garantire la DISCESA del carico con velocità costante pari a v_2.

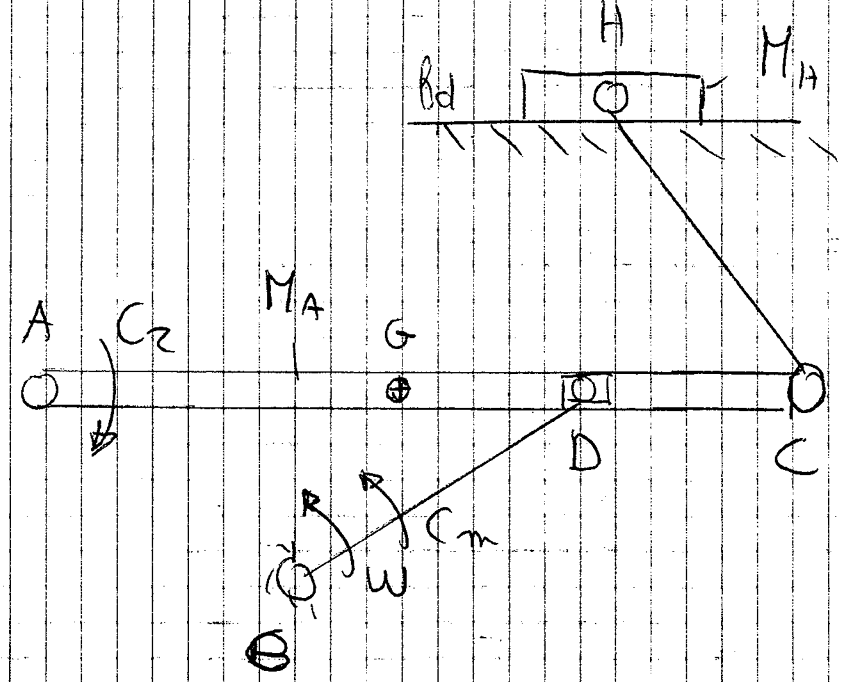
Problema N.3



Il sistema vibrante sopra raffigurato è posto nel piano verticale e si trova nella posizione di equilibrio statico. Il cuneo di massa M e angolo di inclinazione α è vincolato a traslare in direzione orizzontale ed è collegato a terra mediante una molla di rigidezza K_1. Il disco omogeneo, di cui sono noti raggio R e massa m_d, ha il centro C vincolato da un carrello a muoversi lungo la direzione verticale, e presenta un contatto di rotolamento senza strisciamento rispetto al cuneo (punto H). La molla di rigidezza K_2 collega il centro C del disco a terra.
Sul disco è applicata una coppia nota funzione del tempo pari a $C(t)=C_0\cos(\Omega t)$.
Si richiede di ricavare, utilizzando come coordinata libera x e nell'ipotesi di puro rotolamento senza resistenza (f_v=0):

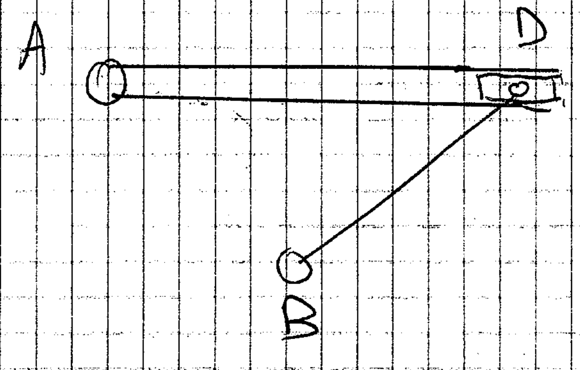
- l'equazione di moto del sistema;
- la pulsazione naturale ω_o del sistema;
- l'ampiezza del moto a regime.

1)

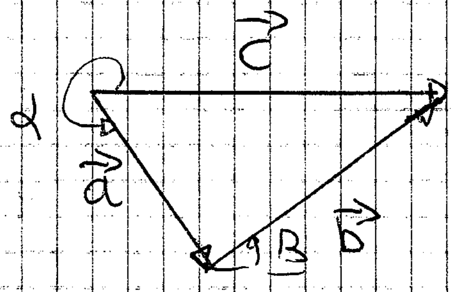


CINEMATICA

SOTTOSISTEMA ADB



$\Rightarrow$



$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{c}$$

$$a e^{i\alpha} + b e^{i\beta} = c e^{i\gamma}$$

$$\begin{cases} a \cos\alpha + b \cos\beta = c \cos\gamma \\ a \operatorname{sen}\alpha + b \operatorname{sen}\beta = c \operatorname{sen}\gamma \end{cases}$$

a, b, α costanti

$$b i \dot{\beta} e^{i\beta} = c i \dot{\gamma} e^{i\gamma} + \dot{c} e^{i\gamma}$$

$$b \dot{\beta} e^{i(\beta + \frac{\pi}{2})} = c \dot{\gamma} e^{i(\gamma + \frac{\pi}{2})} + \dot{c} e^{i\gamma}$$

$$\begin{cases} -b \dot{\beta} \operatorname{sen} \beta = -c \dot{\gamma} \operatorname{sen} \gamma + \dot{c} \cos \gamma \\ b \dot{\beta} \cos \beta = c \dot{\gamma} \cos \gamma + \dot{c} \operatorname{sen} \gamma \end{cases}$$

$w = \dot{\beta}$ noto $\quad \dot{c}, \dot{\gamma}$ incognite

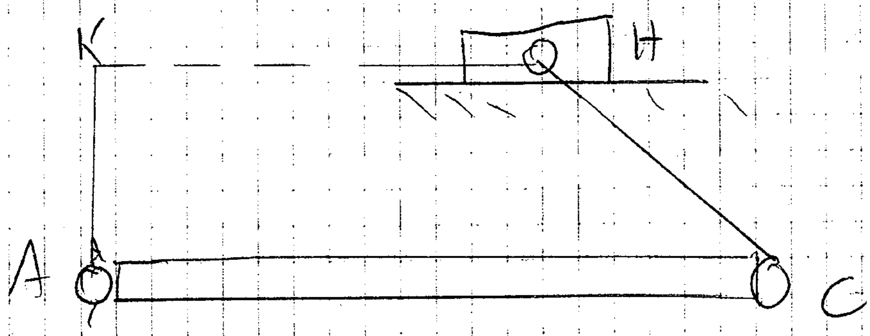
$$\begin{bmatrix} \cos \gamma & -c \operatorname{sen} \gamma \\ \operatorname{sen} \gamma & c \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{c} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -b \dot{\beta} \operatorname{sen} \beta \\ b \dot{\beta} \cos \beta \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -b \ddot{\beta} \operatorname{sen} \beta - b \dot{\beta}^2 \cos \beta = -\dot{c} \dot{\gamma} \operatorname{sen} \gamma - c \ddot{\gamma} \operatorname{sen} \gamma - c \dot{\gamma}^2 \cos \gamma + \\ \qquad + \ddot{c} \cos \gamma - \dot{c} \dot{\gamma} \operatorname{sen} \gamma \\ b \ddot{\beta} \cos \beta - b \dot{\beta}^2 \operatorname{sen} \beta = \dot{c} \dot{\gamma} \cos \gamma + c \ddot{\gamma} \cos \gamma - c \dot{\gamma}^2 \operatorname{sen} \gamma + \\ \qquad + \ddot{c} \operatorname{sen} \gamma + \dot{c} \dot{\gamma} \cos \gamma \end{cases}$$

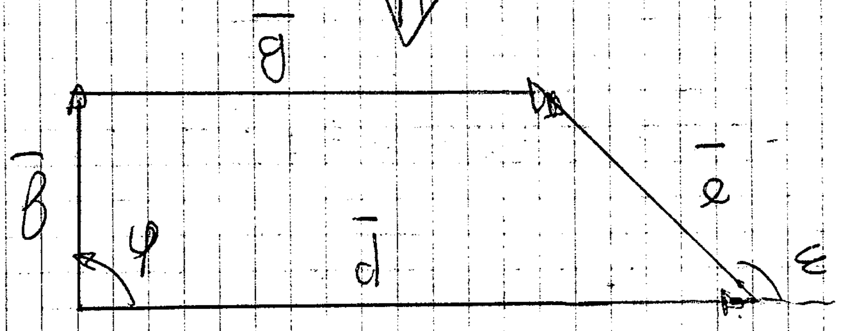
$$\dot{w} = \ddot{\beta} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \cos \gamma & -c \operatorname{sen} \gamma \\ \operatorname{sen} \gamma & c \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{c} \\ \ddot{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -b \dot{\beta}^2 \cos \beta + 2 \dot{c} \dot{\gamma} \operatorname{sen} \gamma + c \dot{\gamma}^2 \cos \gamma \\ -b \dot{\beta}^2 \operatorname{sen} \beta - 2 \dot{c} \dot{\gamma} \cos \gamma + c \dot{\gamma}^2 \operatorname{sen} \gamma \end{bmatrix}$$

SOTTOSISTEMA ACH



$\Downarrow$



$$\bar d + \bar e = \bar \beta + \bar g$$

$$d e^{i\delta} + e e^{i\varepsilon} = \beta e^{i\varphi} + g e^{i\zeta}$$

$$\begin{cases} d\cos\delta + e\cos\varepsilon = \beta\cos\varphi + g\cos\zeta \\ d\,\mathrm{sen}\,\delta + e\,\mathrm{sen}\,\varepsilon = \beta\,\mathrm{sen}\,\varphi + g\,\mathrm{sen}\,\zeta \end{cases}$$

$d, e, \beta, \varphi, \zeta$ costanti

$$d i\dot\delta e^{i\delta} + e i\dot\varepsilon e^{i\varepsilon} = \dot g e^{i\zeta}$$

$$d\dot\delta e^{i(\delta+\frac{\pi}{2})} + e\dot\varepsilon e^{i(\varepsilon+\frac{\pi}{2})} = \dot g e^{i\zeta}$$

$$\begin{cases} -d\dot\delta\,\mathrm{sen}\,\delta - e\dot\varepsilon\,\mathrm{sen}\,\varepsilon = \dot g\cos\zeta \\ d\dot\delta\cos\delta + e\dot\varepsilon\cos\varepsilon = \dot g\,\mathrm{sen}\,\zeta \end{cases}$$

$\dot{\delta} = \dot{\gamma}$ noto

$$\begin{bmatrix} \cos\zeta & e \operatorname{sen}\varepsilon \\ \operatorname{sen}\zeta & -e\cos\varepsilon \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{g} \\ \dot{\varepsilon} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -d\dot{\delta}\operatorname{sen}\delta \\ d\dot{\delta}\cos\delta \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -d\ddot{\delta}\operatorname{sen}\delta - d\dot{\delta}^2\cos\delta = e\ddot{\varepsilon}\operatorname{sen}\varepsilon + e\dot{\varepsilon}^2\cos\varepsilon + \ddot{g}\cos\zeta \\ d\ddot{\delta}\cos\delta - d\dot{\delta}^2\operatorname{sen}\delta = -e\ddot{\varepsilon}\cos\varepsilon + e\dot{\varepsilon}^2\operatorname{sen}\varepsilon + \ddot{g}\operatorname{sen}\zeta \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\zeta & e \operatorname{sen}\varepsilon \\ \operatorname{sen}\zeta & -e\cos\varepsilon \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{g} \\ \ddot{\varepsilon} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -d\ddot{\delta}\operatorname{sen}\delta - d\dot{\delta}^2\cos\delta - e\dot{\varepsilon}^2\cos\varepsilon \\ d\ddot{\delta}\cos\delta - d\dot{\delta}^2\operatorname{sen}\delta - e\dot{\varepsilon}^2\operatorname{sen}\varepsilon \end{bmatrix}$$

$\ddot{\delta} = \ddot{\gamma} = $ noto

$\vec{v}_H = \dot{g}\,\vec{i}$

$\vec{a}_H = \ddot{g}\,\vec{i}$

$$\Pi + \Pi' = \frac{dE_c}{dt}$$

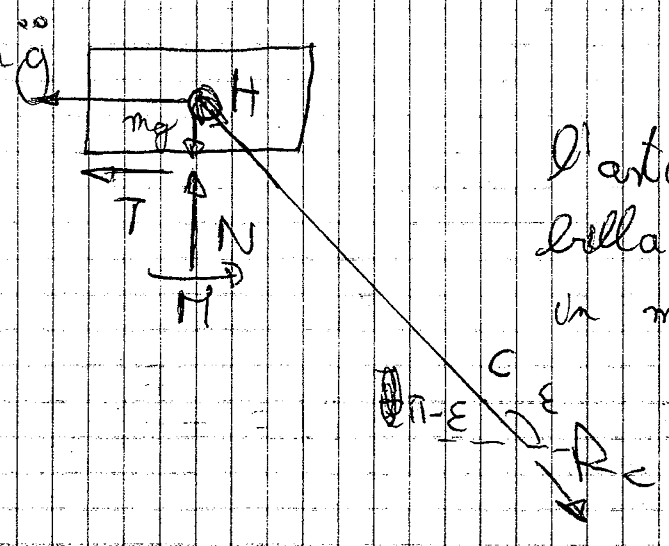
$$\Pi = \vec{C}_m \times \vec{\omega} + \vec{C}_2 \times \dot{\vec{\gamma}} + M_A \vec{g} \times \vec{V}_G + M_H \vec{g} \times \vec{V}_H$$

$$\Pi' = \vec{T} \times \vec{V}_H$$

$$E_c = \frac{1}{2} M_A V_G^2 + \frac{1}{2} J_A \dot{\gamma}^2 + \frac{1}{2} M_H V_H^2$$

$$\Pi = C_m \omega - C_2 \dot{\gamma} + M_A g V_G =$$
$$= C_m \omega - C_2 \dot{\gamma} - \frac{1}{2} M_A g L \dot{\gamma}$$

$$\Pi' = -T V_H = -T \dot{g} = -f_d N \dot{g}$$



l'asta HC è una biella (non essendo caricata in mezzeria)

$$\sum \vec{M}_H^{\,CORSOIO} = 0 \Rightarrow M = 0$$

$$\sum \vec{M}_C^{\,CORSOIO + ASTA} = 0 \quad +\circlearrowleft$$

$$\begin{cases} T l \, sen(\pi - \varepsilon) - N \cos(\pi - \varepsilon) + m \ddot{g} \, l \, sen(\pi - \varepsilon) = 0 \\ T = f_d N \end{cases}$$

ricavo N

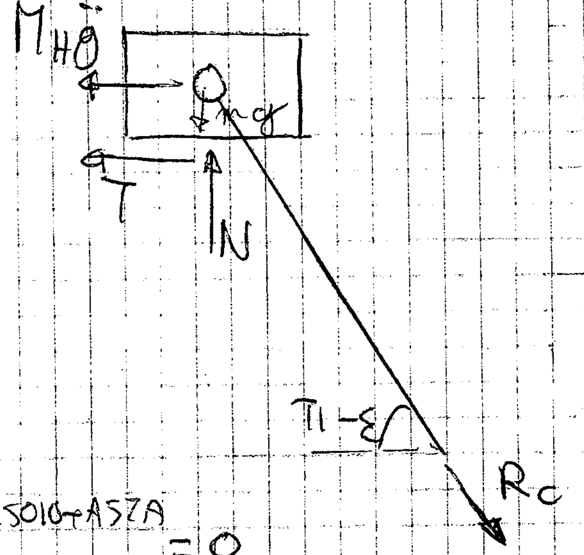
$$\frac{dE_c}{dt} = M_A v_G a_{Gt} + M_H v_H a_H + J_A \dot{\gamma} \ddot{\gamma} =$$

$$= \frac{1}{4} M_A \dot{\gamma} \ddot{\gamma} L^2 + M_H \dot{\vartheta} \ddot{\vartheta} + \frac{1}{12} M_A L^2 \dot{\gamma} \ddot{\gamma} =$$

$$= \frac{1}{3} M_A L^2 \dot{\gamma} \ddot{\gamma} + M_H \dot{\vartheta} \ddot{\vartheta}$$

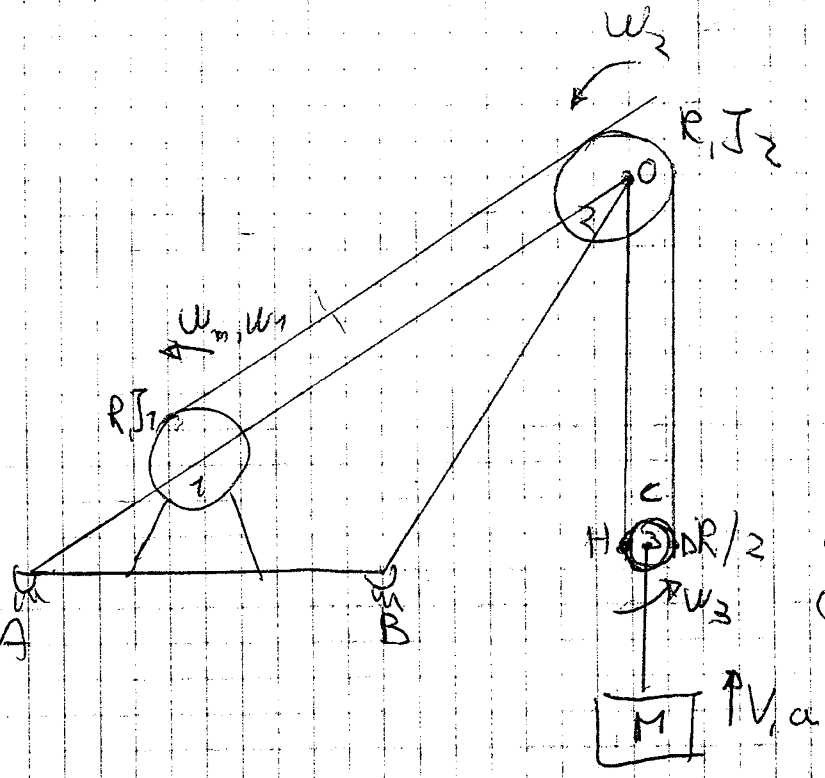
$$C_m \omega - C_r \dot{\gamma} - \frac{1}{2} M_A g L \dot{\gamma} - f_d N \dot{\vartheta} = \frac{1}{3} M_A L^2 \dot{\gamma} \ddot{\gamma} + M_H \dot{\vartheta} \ddot{\vartheta}$$

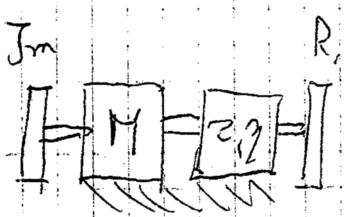
$$C_m = \frac{1}{\omega} \left[C_r \dot{\gamma} + \frac{1}{2} M_A g L \dot{\gamma} + f_d N \dot{\vartheta} + \frac{1}{3} M_A L^2 \dot{\gamma} \ddot{\gamma} + M_H \dot{\vartheta} \ddot{\vartheta} \right]$$

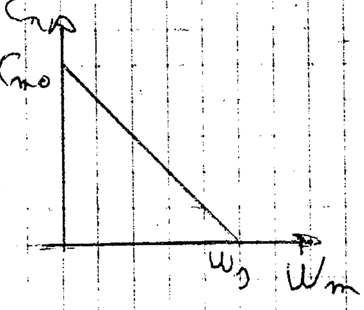


$$\sum F_y^{CORSOIO+ASTA} = 0$$

$$R_C \operatorname{sen}(\pi - \varepsilon) = N - mg \Rightarrow R_C = \frac{N - mg}{\operatorname{sen}(\pi - \varepsilon)}$$







CARICO IN SALITA

$W_m = C_m \omega_m$

$W_r = -MgV$

$-W_1 + C_m \omega_m = J_m \omega_m \dot{\omega}_m$

$W_1 = C_m \omega_m - J_m \omega_m \dot{\omega}_m$

$-W_2 - mgV = J_1 \omega_1 \dot{\omega}_1 + J_2 \omega_2 \dot{\omega}_2 + MVa$

$\omega_1 = \tau \omega_m \qquad \omega_2 = \omega_1 = \tau \omega_m$

$V_D = \omega_1 R \qquad \cancel{\omega_3 = \omega_1}$

$V_H = 0 \Rightarrow \vec{V_D} = \vec{V_H} + \vec{\omega_3} \wedge (D-H) \Rightarrow V_D = \omega_3 \cdot 2\left(\frac{R}{2}\right) = \omega_3 R$

$$\omega_3 = \omega_1 = \tau\, \omega_m$$

$$v_c = \omega_3 \cdot \frac{R}{2} = \tau\, \omega_m \frac{R}{2}$$

$$W_2 = -mgV - J_1 \tau^2 \omega_m \dot{\omega}_m - J_2 \tau^2 \omega_m \dot{\omega}_m - M\tau^2 \left(\frac{R}{2}\right)^2 \omega_m \dot{\omega}_m$$

se ω_m è concorde con $\dot{\omega}_m$

$W_2 < 0 \Rightarrow$ MOTO DIRETTO

$$W_p = -(1-\eta)\left(C_m \omega_m - J_m \omega_m \dot{\omega}_m\right)$$

$$E_c = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} J_m \omega_m^2$$

$$= J_1 \omega_1 \dot{\omega}_1 + J_2 \omega_2 \dot{\omega}_2 + M v a + J_m \omega_m \dot{\omega}_m =$$

$$= \left(J_m + J_1 \tau^2 + J_2 \tau^2 + M\tau^2 \frac{R^2}{4}\right) \omega_m \dot{\omega}_m$$

$$W_m + W_p + W_2 = \frac{dE_c}{dt}$$

$$C_m \omega_m - (1-\eta)\left(C_m \omega_m - J_m \omega_m \dot{\omega}_m\right) - Mg\tau\frac{R}{2}\omega_m =$$

$$= \left(J_1 \tau^2 + J_2 \tau^2 + M\tau^2 \frac{R^2}{4} + J_m\right) \omega_m \dot{\omega}_m$$

$$\dot{\omega}_m = \frac{\eta C_{m,0} - Mg\tau\frac{R}{2}}{J_1 \tau^2 + J_2 \tau^2 + M\tau^2 \frac{R^2}{4} + \eta J_m}$$

CONDIZIONE DI REGIME

$$W_m = C_m \omega_m$$

$$W_2 = -Mg\tau \frac{R}{2}\omega_m$$

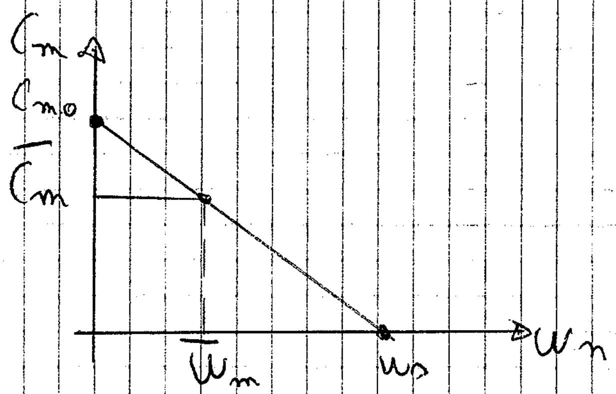
$$W_1 = C_m \omega_m$$

$$W_2 = -Mg\tau\frac{R}{2}\omega_m < 0 \quad \text{MOTO DIRETTO}$$

$$W_p = -(1-\eta) C_m \omega_m$$

$$C_m \omega_m - Mg\tau\frac{R}{2}\omega_m - (1-\eta) C_m \omega_m = 0$$

$$\bar{C}_m = \frac{1}{\eta} Mg\tau\frac{R}{2}$$



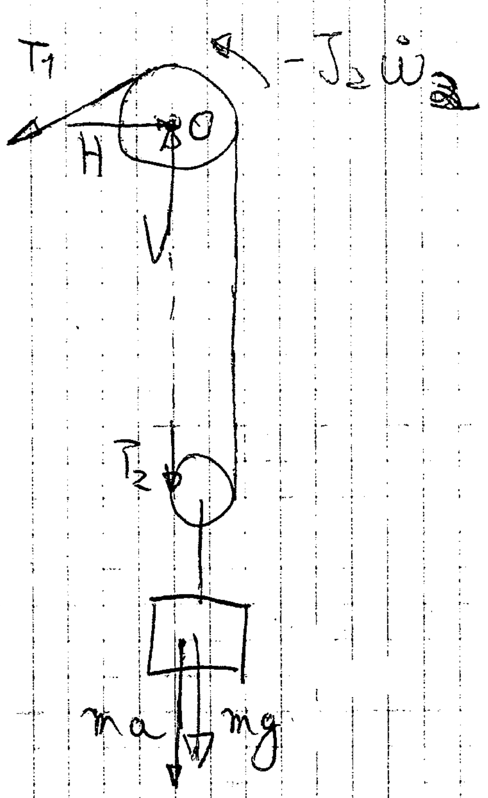
$$C_m - C_{m0} = \frac{-C_{m0}}{\omega_s}\cdot\omega_m$$

$$C_m = -\frac{C_{m0}}{\omega_s}\omega_m + C_{m0}$$

$$\bar{C}_m = -\frac{C_{m0}}{\omega_s}\bar{\omega}_m + C_{m0}$$

$$\bar{\omega}_m = -\frac{\omega_s}{C_{m0}}\left(\bar{C}_m - C_{m0}\right)$$

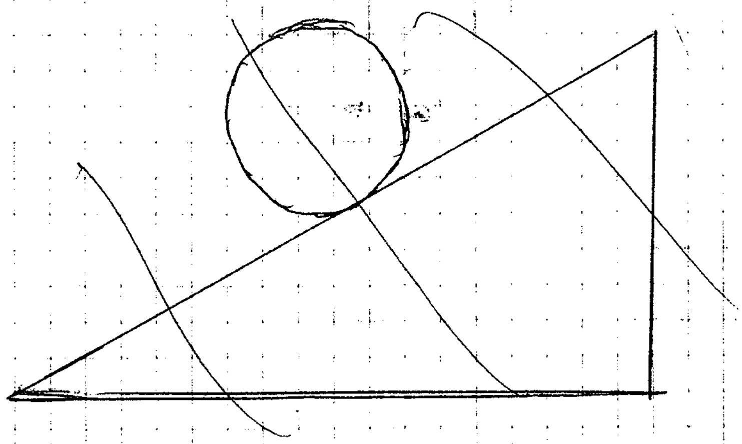
$$W_m = \bar{C}_m\bar{\omega}_m = -\frac{\omega_s}{C_{m0}}\left(\bar{C}_m - C_{m0}\right)\cdot\bar{C}_m$$

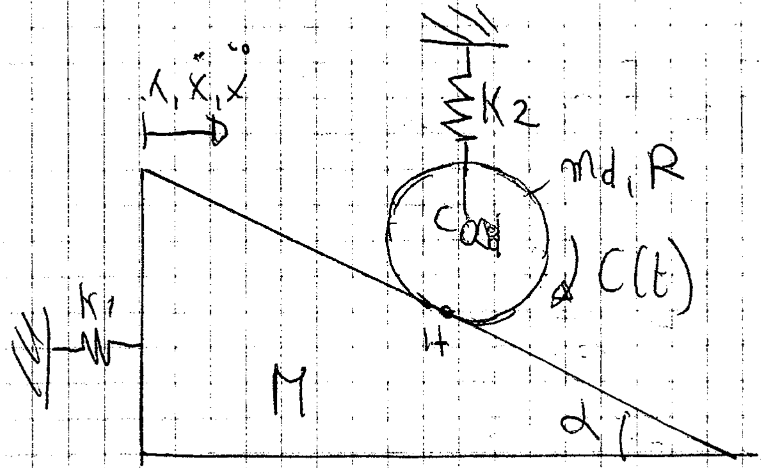


$$\sum \vec{M}_0^{\,2+3+MASSA} = 0 \quad +\circlearrowleft$$

$$T R - (ma + mg)\frac{R}{2} + J_2\dot{\omega}_2 = 0$$

$$T = \frac{1}{2}\left(mg + m\tau\frac{R}{2}\dot{\omega}_m\right) - J_2\frac{\dot{\omega}_2}{R}$$





$$E_c = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} M_d V_c^2 + \frac{1}{2} J_d \omega^2$$

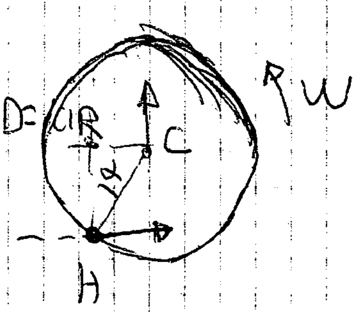
$$D = 0$$

$$V = V_K + V_g = \frac{1}{2} K_1 \Delta l_1^2 + \frac{1}{2} K_2 \Delta l_2^2 + Mgh + m_d g h_c$$

considero $x=0$ nella posizione di equilibrio statico, pertanto il contributo dei precarichi si elide con quello delle forze peso

$$\delta^* L = \vec{C} \times \delta \vec{\theta}$$

	$\dot{x}$
V	1
V_C	$\mathrm{tg}\,\alpha$
ω	$\frac{1}{R\cos\alpha}$



D è il CIR del disco

$$\vec{V}_C = \vec{\omega} \wedge (C-D)$$

$$\vec{V}_H = \vec{\omega} \wedge (H-D)$$

$$\vec{V}_H = \omega \vec{k} \wedge (-R\cos\alpha\,\vec{j}) = R\cos\alpha \cdot \omega\,\vec{i}$$

$$\vec{V}_H = \dot{x}\,\vec{i}$$

$$\dot{x} = \omega R\cos\alpha \Rightarrow \omega = \frac{\dot{x}}{R\cos\alpha}$$

$$\vec{V}_C = \frac{\dot{x}}{R\cos\alpha}\vec{k} \wedge (R\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\vec{i}) = \dot{x}\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\vec{j}$$

	x
Δl_1	1
Δl_2	$-\mathrm{tg}\,\alpha$

$$\theta = \theta(x)$$

$$\delta^*\theta = \frac{\partial\theta}{\partial x}\delta^* x = \frac{1}{R\cos\alpha}\delta^* x$$

	$\delta^* x$
$\delta^*\theta$	$\frac{1}{R\cos\alpha}$

$$E_c = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_d (\dot{x}\,tg\alpha)^2 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2} m_d R^2 \cdot \left(\frac{\dot{x}}{R\cos\alpha}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[M + m_d\, tg^2\alpha + \frac{1}{2} m_d \frac{1}{\cos^2\alpha} \right] \dot{x}^2$$

$$V = \frac{1}{2} K_1 x^2 + \frac{1}{2} K_2 (x\, tg\alpha)^2 = \frac{1}{2}\left(K_1 + K_2\, tg^2\alpha\right) x^2$$

$$\delta^* L = -C\,\delta^*\theta = -C\,\frac{\delta^* x}{R\cos\alpha}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial E_c}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\delta^* L}{\delta^* x}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt}\left[\left(M + m_d\, tg^2\alpha + \frac{1}{2}\frac{m_d}{\cos^2\alpha}\right)\dot{x}\right] =$$

$$= \left(M + m_d\, tg^2\alpha + \frac{1}{2}\frac{m_d}{\cos^2\alpha}\right)\ddot{x} =$$

$$= m^* \ddot{x}$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \left(K_1 + K_2\, tg^2\alpha\right) x = K^* x$$

$$\frac{\delta^* L}{\delta^* x} = -\frac{C}{R\cos\alpha}$$

$$m^* \ddot{x} + K^* x = -\frac{C}{R\cos\alpha}$$

$$w_0 = \sqrt{\frac{K^*}{m^*}}$$

~~$x = x_0 e$~~

$$C = C_0 \cos(\Omega t) = Re\left[C_0 e^{i\Omega t}\right]$$

$$x = x_0 e^{i\Omega t}$$

$$\left(-m^* \Omega^2 + K^*\right) x_0 e^{i\Omega t} = -\frac{C_0 e^{i\Omega t}}{R\cos\alpha}$$

$$x_0 = -\frac{\frac{C_0}{R\cos\alpha}}{-m^*\Omega^2 + K^*}$$

$$x = Re\left[x_0 e^{i\Omega t}\right] = x_0 \cos(\Omega t)$$