Metodi Analitici e Numerici per l'Ingegneria	Terzo appello 15 Luglio 2015

DOMANDA 1 Si consideri il problema di Cauchy-Dirichlet:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & (t,x) \in \Omega = (0,+\infty) \times (0,\pi)\,, \\ u(t,0) = 0 \qquad t > 0 & \\ u(t,\pi) = -3\pi \qquad t > 0 & \\ u(0,x) = -\sin x + \sin 2x - 3x \qquad x \in [0,\pi] & \end{cases} \tag{1}$$

1. (E) Si risolva il problema col metodo della separazione delle variabili, riportando solamente i passaggi principali.
2. (E) Si calcoli $u_\infty(x) = \lim_{t\to+\infty} u(t,x)$.
3. (T) Si enunci il principio del massimo/minimo per l'equazione di diffusione.
4. (E) Si trovino

$$\max_{(t,x)\in[0,10]\times[0,\pi]} u(t,x) \quad \text{e} \quad \min_{(t,x)\in[0,10]\times[0,\pi]} u(t,x)$$

5. (T) Sia $u_h(x,t) = \sum_{j=1}^{N_h} u_j(t)\psi_j(x)$ la soluzione approssimata agli elementi finiti del problema (1), e

$$M\mathbf{u}'(t) + A\mathbf{u}(t) = \mathbf{F} \tag{2}$$

il sistema risultante dalla semidiscretizzazione spaziale, dove $[\mathbf{u}(t)]_j = u_j(t)$.
Scrivere le matrici M, A e il vettore $\mathbf{F}$ in funzione delle funzioni $\psi_j(x)$ che costituiscono la base dello spazio a elementi finiti.
6. (E) Si riportino i valori numerici delle matrici M, A e del vettore $\mathbf{F}$ ipotizzando di effettuare la discretizzazione spaziale con elementi finiti lineari definiti su una partizione uniforme dell'intervallo $[0,\,\pi]$ con passo $h = \pi/5$.
7. (T) Ipotizzando di effettuare la discretizzazione temporale con il metodo di Eulero in avanti, si derivi la condizione sul passo di avanzamento temporale per l'assoluta stabilità del metodo.

DOMANDA 2

Si consideri la funzione $f(x) = \arctan(3x)$.

1. (T) Dato un insieme di punti $\{x_j\}$, $j = 0,\ldots,N$, si definisca il polinomio interpolante di Lagrange della funzione $f(x)$ nei punti $\{x_j\}$.
2. (T) Si enunci un teorema di esistenza e unicità per il polinomio interpolante di Lagrange.
3. (E) Si scriva il polinomio interpolante di Lagrange della $f(x)$ data relativo ai nodi $0, 1/3, \sqrt{3}/3$.
4. (M) Si costruiscano il polinomio interpolante di Lagrange $\Pi_6 f$ relativo a una distribuzione di nodi equispaziati ed il polinomio interpolante di Lagrange $\hat{\Pi}_6 f$ relativo alla distribuzione di Chebyshev-Gauss-Lobatto nell'intervallo $[0,3]$. (Si scrivano i polinomi)
5. (M) Si tracci il grafico della funzione e dei polinomi $\Pi_6 f$ e $\hat{\Pi}_6 f$ nell'intervallo $[0,3]$ (sullo stesso grafico).
6. (M) Si rappresenti graficamente l'andamento degli errori $\varepsilon(x) = |f(x) - \Pi_6 f(x)|$ e $\hat{\varepsilon}(x) = |f(x) - \hat{\Pi}_6 f(x)|$.
7. (M) Si calcoli la norma infinito (o norma del sup) di $\varepsilon(x)$ e $\hat{\varepsilon}(x)$