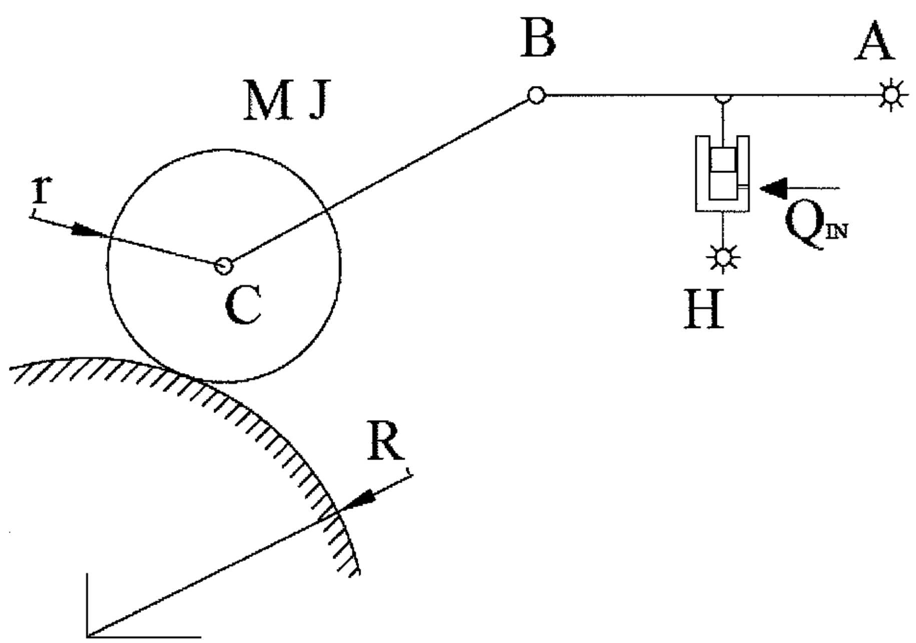
MECCANICA APPLICATA ALLE MACCHINE
Allievi meccanici AA.2008-2009 prova del 8-9-2009

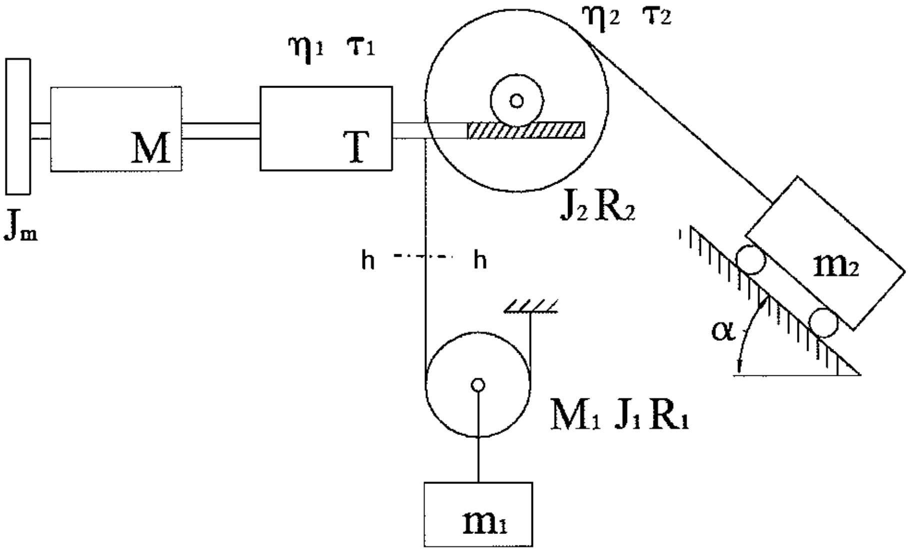


Problema N.1

Del sistema meccanico riportato in figura sono note tutte le quantità geometriche riportate, ed è posizionato nel piano verticale. Il disco omogeneo di centro C rotola senza strisciare sulla guida curvilinea, tale disco è il solo corpo dotato di massa M e momento di inerzia baricentrico J.

Si consideri il sistema nell'istante in cui l'asta AB è in posizione orizzontale, nota la portata in ingresso nella camera del cilindro $Q_{IN}=cost$, si richiede:

1. determinare velocità e accelerazione del centro del disco C;
2. determinare tramite un bilancio di potenze la pressione nel cilindro necessaria a garantire il moto del sistema;
3. calcolare le reazioni vincolari in A.

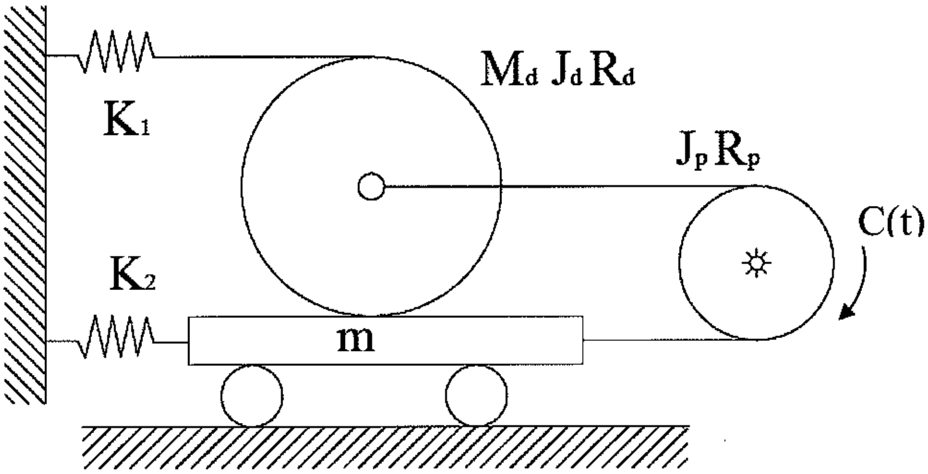


Problema N.2

L'impianto di sollevamento riportato in figura è posto nel piano verticale. Le dimensioni geometriche note sono quelle indicate in figura, inoltre sono note masse e momenti d'inerzia di tutti i corpi. La curva caratteristica del motore è di tipo lineare, con equazione $C_m = C_o(1 - \omega_m/\omega_s)$.

Si richiede di:

4. determinare l'accelerazione allo spunto della massa m_2 in salita, sotto l'ipotesi di moto diretto;
5. determinare la velocità della massa m_1 in salita a regime;
6. calcolare il tiro della fune nella sezione h-h, nella condizione del punto 1;
7. indicare quale relazione deve sussistere tra la massa m_1 e la massa m_2 affinché il moto sia retrogrado a regime, con m_1 in salita.

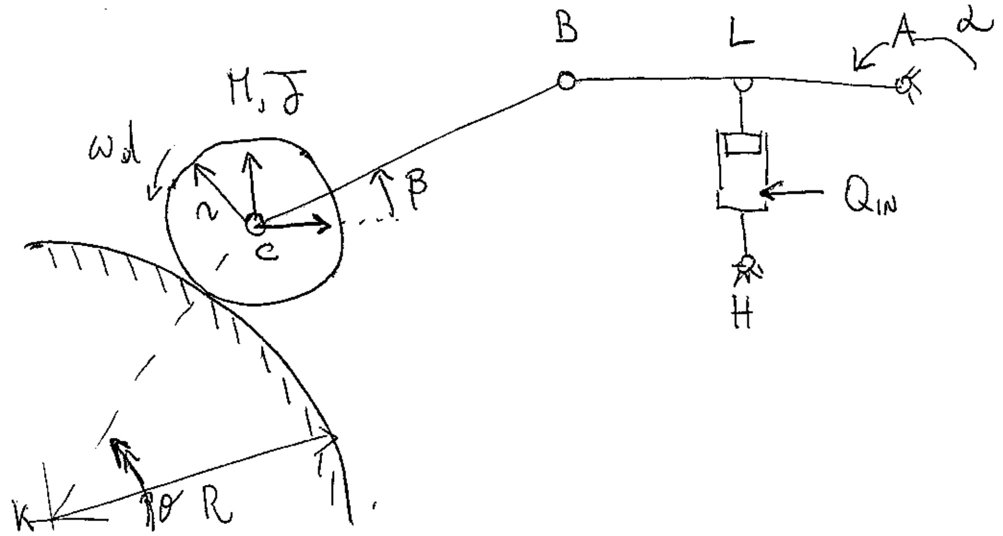


Problema N.3

Il sistema in figura si trova nella sua posizione di equilibrio, sono note le masse e la geometria del sistema. Assumendo la rotazione della puleggia *p* come coordinata libera, si richiede di determinare:

8. l'equazione di moto del sistema
9. la frequenza del moto libero;
10. la risposta a regime essendo $C(t) = C_0 e^{i\Omega t}$.

PROVA 08/09/2009 SOLUZIONE ↺+ CONVENZIONE ROTAZIONI

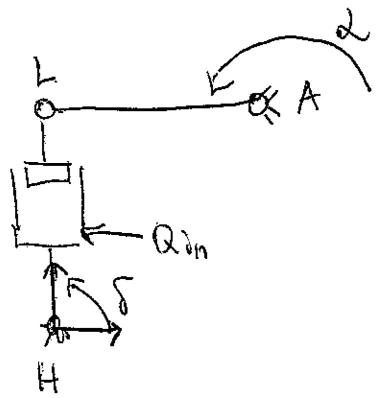


FISSO UNA TERNA MOBILE CON ORIGINE IN C TRASLANTE SU UNA CIRCONFERENZA DI RAGGIO $(R+r)$

$$\vec{v}_B^{\,ASS} = \vec{v}_B^{\,TR} + \vec{v}_B^{\,REL}$$

$\dot{\alpha} AB$	$\dot{\theta}(R+r)$	$\dot{\beta} BC$
$\perp AB$	$\perp CK$	$\perp BC$

RICAVO IL LEGAME TRA $\dot{\alpha}$ E Q_{IN} DALL'ANALISI DEL GLIFO (HAL)



POSIZIONO UNA TERNA MOBILE CON ORIGINE IN H E ASSI ROTANTI CON HL

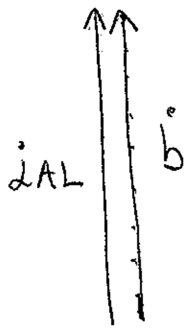
$$\vec{v}_L^{\,ASS} = \vec{v}_L^{\,TR} + \vec{v}_L^{\,REL}$$

$\dot{\alpha} AL$	$\dot{\delta} HL$	$\dot{b}$
$\perp AL$	$\perp HL$	$// HL$

HL = b VARIABILE

SIA S LA SEZIONE DEL CILINDRO, ESSENDO FLUIDO INCOMPRIMIBILE (OLIO)

$$\dot{b} = \frac{Q_{IN}}{S}$$



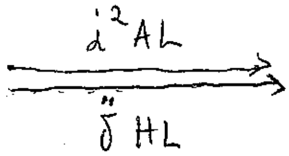
$$\dot{\alpha} = -\frac{\dot{b}}{AL}$$

$\Rightarrow \dot{\delta} = 0$ VELOCITÀ ANGOLARE DI HL NELLA CONFIGURAZIONE ASSEGNATA

$$\vec{a}^{ASS}_{L,n} + \vec{a}^{ASS}_{L,t} = \vec{a}^{TR}_{L,n} + \vec{a}^{TR}_{L,t} + \vec{a}^{REL}_{L} + \vec{a}^{CORIOLIS}_{L}$$

$\vec{a}^{ASS}_{L,n}$	$\vec{a}^{ASS}_{L,t}$	$\vec{a}^{TR}_{L,n}$	$\vec{a}^{TR}_{L,t}$	$\vec{a}^{REL}_{L}$	$\vec{a}^{CORIOLIS}_{L}$
$\dot{\alpha}^2 AL$	$\ddot{\alpha} AL$	$\dot{\delta}^2 HL$	$\ddot{\delta} HL$	$\ddot{b}$	$2\dot{\delta}\dot{b}$
$// AL$	$\perp AL$	$// HL$	$\perp HL$	$// HL$	$\perp HL$
		$= 0$		$= 0$	$= 0$

$\ddot{b} = 0$ ESSENDO $Q_{IN} = cost$



$\Rightarrow \ddot{\alpha} = 0$ PER LA CONFIGURAZIONE ASSEGNATA

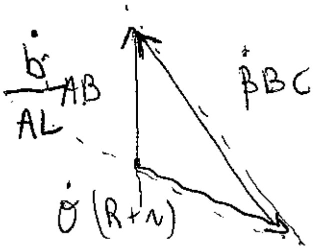
$$\ddot{\delta} = -\frac{\dot{\alpha}^2 AL}{HL}$$, con $HL = b$ VARIABILE

TORNANDO ALL'ANALISI DEL SISTEMA NEL SUO COMPLESSO

$$\vec{v}^{ASS}_{B} = \vec{V}^{TR}_{B} + V^{rel}_{B}$$

NOTO

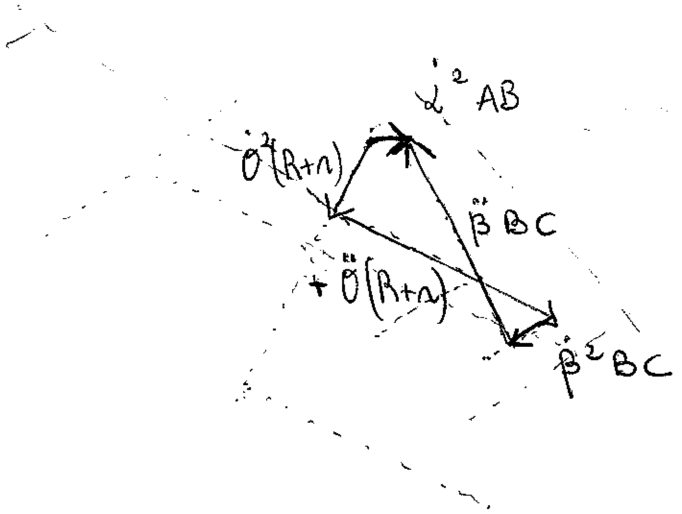
$\vec{v}^{ASS}_{B}$	$\vec{V}^{TR}_{B}$	V^{rel}_{B}
$\dot{\alpha} AB$	$\dot{\theta}(R+r)$	$\dot{\beta} BC$
$\perp AB$	$\perp CK$	$\perp BC$



$$\begin{cases} \dot\theta(R+r)\sin\theta - \dot\beta BC\sin\beta = 0 \\ -\dot\theta(R+r)\cos\theta + \dot\beta BC\cos\beta = -\dot\alpha AB = +\frac{\dot b}{AL}AB \end{cases} \Rightarrow \dot\theta, \dot\beta$$

$$\vec a^{ASS}_{B,n} + \vec a^{ASS}_{B,t} = \vec a^{TR}_{B,n} + \vec a^{TR}_{B,t} + \vec a^{REL}_{B,n} + \vec a^{REL}_{B,t}$$

$\dot\alpha^2 AB$	$\ddot\alpha AB$	$\dot\theta^2(R+r)$	$\ddot\theta(R+r)?$	$\dot\beta^2 BC$	$\ddot\beta BC?$
$/\!/ AB$	$\perp AB$	$/\!/ CK$	$\perp CK$	$/\!/ BC$	$\perp BC$
	$=0$				



NON È IN PROPORZIONE!
I SEGNI CORRETTI DERIVANO DAI CALCOLI. (PER $\ddot\theta$ e $\ddot\beta$)

$$|\vec v_c| = \omega_d \cdot r = (R+r)\dot\theta \Rightarrow \omega_d = \frac{R+r}{r}\dot\theta$$

$$|\vec a_{c,t}| = \dot\omega_d \cdot r = (R+r)\ddot\theta \Rightarrow \dot\omega_d = \frac{R+r}{r}\ddot\theta$$

1) $\vec v_c = (R+r)\dot\theta e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$

$\vec a_c = \vec a_{c,t} + \vec a_{c,n} = (R+r)\ddot\theta e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)} - \dot\theta^2(R+r)e^{i\theta}$

2) $W_m = \frac{dE_c}{dt}$ SISTEMA NEL PIANO VERTICALE

$$E_c = \frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}J\omega_d^2$$

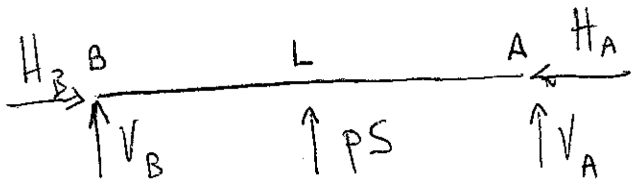
$$-Mg\dot y_c + p\cdot S\dot b = Mv_c\, a_{c,t} + J_0\omega_d\dot\omega_d$$

$$p = \frac{M v_c a_{c,t} + J_O \omega_d \dot{\omega}_d + M g \dot{y}_c}{S \dot{b}}$$

con $\dot{y}_c = (\dot{R}+r)\dot{\theta}\cos\theta$

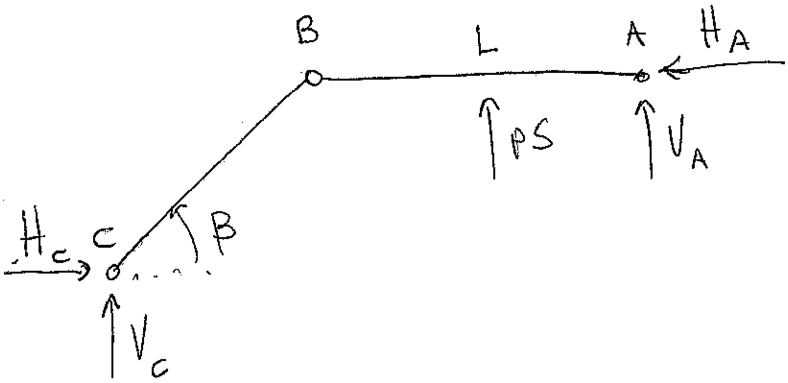
3) REAZIONI VINCOLARI IN A

ISOLO ASTA BA



$$\sum M_B^a = pS\,BL + V_A\,AB = 0 \qquad V_A = -\frac{pS\,BL}{AB}$$

ISOLO LE ASTE AB + BC (DI MASSA E MOMENTO DI INERZIA TRASCURABILI)



$$\sum M_C^a = 0 \qquad H_A \cdot BC\sin\beta + pS\,(BL + BC\cos\beta) + V_A\,(AB + BC\cos\beta) = 0$$

$$H_A = \frac{-pS\,(BL + BC\cos\beta) - V_A\,(AB + BC\cos\beta)}{BC\sin\beta}$$

PROBLEMA 2

4) $W_m = C_m \omega_m$

$$\tau = \tau_1 \cdot \tau_2 \qquad \frac{\omega_2}{\omega_m} = \tau \qquad V_2 = \tau \omega_m R_2$$

$$\eta_0 = \eta_{1,D} \cdot \eta_{2,D} \qquad v_1 = v_2/2 \qquad \omega_1 = \frac{V_2}{2R_1}$$

$$W_p = -(1-\eta_0) W_E = -(1-\eta_0)\left(C_m\omega_m - J_m \omega_m \dot{\omega}_m\right)$$

$$W_R = -m_2 g \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) V_2 + (m_1 + M_1) g \frac{v_2}{2}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} M_1 v_1^2 + \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} J_m \omega_m^2$$

$$\frac{dE_c}{dt} = m_2 V_2 a_2 + (M_1 + m_1) v_1 a_1 + J_1 \omega_1 \dot{\omega}_1 + J_2 \omega_2 \dot{\omega}_2 + J_m \omega_m \dot{\omega}_m =$$

$$= m_2 v_2 a_2 + (M_1 + m_1) \frac{v_2 a_2}{2 \cdot 2} + J_1 \frac{v_2 a_2}{4R_1^2} + J_2 \frac{V_2 a_2}{R_2^2} + J_m \frac{V_2 a_2}{\tau^2 R_2^2}$$

$$C_{\cancel{m}} \cancel{\omega_m} - (\cancel{1} - \eta)\left(C_m \frac{V_2}{\tau R_2} - J_m \frac{V_2 a_2}{\tau^2 R_2^2}\right) - m_2 g \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) V_2 + (m_1 + M_1) g \frac{v_2}{2} =$$

$$= m_2 v_2 a_2 + (M_1 + m_1) \frac{V_2 a_2}{4} + J_1 \frac{V_2 a_2}{4R_1^2} + J_2 \frac{V_2 a_2}{R_2^2} + \cancel{J_m \frac{V_2 a_2}{\tau^2 R_2^2}}$$

$$\eta C_m \frac{\cancel{V_2}}{\tau R_2} - m_2 g \operatorname{sen}\alpha \cancel{V_2} + (M_1 + m_1) g \frac{\cancel{v_2}}{2} = m_2 \cancel{v_2} a_2 + (M_1 + m_1) \frac{\cancel{V_2} a_2}{4} +$$

$$+ \frac{J_1}{4R_1^2} a_2 \cancel{V_2} + J_2 \frac{\cancel{V_2} a_2}{R_2^2} + \eta J_m \frac{\cancel{V_2} a_2}{\tau^2 R_2^2}$$

$$a_{2,0} = \frac{\eta \frac{C_{m,0}}{\tau R_2} - m_2 g \operatorname{sen}\alpha + (M_1 + m_1) g/2}{m_2 + \frac{(M_1 + m_1)}{4} + \frac{J_1}{4R_1^2} + \frac{J_2}{R_2^2} + \eta \frac{J_m}{\tau^2 R_2^2}}$$

5) IPOTIZZO IL MOTO RETROGRADO (DIPENDE DAI VALORI DI m_1, M_1, m_2, VEDI PUNTO 7)

$$W_m = C_m \omega_m$$

$$W_p = -(1-\eta_R) W_e = -(1-\eta_R)\left(m_2 V_2 g \,\mathrm{sen}\alpha - (m_1+M_1) g \frac{V_2}{2}\right)$$

A REGIME $\frac{dE_c}{dt} = 0$

$$W_R = -m_1 g \frac{v_2}{2} - M_1 g \frac{v_2}{2} + m_2 v_2 g \,\mathrm{sen}\alpha$$

$$C_m \frac{\cancel{v_2}}{\tau R_2} \cancel{+ m_2 v_2 g \,\mathrm{sen}\alpha - (m_1+M_1)\frac{v_2}{2} g} - (\cancel{1}-\eta_R)\left(m_2 \cancel{v_2} g \,\mathrm{sen}\alpha - (m_1+M_1) g \frac{\cancel{v_2}}{2}\right) = 0$$

$$C_{m,RE} = \tau R_2 \eta_R \left[(m_1+M_1)\frac{g}{2} - m_2 g \,\mathrm{sen}\alpha\right]$$

$$C_m = C_0\left(1-\frac{\omega_m}{\omega_s}\right) = C_0 - C_0\frac{\omega_m}{\omega_s} \Rightarrow \omega_{m,RE} = \frac{(C_0 - C_{m,RE})\omega_s}{C_0}$$

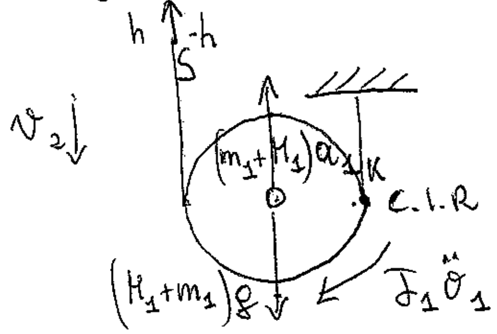
$$v_{1,RE} = \frac{v_{2,RE}}{2} = \frac{\omega_{m,RE}\cdot \tau \cdot R_2}{2}$$

7) CON m_1 IN SALITA, A REGIME, IL MOTO È RETROGRADO SE

$$m_2 V_2 g \,\mathrm{sen}\alpha - (m_1+M_1) g \frac{v_2}{2} > 0$$

$$\frac{m_1+M_1}{2} < m_2 \,\mathrm{sen}\alpha$$

6) TIRO NELLA FUNE IN H-H CONDIZIONI PUNTO 1



$$\sum \vec{M}_K^x = 0$$

$$-S\cdot 2R_1 + (m_1+M_1) g R_1 - (m_1+M_1) a_1 R_1 + - J_1 \ddot{\theta}_1 = 0$$

$$S = \frac{(m_1+M_1)gR_1 - (m_1+M_1)\frac{a_{2,0}R_1}{2} - \bar{J}_1\frac{a_{2,0}}{2R_1}}{2R_1}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} M_D v_D^2 + \frac{1}{2} J_D \omega_D^2 + \frac{1}{2} J_p \omega_p^2$$

$$V = \frac{1}{2} K_1 \Delta\ell_1^2 + \frac{1}{2} K_2 \Delta\ell_2^2$$

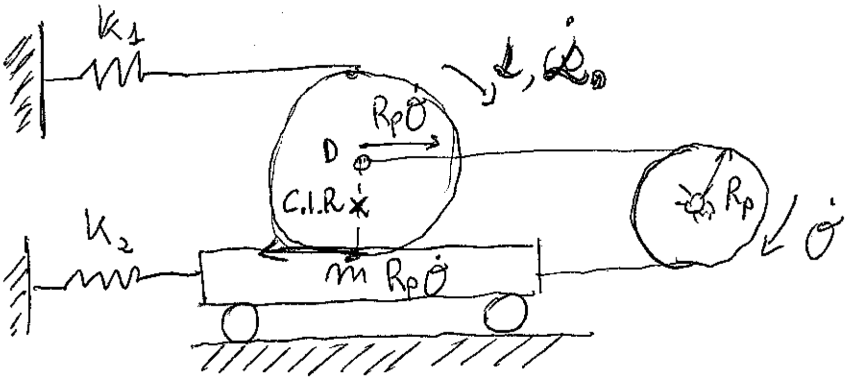
$$\delta^* L = C \cdot \delta^* \theta$$

TERNA MOBILE TRASLANTE CON IL CARRELLO

$$\vec{v}_A^{\,\text{CENTRO DISCO D}} = \vec{v}_{TR} + \vec{v}_{REL}$$

$$R_p \dot\theta \vec{i} = -R_p \dot\theta \vec{i} + R_d \omega_{D,REL} \vec{i}$$

$$\omega_{D,REL} = \frac{2 R_p \dot\theta}{R_d} \qquad \text{CON } \omega_{D,REL} = \omega_{D,ASSOLUTO} = \dot\alpha$$



FUNE INESTENSIBILE

$$E_c = \frac{1}{2} m R_p^2 \dot\theta^2 + \frac{1}{2} M_D R_p^2 \dot\theta^2 + \frac{1}{2} J_D \frac{4R_p^2}{R_d^2} \dot\theta^2 + \frac{1}{2} J_p \dot\theta^2$$

$$\Delta\ell_1 = \frac{3}{2} R_d \alpha = \frac{3 \cancel{R_d} \cancel{2} R_p}{\cancel{2}\,\cancel{R_d}} \theta = 3 R_p \theta$$

$$\Delta\ell_2 = -R_p \theta \quad \Rightarrow \quad V = \frac{1}{2} K_1 (3R_p\theta)^2 + \frac{1}{2} K_2 (-R_p\theta)^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot\theta}\right) = \left(m R_p^2 + M_d R_p^2 + J_d \frac{4R_p^2}{R_d^2} + J_p\right)\ddot\theta$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = (3R_p)^2 K_1 \theta + K_2 R_p^2 \theta$$

$$\left(mR_p^2 + M_d R_p^2 + 4J_0\frac{R_p^2}{R_d^2} + J_p\right)\ddot{\theta} + \left(9R_p^2 K_1 + R_p^2 K_2\right)\theta = C(t)$$

9)
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K^*}{m^*}} = \sqrt{\frac{9R_p^2 K_1 + R_p^2 K_2}{mR_p^2 + M_d R_p^2 + 4J_0\frac{R_p^2}{R_d^2} + J_p}} \quad \left[\frac{rad}{s}\right]$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0 \Rightarrow f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad [Hz]$$

10)
$$m^*\ddot{\theta} + k^*\theta = C_0 e^{i\Omega t}$$

$$\theta_p(t) = \theta_0 e^{i\Omega t} \qquad \theta_0 \in \mathbb{R}$$

$$\left(-\Omega^2 m^* + k^*\right)\theta_0 \cancel{e^{i\Omega t}} = C_0 \cancel{e^{i\Omega t}}$$

$$\theta_0 = \frac{C_0}{-\Omega^2 m^* + k^*} = \frac{C_0/k^*}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}}$$

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\Omega t)$$