Serie di Fourier – Richiami di teoria

Funzioni periodiche

• Ci poniamo il problema dello sviluppo in serie di Fourier per funzioni

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad 2\pi\text{-periodiche.}$$

Esempio 1. Consideriamo il prolungamento 2π-periodico $\tilde{f}_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di

$$\begin{cases} f_1 : [0, 2\pi) \to \mathbb{R} \\ f_1(x) := x \end{cases} \qquad \longrightarrow \qquad \tilde{f}_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Esempio 2. Data

$$\begin{cases} f_2 : [0, 1) \to \mathbb{R} \\ f_2(x) := x \end{cases}$$

la prolunghiamo a una funzione $\tilde{f}_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 1-periodica.

Osservazioni:

- Le funzioni prolungate $\tilde{f}_1$ e $\tilde{f}_2$ hanno infiniti punti di discontinuità di tipo salto su $\mathbb{R}$. In effetti le serie di Fourier si configurano come strumenti di <u>approssimazione</u> di funzioni non necessariamente continue. Si confronti questo con le serie di Taylor per funzioni C^∞, analitiche..

- La teoria delle serie di Fourier si dà per funzioni

  $$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad T\text{-periodiche, con } T > 0 \text{ generico,}$$

  riconducibili a funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodiche ponendo

  $$f(x) = g\left(\frac{T}{2\pi}x\right) \quad \text{infatti}$$

  $$\begin{aligned} f(x+2\pi) &= g\left(\frac{T}{2\pi}(x+2\pi)\right) \\ &= g\left(\frac{T}{2\pi}x + T\right) = g\left(\frac{T}{2\pi}x\right) = f(x). \end{aligned}$$

Coefficienti di Fourier

Data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodica, quale è la serie trigonometrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx)$$

candidata ad approssimare f?

$$\textbf{Ipotesi di base:} \quad \begin{cases} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad 2\pi\text{-periodica} \\ f \text{ integrabile su } [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Conseguenze:

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{a+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall\, a \in \mathbb{R}, \\ f^2 \text{ integrabile su } [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Problema: Sia

$$\mathcal{S}_n := \{\text{polinomi trigonometrici di ordine } n\}$$

e si consideri il problema di *minimizzare lo scarto quadratico medio*

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - P_n(x)|^2 \, \mathrm{d}x$$

fra f e il generico polinomio trigonometrico di ordine n

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx).$$

Si dimostra che per ogni $n \in \mathbb{N}$ il polinomio S_n che risolve il problema di minimo, cioè

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - S_n(x)|^2 \, \mathrm{d}x \le \int_0^{2\pi} |f(x) - P_n(x)|^2 \, \mathrm{d}x \quad \forall\, P_n \in \mathcal{S}_n$$

è il *polinomio trigonometrico di Fourier* associato a f

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

con coefficienti (i *coefficienti di Fourier* associati a f)

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) \, \mathrm{d}x, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) \, \mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, \ldots$$

che danno luogo alla *serie di Fourier* associata a f

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

Osservazioni

- Grazie all'ipotesi di integrabilità su f, gli $(a_k)_k$ e $(b_k)_k$ sono ben definiti.

- I coefficienti si possono ottenere integrando su un periodo (=intervallo di lunghezza 2π) qualsiasi di f, ad esempio su $[-\pi, \pi]$.

- il calcolo degli $(a_k)_k$ e $(b_k)_k$ si semplifica in presenza di simmetrie:

$$f \text{ pari} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\ \quad\;\; = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x, \;\; \forall\, n \geq 0 \\ \\ b_n = 0 \;\forall\, n \geq 1, \\ \\ f \text{ si sviluppa in serie di soli coseni} \end{cases}$$

$$f \text{ dispari} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_n = 0 \;\forall\, n \geq 0 \\ \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\ \quad\;\; = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x, \;\; \forall\, n \geq 1 \\ \\ f \text{ si sviluppa in serie di soli seni} \end{cases}$$

- Se f è periodica con periodo $T > 0$, le formule diventano

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\,\mathrm{d}x, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\,\mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Convergenza della serie di Fourier

Sia S_n la ridotta n-esima:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)$$

come converge la successione di funzioni S_n a f?
Tutti i risultati che enunceremo valgono con ovvie modifiche per funzioni T-periodiche.

Teorema 1: convergenza in media quadratica Sotto l'ipotesi di base

$$\begin{cases} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad 2\pi\text{-periodica} \\ f \text{ integrabile su } [0, 2\pi] \end{cases}$$

la successione (S_n) converge a f in in media quadratica, cioè

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{2\pi} |S_n(x) - f(x)|^2\,\mathrm{d}x = 0,$$

da cui

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{2\pi}|S_n(x)|^2\,\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{2\pi}S_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Inoltre vale l'identità di Parseval

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2).$$

Osservazioni:

- Corollario (teorema di Riemann-Lebesgue):

  $$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x=0$$
  $$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x=0$$

  (poiché la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2)$ converge, la successione $a_n^2+b_n^2$ è infinitesima..)

- Se f è periodica con periodo $T>0$, l'identità di Parseval è

  $$\frac{2}{T}\int_0^{T}f^2(x)\,\mathrm{d}x=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

  e si ha

  $$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{T}|S_n(x)-f(x)|^2\,\mathrm{d}x=0.$$

- La convergenza in media quadratica NON implica la convergenza puntuale, cioè non implica lo sviluppo

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Si migliora il tipo di convergenza (media quadratica $\rightarrow$ puntuale $\rightarrow$ uniforme $\rightarrow$ convergenza delle derivate) aumentando le ipotesi di regolarità su f.

Teorema 2: **convergenza puntuale** Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π-periodica
- è continua a tratti* in $[0, 2\pi]$ (quindi integrabile su $[0, 2\pi]$)
- in $x_0 \in \mathbb{R}$ f è derivabile, oppure

f è continua in x_0 e ed esistono finite
la derivata destra $f'_+(x_0)$ e la derivata sinistra $f'_-(x_0)$, oppure

f ha un punto di salto in x_0 e ed esistono finite

la pseudoderivata destra $\displaystyle\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0^+)}{x - x_0}$

e la pseudoderivata sinistra $\displaystyle\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0^-)}{x - x_0}$

allora S_n converge in x_0 a $\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$.

(oppure, Criterio di Dirichlet: f limitata e monotona a tratti).

*cioè f è continua in $[0, 2\pi]$ tranne che in al più un numero finito di punti $\{x_1, \ldots, x_m\}$ tali che per ogni $i = 1, \ldots, m$ f ha in x_i una discontinuità di tipo salto

Teorema 3: convergenza uniforme Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodica. Supponiamo che

1. $f \in C^0((0, 2\pi))$

2. $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ sia C^1 a tratti† su $[0, 2\pi]$.

Allora per ogni $[a, b] \subset (0, 2\pi)$

$$S_n \to f \text{ uniformemente su } [a, b].$$

Se oltre alle condizioni 1 & 2 si ha anche che f è continua in 0 e in 2π (quindi $f \in C^0(\mathbb{R})$) allora

$$S_n \to f \text{ uniformemente su } [0, 2\pi]$$

(e quindi uniformente su $\mathbb{R}$).

Osservazione:

• Si noti che $f \in C^0(\mathbb{R})$ è condizione necessaria per la convergenza uniforme su $\mathbb{R}$ perché le S_n sono funzioni continue e la convergenza uniforme preserva la continuità.

• L'ipotesi *f è continua in 0 e in 2π* è scritta in modo ridondante: in effetti la continuità in 0 (che significa $f(0^+) = f(0) = f(0^-)$) da sola implica, per periodicità, anche $f(2\pi^+) = f(2\pi) = f(2\pi^-)$.

†cioè f è derivabile in $[0, 2\pi]$ tranne che in al più un numero finito di punti $\{x_1, \ldots, x_m\}$ tali che per ogni $i = 1, \ldots, m$ esistono finite le derivate destre e sinistre $f'_+(x_i)$ e $f'_-(x_i)$ e inoltre f è di classe C^1 sull'intervallo (x_{i-1}, x_i)

• Se la funzione di partenza è solo data sull'intervallo $[0, 2\pi)$, la condizione $\tilde{f}$ *è continua in* 0 sulla sua prolungata 2π-periodica $\tilde{f}$ si traduce, a livello di f, nella richiesta che $f(0) = f(0^+) = f(2\pi^-)$.

Teorema 4: **convergenza delle derivate** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodica. Supponiamo che

- $f \in \mathrm{C}^0(\mathbb{R})$ e $f \in \mathrm{C}^1((0, 2\pi))$ e
- $f' \in \mathrm{C}^0(\mathbb{R})$ e $f' : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ sia C^1 a tratti su $[0, 2\pi]$

Allora la serie di Fourier si può derivare termine a termine, cioè

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))' \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Osservazione: la condizione $f' \in \mathrm{C}^0(\mathbb{R})$ significa che deve valere $f'(0) = f'(0^+) = f'(2\pi^-)$.