

D 1	D 2	D 3	Matlab	Totale
Metodi Analitici e Numerici per l'Ingegneria Docente:				Appello 28 Giugno 2016
Cognome:		Nome:		Matricola:

• Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.

DOMANDA 1 Si consideri un sistema lineare

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

dove A è una matrice $n \times n$ e $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

1. (T) Si dica sotto quali condizioni sulla matrice A è possibile utilizzare il metodo del gradiente per la soluzione del sistema.
2. (T) A quale problema di minimizzazione è equivalente la soluzione del sistema?
3. (T) Si ricavi il metodo del gradiente.
4. (T) Si enuncino due possibili criteri di arresto per il metodo del gradiente.
5. (M) Si consideri la matrice A di dimensione 10×10 tale che

$$a_{ij} = \begin{cases} 6 & \text{se } i = j \\ 2 & \text{se } i = j + 1 \\ 2 & \text{se } j = i + 1 \\ -1 & \text{se } i = j + 2 \\ -1 & \text{se } j = i + 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Usando Matlab, giustificare se A soddisfa le condizioni del metodo del gradiente.

DOMANDA 2 Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} -u'' + u' = x, & 0 < x < 1 \\ u(0) = -1 \\ u'(1) = 1 \end{cases} \quad (1)$$

1. (T) Si ricavi la formulazione debole del problema giustificando i passaggi e motivando la scelta degli spazi funzionali.
2. (T) Si dimostri che la forma bilineare ottenuta al punto precedente è continua e coerciva.
3. (T) Si enunci il lemma (o teorema) di Lax-Milgram.
4. (E) Si disegnino le funzioni di base dello spazio di elementi finiti lineari definiti su una partizione uniforme dell'intervallo $[0, 1]$ di passo $h = 1/4$, che approssimano lo spazio funzionale scelto per la formulazione debole.
5. (E) Si scriva il sistema lineare corrispondente all'approssimazione ad elementi finiti.
6. (M) Si implementi in Matlab il sistema, lo si risolva e si disegni il grafico della soluzione del problema (1).

DOMANDA 3 Si consideri la funzione $f : [1/2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \sin^2(\pi x) - \sin(\pi x)$$

e l'integrale

$$\int_{1/2}^2 f(x) dx.$$

1. (T) Si definisca l'ordine di convergenza e il grado di esattezza di una formula di quadratura.
2. (T) Si scriva la formula del trapezio per il calcolo dell'integrale e si dica qual è il grado di esattezza del metodo.
3. (E) Si calcoli l'integrale approssimato con la formula del trapezio.
4. (T) Si ricavi la formula di quadratura del trapezio composta con nodi equispaziati e si precisi qual è l'ordine di convergenza.
5. (M) Si programmi in Matlab la formula del trapezio composta suddividendo l'intervallo in N parti uguali.
6. (M) Si calcoli numericamente l'integrale per $N = 5, 10, 20, 40$ e, sapendo che l'integrale esatto vale $\frac{3}{4} + \frac{1}{\pi}$, si verifichi che l'ordine di convergenza è quello precisato al punto (4).