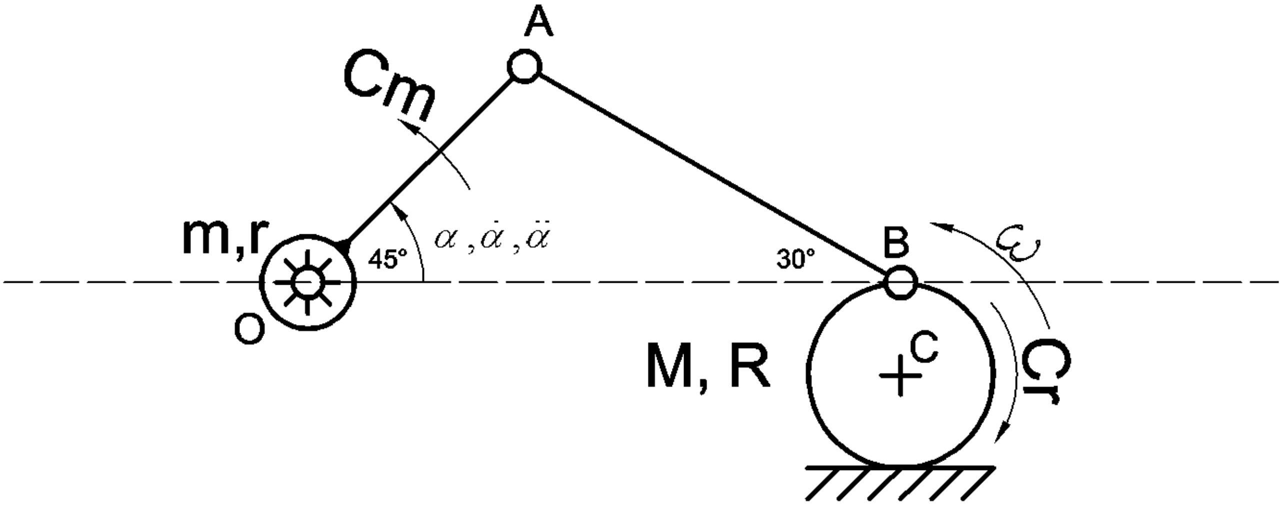
MECCANICA APPLICATA ALLE MACCHINE
Allievi meccanici AA.2008-2009 prova del 27-01-2010

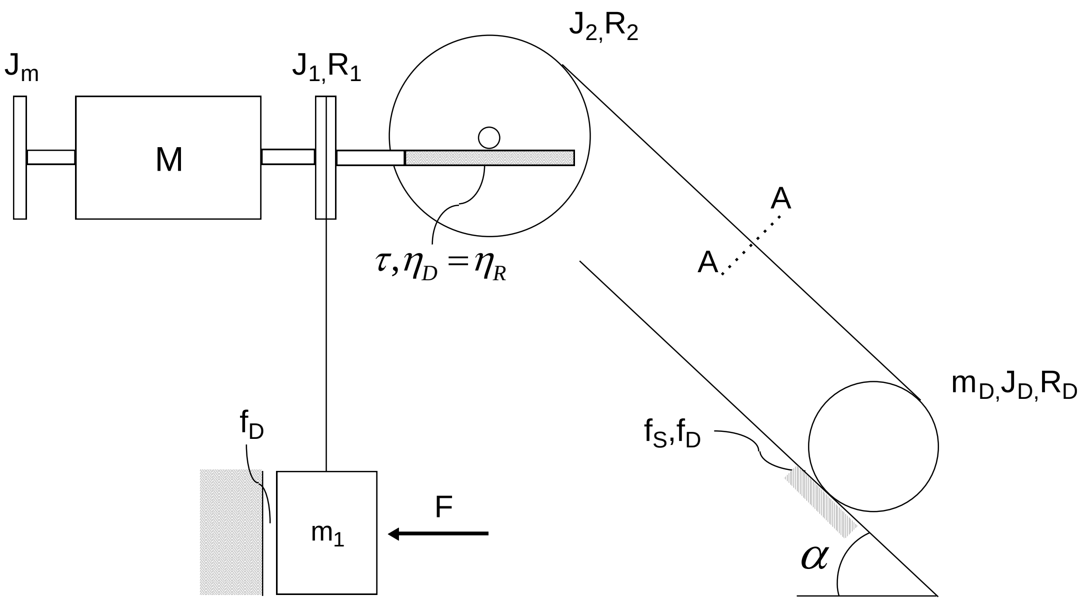
**Problema N.1**




Il sistema articolato rappresentato in figura è posto nel piano verticale. Il disco omogeneo di massa m e raggio r, incernierato a terra in O, è solidale alla manovella OA. La biella AB è incernierata in B ad un punto sulla circonferenza di un disco omogeneo di massa M, raggio R e centro C. Questo disco, cui è applicata una coppia nota pari a Cr, rotola senza strisciare su una guida orizzontale.
Ritenuta nota la geometria e assegnata la coordinata libera $\alpha$ si richiede di ricavare:

- la velocità e l'accelerazione angolare del disco di centro C;
- la coppia Cm da applicare alla manovella OA per garantire il moto;
- le reazioni vincolari nella cerniera in B.

**Problema N.2**

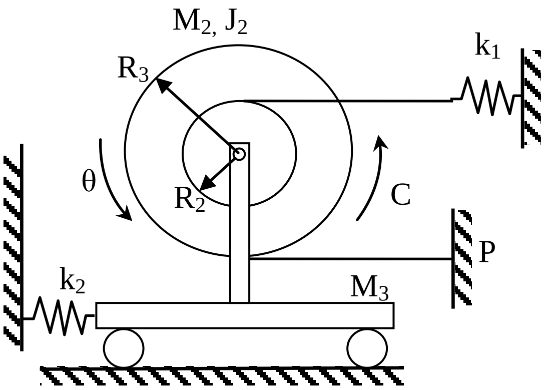



Si richiede:

1) Ipotizzando che il moto sia diretto, determinare la coppia $C_M$ che permetta di trascinare in salita a regime sia il disco di massa $m_D$ che la massa $m_1$;

2) Nella condizione definita al punto 1 determinare la tensione della fune collegata al disco di massa $m_D$ (sez.A-A).
3) Calcolare l'accelerazione angolare del motore nel caso in cui la coppia motrice si annulli a partire dalla condizione di regime definita al punto 1;
4) Nella condizione definita al punto 3, discutere il bilancio di potenze ai capi della trasmissione definendo se si tratta di moto diretto o retrogrado.

**Problema N.3**

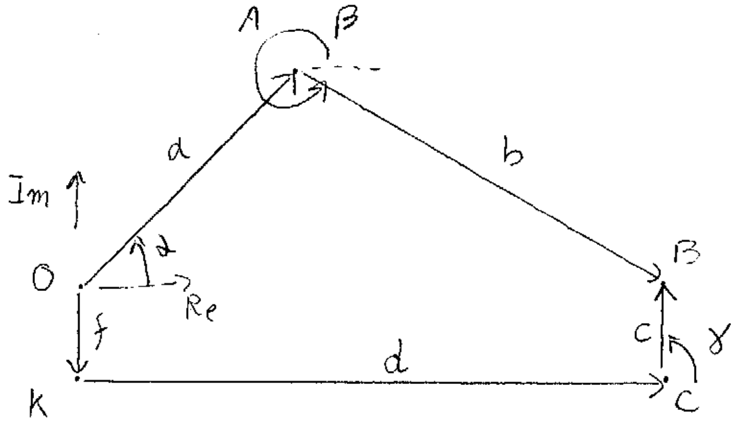



Il sistema vibrante sopra raffigurato è posto nel piano verticale. Due dischi tra loro solidali, aventi rispettivamente raggi $R_2$ e $R_3$ ($M_2$ e $J_2$ sono rispettivamente la massa ed il momento di inerzia dell'insieme dei due dischi) sono incernierati nel loro centro con un carrello di massa $M_3$ vincolato a traslare su una guida orizzontale.
Due fili inestensibili, privi di massa e di diametro trascurabile, si avvolgono sulle circonferenze dei due dischi. Il filo che si avvolge sul disco di raggio $R_3$ è vincolato a terra nel punto P. Il filo che si avvolge sul disco di raggio $R_2$ è collegato a terra mediante una molla di rigidezza $k_1$.
Una molla di rigidezza $k_2$ collega il carrello con la guida verticale.
Sui dischi solidali è applicata una coppia nota pari a $C=C_0\cos(\Omega t)$.
Si richiede di ricavare, utilizzando come coordinata libera la rotazione $\theta$ dei due dischi e nell'ipotesi di puro rotolamento senza resistenza ( $f_v=0$):

- l'equazione di moto del sistema;
- la pulsazione naturale $\omega_o$ del sistema;
- l'ampiezza del moto a regime.

# PROBLEMA N. 1

RISOLVIAMO LA CINEMATICA CON L'APPROCCIO DEI NUMERI COMPLESSI.




CHIAMO K IL PUNTO FISSO INTERSEZIONE TRA LA TRAIETTORIA DI C (ORIZZONTALE) E LA VERTICALE PER O

$$(B-A)+(A-O)=(B-C)+(C-K)+(K-O)$$

EQ. CHIUSURA

$$b e^{i\beta} + a e^{i\alpha} = c e^{i\gamma} + d - i f$$

| COST | $b$ $a$ $c$ $f$ |
|---|---|
| VAR | $\beta$ $\alpha$ $\gamma$ $d$ |

COORDINATA LIBERA: $\alpha$

$$\begin{cases} b\cos\beta + a\cos\alpha = c\cos\gamma + d \\ b\,\mathrm{sen}\,\beta + a\,\mathrm{sen}\,\alpha = c\,\mathrm{sen}\,\gamma - f \end{cases}$$

velocita'

$$\begin{cases} -b\dot\beta\,\mathrm{sen}\beta - a\dot\alpha\,\mathrm{sen}\alpha = -c\dot\gamma\,\mathrm{sen}\gamma + \dot d \\ b\dot\beta\cos\beta + a\dot\alpha\cos\alpha = c\dot\gamma\cos\gamma \\ \dot d = -R\dot\gamma \end{cases} \Rightarrow \text{RICAVO } \dot\beta, \dot\gamma, \dot d$$

DOVE L'ULTIMA EQUAZIONE È IL VINCOLO DI ROTOLAMENTO SENZA STRISCIAMENTO DEL DISCO: $\vec{v}_C = \vec{\omega}_D \wedge (C-H)$

$$\begin{bmatrix} -b\,\mathrm{sen}\beta & +c\,\mathrm{sen}\gamma + R \\ b\cos\beta & -c\cos\gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot\beta \\ \dot\gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a\dot\alpha\,\mathrm{sen}\alpha \\ -a\dot\alpha\cos\alpha \end{Bmatrix}$$

accelerazione

$$\begin{cases} -b\ddot\beta\,\mathrm{sen}\beta - b\dot\beta^2\cos\beta - a\ddot\alpha\,\mathrm{sen}\alpha - a\dot\alpha^2\cos\alpha = -c\ddot\gamma\,\mathrm{sen}\gamma - c\dot\gamma^2\cos\gamma + \ddot d \\ b\ddot\beta\cos\beta - b\dot\beta^2\,\mathrm{sen}\beta + a\ddot\alpha\cos\alpha - a\dot\alpha^2\,\mathrm{sen}\alpha = c\ddot\gamma\cos\gamma - c\dot\gamma^2\,\mathrm{sen}\gamma \\ \ddot d = -R\ddot\gamma \end{cases}$$

$\Rightarrow$ RICAVO $\ddot\beta, \ddot\gamma, \ddot d$

$$\begin{bmatrix} -b\,\mathrm{sen}\beta & +c\,\mathrm{sen}\gamma + R \\ b\cos\beta & -c\cos\gamma \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot\beta\\ \ddot\gamma\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b\dot\beta^2\cos\beta + a\ddot\alpha\,\mathrm{sen}\alpha + a\dot\alpha^2\cos\alpha - c\dot\gamma^2\cos\gamma \\ b\dot\beta^2\,\mathrm{sen}\beta + a\ddot\alpha\cos\alpha + a\dot\alpha^2\,\mathrm{sen}\alpha - c\dot\gamma^2\,\mathrm{sen}\gamma\end{Bmatrix}$$

PER IL CALCOLO DELLA COPPIA MOTRICE UTILIZZO UN BILANCIO DI POTENZE

$$\sum W_k = \frac{dE_c}{dt}$$

$$E_c = \frac{1}{2} J_0 \omega_{OA}^2 + \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} J_c \omega_c^2 = \frac{1}{2} J_0 \dot\alpha^2 + \frac{1}{2} M \dot d^2 + \frac{1}{2} J_c \dot\gamma^2$$

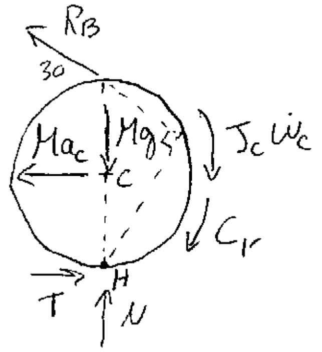
CON $J_0 = \frac{m r^2}{2}$ $\quad J_c = \frac{M R^2}{2}$

$$W_k = \vec{C}_m \times \vec{\omega}_{OA} + \vec{C}_r \times \vec{\omega}_c + \underbrace{\cancel{M\vec{g} \times \vec{v}_c}}_{\perp} = C_m \dot\alpha - C_r \dot\gamma$$

$$C_m \dot\alpha - C_r \dot\gamma = J_0 \dot\alpha \ddot\alpha + M \dot d \ddot d + J_c \dot\gamma \ddot\gamma$$

RICAVO $C_m = \frac{1}{\dot\alpha}\left[C_r \dot\gamma + J_0 \dot\alpha \ddot\alpha + M \dot d \ddot d + J_c \dot\gamma \ddot\gamma\right]$

PER IL CALCOLO DELLE REAZIONI IN B ISOLO IL DISCO E UTILIZZO D'ALEMBERT




$$\vec{a}_c = \ddot d\,\vec{i} \qquad \dot{\vec{\omega}}_c = \ddot\gamma\,\vec{k}$$

$$\sum M_k^{*(\text{disco})} = -C_r + R_B \cdot 2R\cos 30 + M a_c R - J_c \dot\omega_c = 0$$

$$\Rightarrow R_B = \frac{1}{2R\cos 30}\left[C_r - M a_c R + J_c \dot\omega_c\right]$$

PROBLEMA N. 2

RISOLVO CON UN BILANCIO DI POTENZE

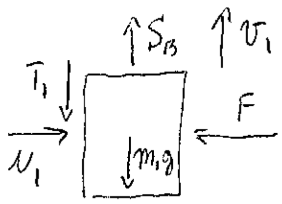
$$W_m + W_u + W_p = 0 \qquad \text{A REGIME!}$$

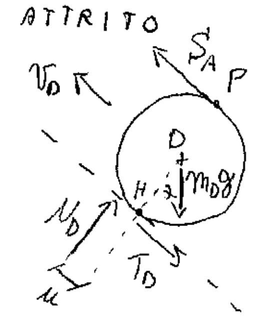
$$W_m = C_m \omega_m - m_1 g v_1 - T_1 v_1$$

$$W_u = - m_D g \, sen\,\alpha \, v_D - N_D f_v v_D$$

$$W_p = -(1-\eta_D)(C_m \omega_m - m_1 g v_1 - T_1 v_1) \qquad \text{HYP. MOTO DIRETTO}$$

DEVO CALCOLARE LE FORZE DI ATTRITO




$$N_1 = F \qquad\qquad N_D = m_D g \cos\alpha$$

$$T_1 = f_D F$$

$$C_m \omega_m - m_1 g v_1 - f_D F v_1 - m_D g \, sen\,\alpha \, v_D - m_D g \cos\alpha \, f_v v_D +$$

$$-(1-\eta_D)(C_m \omega_m - m_1 g v_1 - f_D F v_1) = 0$$

$$\eta_D C_m \omega_m - \eta_D m_1 g v_1 - \eta_D f_D F v_1 - m_D g (sen\,\alpha + f_v \cos\alpha) v_D = 0$$

LEGAMI CINEMATICI

$$v_1 = \omega_1 R_1 = \omega_m R_1 \qquad v_D = \frac{v_P}{2} = \frac{1}{2} \tau \omega_m R_2 \qquad \omega_D = \frac{v_D}{R_D} = \frac{1}{2} \tau \frac{R_2}{R_D} \omega_m$$

$$\eta_D C_m \cancel{\omega_m} - \eta_D m_1 g R_1 \cancel{\omega_m} - \eta_D f_D F R_1 \cancel{\omega_m} - m_D g (sen\,\alpha + f_v \cos\alpha) \frac{1}{2} \tau \cancel{\omega_m} R_2 = 0$$

$$C_{m,re} = m_1 g R_1 + f_D F R_1 + \frac{m_D g \tau R_2}{2 \eta_D} (sen\,\alpha + f_v \cos\alpha)$$

TIRO IN A-A

$$\circlearrowleft M_H^{e\,(DISCO)} = - m_D g \, sen\,\alpha \, R_D + N_D u + S_A \cdot 2 R_D = 0$$

$$\Rightarrow S_A = \frac{m_D g}{2} (sen\,\alpha + f_v \cos\alpha)$$

CALCOLO LA POTENZA TOTALE LATO MOTORE IN TRANSITORIO

$$-m_1 g v_1 - T_1 v_1 - W_1 = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} J_m \omega_m^2 + \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} m_1 v_1^2\right) = J_m \dot{\omega}_m \omega_m + J_1 \dot{\omega}_1 \omega_1 + m_1 a_1 v_1$$

$$-m_1 g R_1 \omega_m - f_D F R_1 \omega_m - W_1 = J_m \dot{\omega}_m \omega_m + J_1 \dot{\omega}_m \omega_m + m_1 R_1^2 \dot{\omega}_m \omega_m$$

$$W_1 = -\omega_m \left(m_1 g R_1 + f_D F R_1\right) - \dot{\omega}_m \omega_m \left(J_m + J_1 + m_1 R_1^2\right)$$

LATO UTILIZZATORE

$$-m_D g \operatorname{sen}\alpha\, v_D - N_D f_V v_D - W_2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} J_D \omega_D^2 + \frac{1}{2} m_D v_D^2\right) = J_2 \dot{\omega}_2 \omega_2 + J_D \dot{\omega}_D \omega_D + m_D a_D v_D$$

$$-m_D g \operatorname{sen}\alpha \frac{1}{2} \tau \omega_m R_2 - m_D g \cos\alpha\, f_V \frac{1}{2} \tau \omega_m R_2 - W_2 = J_2 \tau^2 \dot{\omega}_m \omega_m + J_D \frac{\tau^2}{4} \frac{R_2^2}{R_D^2} + m_D \frac{\tau^2}{4} R_2^2$$

$$W_2 = -m_D g \left(\operatorname{sen}\alpha + f_V \cos\alpha\right) \frac{1}{2} \tau R_2 \omega_m - \dot{\omega}_m \omega_m \left(J_2 \tau^2 + J_D \frac{\tau^2}{4} \frac{R_2^2}{R_D^2} + m_D \frac{\tau^2}{4} R_2^2\right)$$

N.B. IN QUESTO SISTEMA LE FORZE DI ATTRITO SONO UGUALI IN TRANSITORIO E A REGIME

IN QUESTA CONDIZIONE (PUNTO 3) $\omega_m$ È $> 0$ E $\dot{\omega}_m < 0$

IPOTIZZO MOTO DIRETTO (IPOTESI DA VERIFICARE ALLA FINE)

SCRIVO UN BILANCIO DI POTENZE SULLA TRASMISSIONE

$$\cancel{W_1} + W_2 - (1 - \eta_D) W_1 = 0 \qquad \eta_D W_1 + W_2 = 0$$

$$-\eta_D \cancel{\omega_m}\left(m_1 g R_1 + f_D F R_1\right) - m_D g \left(\operatorname{sen}\alpha + f_V \cos\alpha\right) \frac{1}{2} \tau R_2 \cancel{\omega_m} +$$

$$-\cancel{\omega_m} \dot{\omega}_m \left(\underbrace{\eta_D J_m + \eta_D J_1 + \eta_D m_1 R_1^2 + J_2 \tau^2 + J_D \frac{\tau^2}{4} \frac{R_2^2}{R_D^2} + m_D \frac{\tau^2}{4} R_2^2}_{J_E^*}\right)$$

$$\dot{\omega}_m = -\frac{1}{J_E^*}\left[\eta_D m_1 g R_1 + \eta_D f_D F R_1 + m_D g \left(\operatorname{sen}\alpha + f_V \cos\alpha\right) \frac{1}{2} \tau R_2\right]$$

ESERCIZIO N. 3

sistema ad 1 g.d.l, coordinata libera $\vartheta$

utilizzo le equazioni di Lagrange

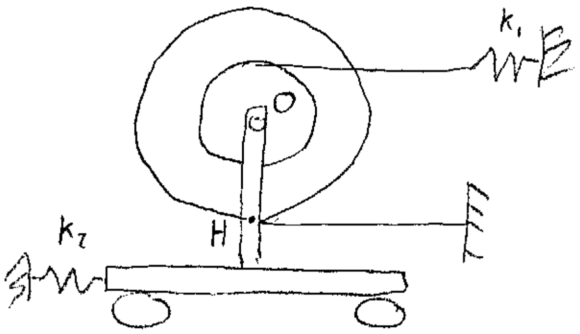
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot\vartheta}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial \vartheta} + \frac{\partial D}{\partial \dot\vartheta} + \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = Q_\vartheta$$

$$E_c = \frac{1}{2} M_2 V_2^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} M_3 V_3^2$$

$$V = \frac{1}{2} k_1 \Delta l_1^2 + \frac{1}{2} k_2 \Delta l_2^2$$

$$D = 0 \qquad \delta L^* = \vec{C} \times \vec{\delta\vartheta_2^*} = C\,\delta\vartheta_2^*$$

Legami cinematici




H è il C.I.R. del corpo 2 (dischi 2+3)

$$v_2 = v_3 = R_3 \dot\vartheta \qquad \omega_2 = \dot\vartheta$$

$$\Delta l_1 = (R_3 + R_2)\vartheta \qquad \Delta l_2 = -R_3\vartheta \qquad \delta\vartheta_2^* = \delta\vartheta$$

$$E_c = \frac{1}{2} M_2 R_3^2 \dot\vartheta^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot\vartheta^2 + \frac{1}{2} M_3 R_3^2 \dot\vartheta^2 = \frac{1}{2}\left(M_2 R_3^2 + J_2 + M_3 R_3^2\right)\dot\vartheta^2$$

$$V = \frac{1}{2} k_1 (R_3+R_2)^2 \vartheta^2 + \frac{1}{2} k_2 R_3^2 \vartheta^2 = \frac{1}{2}\left[k_1 (R_3+R_2)^2 + k_2 R_3^2\right]\vartheta^2$$

$$\delta L^* = C\,\delta\vartheta$$

applico Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot\vartheta}\right) = \left(M_2 R_3^2 + J_2 + M_3 R_3^2\right)\ddot\vartheta \qquad \frac{\partial E_c}{\partial \vartheta} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \vartheta} = \left[k_1 (R_3+R_2)^2 + k_2 R_3^2\right]\vartheta \qquad Q_\vartheta = \frac{\delta L^*}{\delta\vartheta} = C$$

L'equazione del moto del sistema diventa:

$$\underbrace{\left(M_2 R_3^2 + J_2 + M_3 R_3^2\right)}_{m^*} \ddot{\vartheta} + \underbrace{\left[k_1 (R_3 + R_2)^2 + k_2 R_3^2\right]}_{k^*} \vartheta = C$$

$$m^* \ddot{\vartheta} + k^* \vartheta = C$$

il moto libero ha equazione: $m^* \ddot{\vartheta} + k^* \vartheta = 0$

la pulsazione è: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} = \sqrt{\frac{k_1 (R_3+R_2)^2 + k_2 R_3^2}{M_2 R_3^2 + J_2 + M_3 R_3^2}}$

La soluzione del moto forzato, a regime è: $\vartheta = \vartheta_0 \cos(\Omega t)$, $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$

sostituendo:

$$(-m^* \Omega^2 + k^*) \vartheta_0 \cancel{\cos \Omega t} = C_0 \cancel{\cos \Omega t}$$

$$\vartheta_0 = \frac{C_0}{-m^* \Omega^2 + k^*}$$