Metodi Analitici e Numerici per l'Ingegneria **CdL Ingegneria Meccanica** **Appello** **27 giugno 2018**	**Prof. M.C. Cerutti** **Prof. L. Dedè**	**Firma leggibile dello studente**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

ISTRUZIONI

- Riportare le risposte nello spazio indicato.
- Alcuni esercizi richiedono di utilizzare MATLAB; per tali esercizi riportare sul foglio esclusivamente gli output richiesti.
- Utilizzare esclusivamente una penna nera o blu.
- Tempo a disposizione: 2h 45m.

SPAZIO RISERVATO AL DOCENTE

Pre Test	
Esercizio 1	
Esercizio 2	
Esercizio 3	
Totale	

Pre Test

15 punti

1. *(2 punti)* Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $A = \text{tridiag}(-3{,}6,-3) \in \mathbb{R}^{100\times100}$ e $\mathbf{b} = (1{,}1,\ldots,1)^T \in \mathbb{R}^{100}$, e il metodo del gradiente per l'approssimazione della soluzione $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{100}$. Si calcolino e si riportino: il valore del parametro dinamico ottimale α_0 associato all'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$ usato per determinare l'iterata $\mathbf{x}^{(1)}$ e la terza componente $x_3^{(1)}$ dell'iterata $\mathbf{x}^{(1)} \in \mathbb{R}^{100}$.

$\alpha_0 = 1{,}358\,974 \qquad x_3^{(1)} = 2{,}358\,974$

2. *(2 punti)* Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e il metodo delle potenze (dirette) per approssimare l'autovalore di modulo massimo. Assegnato il vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (1\ 0)^T$, si riportino i valori approssimati $\lambda^{(0)}$ e $\lambda^{(1)}$ dell'autovalore ottenuti rispettivamente all'iterata iniziale e dopo l'applicazione di un'iterazione del metodo.

$\lambda^{(0)} = 4 \qquad \lambda^{(1)} = \frac{17}{5} = 3{,}4$

3. *(1 punto)* Si consideri la funzione $f(x) = 5\tan(2\,x)$ e il metodo di Newton per l'approssimazione dello zero $\alpha = 0$. Si riporti il valore della prima iterata $x^{(1)}$ del metodo assumendo l'iterata iniziale $x^{(0)} = \frac{\pi}{8}$.

$x^{(1)} = \frac{\pi-2}{8} = 0{,}142\,699$

4. *(1 punto)* Assegnati i nodi di Chebychev–Gauss–Lobatto $x_i = -\cos\left(\frac{\pi}{7}\,i\right)$ per $i = 0,\ldots,7$ e i corrispondenti valori $y_i = e^{x_i}\sqrt{x_i+6}$, qual è il grado n del polinomio $\Pi_n(x)$ interpolante tali dati?

$n = 7$

5. *(1 punto)* Si consideri l'approssimazione dell'integrale $\int_1^5 \sqrt{x+3}\,dx$ mediante il metodo dei trapezi. Si riporti il valore dell'integrale approssimato I_t.

$I_t = 9{,}656\,854$

6. *(1 punto)* Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = -3\,y(t) + 8\,t & t \in (0{,}8), \\ y(0) = 4. \end{cases}$$

Utilizzando il metodo di Eulero in avanti (Eulero esplicito) con passo $h = 1/4$ e $u_0 = y_0 = 4$, si riporti il valore calcolato di u_1, ovvero l'approssimazione di $y(t_1)$.

$u_1 = 1$

7. *(2 punti)* Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(t) = -2\,y'(t) - y(t) + 6\,t & t \in (0{,}10), \\ y'(0) \;= 2, & \\ y(0) \;= 2. & \end{cases}$$

Utilizzando il metodo di Leap Frog con passo $h = 1/4$, si riporti il valore calcolato di u_1, ovvero l'approssimazione di $y(t_1)$, dove $t_1 = h$.

$$\boxed{u_1 = \tfrac{37}{16} = 2{,}3125}$$

8. *(1 punto)* Si consideri il seguente problema di Cauchy–Dirichlet:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) & x \in (0,\pi),\ t \in (0,+\infty), \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t \in (0,+\infty), \\ u(x,0) = 4\,\sin(x) - \frac{1}{4}\,\sin(2\,x) & x \in (0,\pi). \end{cases}$$

Si riporti l'espressione della soluzione $u(x,t)$.

$$\boxed{u(x,t) = 4\,e^{-t}\,\sin(x) - \tfrac{1}{4}\,e^{-4\,t}\,\sin(2\,x)}$$

9. *(1 punto)* Si consideri il seguente problema di Cauchy–Dirichlet:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 5 & x \in (0,\pi),\ t \in (0,+\infty), \\ u(0,t) = 6, \qquad u(\pi,t) = 6 + e^{-5\,t} & t \in (0,+\infty), \\ u(x,0) = 6 + \sqrt{x/\pi} & x \in (0,\pi). \end{cases}$$

Si riporti il valore minimo della soluzione u in $[0,\pi] \times [0,+\infty)$, ovvero u_{min} .

$$\boxed{u_{min} = 6}$$

10. *(1 punto)* Si consideri il seguente problema di Neumann per l'equazione di Laplace:

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = 4 & \text{in } (0,1)^2 \\ -\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,1) = 1 & 0 < x < 1, \\ -\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = \alpha, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,y) = -3 & 0 < y < 1, \end{cases}$$

Per quale valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ tale problema ammette soluzione?

$$\boxed{\alpha = 6}$$

11. *(2 punti)* Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = -4\,y(t) - 8\,\sin(8\,t)\,e^{-4\,t} & t \in (0,+\infty), \\ y(0) = 5. & \end{cases}$$

Si risolva tale problema mediate la trasformata di Laplace e si riportino le soluzioni $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$ e $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)](t)$.

$$\boxed{Y(s) = 5\,\tfrac{s+4}{(s+4)^2+8^2} \quad \textbf{per } s > 0, \qquad y(t) = 5\,\cos(8\,t)\,e^{-4\,t} \quad \textbf{per } t \geq 0}$$

Esercizi

Esercizio 1. Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è una matrice non singolare (invertibile), $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, per $n \geq 1$.

10 punti

(a) *(1 punto)* Si riporti la *condizione necessaria e sufficiente* per l'esistenza e unicità della fattorizzazione LU senza pivoting di tale matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$; si definisca con precisione tutta la notazione utilizzata.

(b) *(2 punti)* Si enunci il teorema di stabilità per la stima dell'errore associato alla soluzione di un sistema lineare generico $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ in presenza della sola perturbazione sul dato $\mathbf{b}$; si definisca tutta la notazione utilizzata.

(c) *(2 punti)* Posto $n = 100$, si assegni in Matlab® la seguente matrice $A \in \mathbb{R}^{100\times 100}$:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 4 & -16 & -8 & 0 & & & & \\ 0 & 4 & -16 & -8 & 0 & & & \\ & 0 & 4 & -16 & -8 & 0 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 0 & 4 & -16 & -8 \\ 0 & & & & 0 & 4 & -16 \\ 16 & 0 & & & & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Si calcolino e si riportino l'autovalore di modulo massimo di A, ovvero $|\lambda_{max}(A)|$, e il numero di condizionamento $K_2(A)$.

$|\lambda_{max}(A)| =$ 20,634 38 $\qquad K_2(A) =$ 1,742 66

(d) *(2 punti)* Si illustri schematicamente, ma con completezza, il metodo della fattorizzazione LU con *pivoting per righe* applicato alla *soluzione* del *sistema lineare* generico $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

(e) *(2 punti)* Posto $\mathbf{b} = 16 \cdot (1, 2, 3, \ldots, 99, 100)^T \in \mathbb{R}^{100}$ si applichi opportunamente il metodo della fattorizzazione LU con pivoting per righe per risolvere il sistema lineare con la matrice A assegnata al punto (c); laddove necessario si utilizzi opportunamente il comando \ di Matlab® . Si riportino la seconda componente y_2 (ovvero `y(2)` in Matlab®) del vettore ausiliario $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{100}$ associato al sistema *triangolare inferiore* e la norma euclidea del residuo $\mathbf{r}$ associato alla soluzione numerica del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ottenuta con tale metodo.

$\mathrm{y}_2 =$ -384 $\qquad$ $\|\mathbf{r}\| =$ $1{,}053\,74 \cdot 10^{-12}$

(f) *(1 punto)* Si stimi l'errore relativo e_{rel} associato alla soluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ottenuta al punto (e) applicando il teorema di stabilità di cui al punto (b). Si commenti e si motivi il risultato ottenuto.

$e_{rel} \leq$ $1{,}973\,07 \cdot 10^{-16}$

Esercizio 2. Si consideri l'equazione di Laplace con condizioni al contorno di Dirichlet

11 punti

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = 0 & (x,y) \in B_2, \\ u(x,y) = f(x,y) & (x,y) \in \partial B_2, \end{cases} \tag{1}$$

definita nel cerchio centrato nell'origine e raggio 2, ossia $B_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 < 4\}$, con il dato di Dirichlet $f(x,y)$.

(a) *(2 punti)* Si enunci con precisione il principio del massimo per l'equazione di Laplace (1).

(b) *(1 punto)* Utilizzando opportunamente il principio del massimo di cui al punto (a), si calcolino e si riportino i valori minimo e massimo assoluti di u in $\overline{B_2}$ per l'equazione di Laplace (1) con il dato di Dirichlet $f(x,y) = y^2 + 5$.

$\min_{\overline{B_2}} u$ 5 $\qquad \max_{\overline{B_2}} u =$ 9

(c) *(1 punto)* Si riscriva il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace (1) in coordinate polari (ρ,θ) sia per la soluzione u che per il dato di Dirichlet f.

(d) *(2 punti)* Si ricavino e scrivano le equazioni differenziali ordinarie che devono essere soddisfatte rispettivamente dalle funzioni $h(\rho)$ e $g(\theta)$ affinché il problema (1) in coordinate polari ammetta soluzioni nella forma $u(\rho,\theta) = h(\rho)\, g(\theta)$ in B_2.

(e) *(1 punto)* Quali ulteriori condizioni devono soddisfare rispettivamente $h(\rho)$ e $g(\theta)$ per la soluzione del problema (1) nel cerchio?

(f) *(2 punti)* Si riporti la forma generale della soluzione $u(\rho,\theta)$ per separazione delle variabili in coordinate polari riferita al problema (1) nel cerchio B_2 con il dato di Dirichlet generico $f(x,y)$. Si esprima $u(\rho,\theta)$ in termini dei coefficienti $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$ e $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$ e le loro espressioni in funzione di f.

(g) *(2 punti)* Posto $f(x,y) = y^2 + 5$ per il problema (1), si scriva la soluzione $u(\rho,\theta)$ utilizzando il metodo della separazione delle variabili in coordinate polari di cui al punto (f). Si riporti poi la soluzione ottenuta in coordinate cartesiane, ossia $u(x,y)$ (Suggerimento: $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$).

$u(\rho,\theta) = \underline{7 - \frac{\rho^2}{2} + \rho^2 \sin^2(\theta) = 7 - \frac{\rho^2}{2}\cos(2\theta)}$ $\qquad$ $u(x,y) = \underline{\quad 7 + \frac{y^2 - x^2}{2} \quad}$

Esercizio 3. Si consideri il problema differenziale:

12 punti

$$\begin{cases} -u''(x) + u'(x) + 2\, u(x) = f(x) & x \in (0,1), \\ u(0) = 0, \\ u'(1) = 6, \end{cases} \tag{2}$$

dove $f(x) \in L^2(0,1)$.

(a) *(2 punti)* Si scriva la formulazione debole del problema (2) motivando i passaggi, la scelta degli spazi funzionali e delle norme.

(b) *(2 punti)* Si enunci con precisione il teorema (lemma) di Lax–Milgram.

(c) *(2 punti)* Si dimostri che la forma bilineare $a(\cdot,\cdot)$ e il funzionale lineare $F(\cdot)$ introdotti al punto (a) sono continui, motivando i passaggi svolti.

(d) *(1 punto)* Si disegnino le funzioni di base dello spazio di Elementi Finiti di grado $r = 1$ definiti su una partizione uniforme di $[0,1]$ con passo $h = 1/3$ e che approssimano lo spazio funzionale scelto per il problema in formulazione debole di cui al punto (a).

(e) *(1 punto)* Si ripeta il punto (d) considerando ora lo spazio di Elementi Finiti di grado $r = 2$.

(f) *(4 punti)* Si ponga ora per il problema (2) il seguente dato:

$$f(x) = (12 + 6\,\pi^2)\,\cos(\pi\,x) - 6\,\pi\,\sin(\pi\,x) + 6\,(2x - 1).$$

Si utilizzi opportunamente Matlab® per risolvere il problema (2) con il dato precedente tramite il metodo degli Elementi Finiti di grado $r = 1$ definiti su una partizione uniforme di [0,1] con passo $h = 1/10$. Si assembli il sistema lineare corrispondente a tale approssimazione agli Elementi Finiti, ovvero $A\,\mathbf{u} = \mathbf{f}$, dove $A \in \mathbb{R}^{N_h \times N_h}$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{N_h}$ e $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{N_h}$, con N_h la dimensione dello spazio Elementi Finiti. Si utilizzi opportunamente il metodo dei trapezi compositi per assemblare il vettore $\mathbf{f}$.

Si riportino: i valori delle componenti A_{11}, A_{12}, A_{21} e $A_{N_h N_h}$ della matrice A e delle componenti f_1, f_2 e f_{N_h} del vettore $\mathbf{f}$ (si indichino i risultati con almeno 4 cifre decimali).

$A_{11} = \frac{302}{15} = 20{,}133\,333$ $\qquad$ $A_{12} = -\frac{142}{15} = -9{,}466\,667$

$A_{21} = -\frac{157}{15} = -10{,}466\,667$ $\qquad$ $A_{N_h N_h} = \frac{317}{30} = 10{,}566\,667$

$f_1 = 5{,}710\,715$ $\qquad$ $f_2 = 4{,}293\,678$

$f_{N_h} = 2{,}739\,119$

Si risolva il sistema lineare $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$ e si riportino i valori della soluzione approssimata $u_h(x)$ con il metodo Elementi Finiti quando valutata in $\overline{x} = 9/10$ e $\widehat{x} = 11/20$ (si indichino i risultati con almeno 4 cifre decimali).

$u_h(\overline{x}) = -6{,}349\,318$ $\qquad$ $u_h(\widehat{x}) = -3{,}663\,12$