

Metodi Analitici e Numerici per l'Ingegneria CdL Ingegneria Meccanica <u>II Prova in Itinere</u> 17 gennaio 2018	Prof. M.C. Cerutti Prof. L. Dedè	Firma leggibile dello studente
Cognome:	Nome:	Matricola:

ISTRUZIONI

- Riportare le risposte nello spazio indicato.
- Alcuni esercizi richiedono di utilizzare MATLAB; per tali esercizi riportare sul foglio esclusivamente gli output richiesti.
- Utilizzare esclusivamente una penna nera o blu.
- Tempo a disposizione: 1h 15m.

SPAZIO RISERVATO AL DOCENTE

Esercizio 1	
Esercizio 2	
Totale	

Esercizi

ESERCIZIO 1. Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(t) = f(t, y(t), y'(t)) & t \in (0, +\infty), \\ y'(0) = w_0, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (1)$$

10 punti

con $f(t, y, y') : (0, +\infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}$ e $w_0 \in \mathbb{R}$.

- (a) (2 punti) Si pongano $f(t, y, y') = -3y' - 2y + H(t-4)$, $y_0 = 4$ e $w_0 = 0$ nel problema (1), dove $H(t)$ è la funzione Heaviside, ovvero $H(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$. Si trasformi secondo Laplace il problema di Cauchy (1) con i dati precedenti e, indicata con $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$ la trasformata della soluzione $y(t)$, si ricavi e si riporti l'espressione di $Y(s)$; si motivino i passaggi svolti.

$$Y(s) = \underline{4(s+3)/(s^2+3s+2) + e^{-4s}/(s^3+3s^2+2s), \quad s > 0}$$

- (b) (2 punti) Si ricavi e si riporti l'espressione della soluzione $y(t)$ del problema di Cauchy di cui al punto (a) tramite l'antitrasformata di Laplace, ovvero a partire da $Y(s)$ come $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)](t)$.

$$y(t) = \underline{8e^{-t} - 4e^{-2t} + [1/2 - e^{-(t-4)} + 1/2e^{-2(t-4)}]H(t-4), \quad t \geq 0}$$

(c) (2 punti) Si riporti l'algoritmo (non in stretto linguaggio Matlab[®]) del metodo di Leap Frog per l'approssimazione del problema di Cauchy generale (1); si definisca tutta la notazione utilizzata.

(d) (4 punti) Si pongano ora $f(t,y,y') = -3y' - 2y + 4 \sin(2t)$, $y_0 = 4$ e $w_0 = 0$ nel problema di Cauchy (1) definito nell'intervallo temporale $(0,2\pi)$.

Si utilizzi opportunamente Matlab[®] per risolvere tale problema mediante il metodo di Leap Frog utilizzando il passo di discretizzazione $h = \pi/10$ per l'intervallo temporale $(0,2\pi)$; h partiziona tale intervallo in tempi discreti $t_n = n h$ per $n = 0, 1, \dots, N_h$, dove $N_h = 2\pi/h$. [Suggerimento: si osservi che tale problema discretizzato è lineare nelle incognite]

Si riportino: il valore u_1 dell'approssimazione di $y(t_1)$, il valore v_1 dell'approssimazione di $y'(t_1)$, il valore u_{N_h} dell'approssimazione di $y(2\pi)$ e il valore v_{N_h} dell'approssimazione di $y'(2\pi)$ (si indichino i risultati con almeno 4 cifre decimali).

$$\begin{array}{ll}
 u_1 = \underline{\quad 3,605\,216 \quad} & v_1 = \underline{\quad -1,372\,947 \quad} \\
 u_{N_h} = \underline{\quad -0,622\,946 \quad} & v_{N_h} = \underline{\quad -0,417\,948 \quad}
 \end{array}$$

ESERCIZIO 2. Si consideri il problema differenziale:

$$\begin{cases} -u''(x) - u'(x) + 2 u(x) = f(x) & x \in (0,1), \\ u'(0) = 3\pi, \\ u(1) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

12 punti

dove $f(x) \in L^2(0,1)$.

(a) (2 punti) Si scriva la formulazione debole del problema (2) motivando i passaggi, la scelta degli spazi funzionali e delle norme.

(b) (2 punti) Si enunci con precisione il teorema (lemma) di Lax–Milgram.

(c) (2 punti) Si dimostri che la forma bilineare $a(\cdot, \cdot)$ introdotta al punto (a) è coerciva motivando i passaggi svolti.

- (d) (1 punto) Si disegnino le funzioni di base dello spazio di Elementi Finiti di grado $r = 1$ definiti su una partizione uniforme di $[0,1]$ con passo $h = 1/3$ e che approssimano lo spazio funzionale scelto per il problema in formulazione debole di cui al punto (a).

- (e) (1 punto) Si ripeta il punto (d) considerando ora lo spazio di Elementi Finiti di grado $r = 2$.

- (f) (4 punti) Si ponga ora per il problema (2) il dato $f(x) = (6 + 3\pi^2) \sin(\pi x) - 3\pi \cos(\pi x)$.

Si utilizzi opportunamente Matlab[®] per risolvere il problema (2) con il dato precedente tramite il metodo degli Elementi Finiti di grado $r = 1$ definiti su una partizione uniforme di $[0,1]$ con passo $h = 1/10$. Si assembli il sistema lineare corrispondente a tale approssimazione agli Elementi Finiti, ovvero $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$, dove $A \in \mathbb{R}^{N_h \times N_h}$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{N_h}$ e $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{N_h}$, con N_h la dimensione dello spazio Elementi Finiti. Si utilizzi opportunamente il metodo dei trapezi composti per assemblare il vettore \mathbf{f} .

Si riportino: i valori delle componenti A_{11} e A_{12} della matrice A e delle componenti f_1 e f_2 del vettore \mathbf{f} (si indichino i risultati con almeno 4 cifre decimali).

$$A_{11} = \underline{\frac{317}{30} = 10,566\ 667}$$

$$A_{12} = \underline{-\frac{157}{15} = -10,466\ 667}$$

$$f_1 = \underline{-9,896\ 017}$$

$$f_2 = \underline{0,204\ 023}$$

Si risolva il sistema lineare $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$ e si riportino i valori della soluzione approssimata $u_h(x)$ con il metodo Elementi Finiti quando valutata in $\bar{x} = 1/5$ e $\hat{x} = 7/20$ (si indichino i risultati con almeno 4 cifre decimali).

$$u_h(\bar{x}) = \underline{1,746\ 914}$$

$$u_h(\hat{x}) = \underline{2,642\ 281}$$

