Metodi Analitici e Numerici per l'Ingegneria **CdL Ingegneria Meccanica** **<u>II Prova in Itinere</u>** **17 gennaio 2018**	**Prof. M.C. Cerutti** **Prof. L. Dedè**	**Firma leggibile dello studente**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

ISTRUZIONI

- Riportare le risposte nello spazio indicato.
- Alcuni esercizi richiedono di utilizzare MATLAB; per tali esercizi riportare sul foglio esclusivamente gli output richiesti.
- Utilizzare esclusivamente una penna nera o blu.
- Tempo a disposizione: 1h 15m.

SPAZIO RISERVATO AL DOCENTE

Esercizio 1	
Esercizio 2	
Totale	

Esercizi

Esercizio 1. Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(t) = f(t,y(t),y'(t)) & t \in (0,+\infty), \\ y'(0) = w_0, & \\ y(0) = y_0, & \end{cases} \tag{1}$$

10 punti

con $f(t,y,y') : (0,+\infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}$ e $w_0 \in \mathbb{R}$.

(a) *(2 punti)* Si pongano $f(t,y,y') = -3\,y' - 2\,y + H(t-4)$, $y_0 = 4$ e $w_0 = 0$ nel problema (1), dove $H(t)$ è la funzione Heaviside, ovvero $H(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$. Si trasformi secondo Laplace il problema di Cauchy (1) con i dati precedenti e, indicata con $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$ la trasformata della soluzione $y(t)$, si ricavi e si riporti l'espressione di $Y(s)$; si motivino i passaggi svolti.

$Y(s) =$ ______________________________

(b) *(2 punti)* Si ricavi e si riporti l'espressione della soluzione $y(t)$ del problema di Cauchy di cui al punto (a) tramite l'antitrasformata di Laplace, ovvero a partire da $Y(s)$ come $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)](t)$.

$y(t) =$ ______________________________

(c) *(2 punti)* Si riporti l'algoritmo (non in stretto linguaggio Matlab®) del metodo di Leap Frog per l'approssimazione del problema di Cauchy generale (1); si definisca tutta la notazione utilizzata.

(d) *(4 punti)* Si pongano ora $f(t,y,y') = -3\,y' - 2\,y + 4\,\sin(2\,t)$, $y_0 = 4$ e $w_0 = 0$ nel problema di Cauchy (1) definito nell'intervallo temporale $(0,2\pi)$.

Si utilizzi opportunamente Matlab® per risolvere tale problema mediante il metodo di Leap Frog utilizzando il passo di discretizzazione $h = \pi/10$ per l'intervallo temporale $(0,2\pi)$; h partiziona tale intervallo in tempi discreti $t_n = n\,h$ per $n = 0,1,\ldots,N_h$, dove $N_h = 2\pi/h$. [*Suggerimento*: si osservi che tale problema discretizzato è lineare nelle incognite]

Si riportino: il valore u_1 dell'approssimazione di $y(t_1)$, il valore v_1 dell'approssimazione di $y'(t_1)$, il valore u_{N_h} dell'approssimazione di $y(2\pi)$ e il valore v_{N_h} dell'approssimazione di $y'(2\pi)$ (si indichino i risultati con almeno 4 cifre decimali).

$u_1 =$ ____________________ $v_1 =$ ____________________

$u_{N_h} =$ ____________________ $v_{N_h} =$ ____________________

ESERCIZIO 2. Si consideri il problema differenziale:

12 punti

$$\begin{cases} -u''(x) - u'(x) + 2\,u(x) = f(x) & x \in (0,1), \\ u'(0) = 3\,\pi, \\ u(1) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

dove $f(x) \in L^2(0,1)$.

(a) *(2 punti)* Si scriva la fomulazione debole del problema (2) motivando i passaggi, la scelta degli spazi funzionali e delle norme.

(b) *(2 punti)* Si enunci con precisione il teorema (lemma) di Lax–Milgram.

(c) *(2 punti)* Si dimostri che la forma bilineare $a(\cdot,\cdot)$ introdotta al punto (a) è coerciva motivando i passaggi svolti.

(d) *(1 punto)* Si disegnino le funzioni di base dello spazio di Elementi Finiti di grado $r = 1$ definiti su una partizione uniforme di [0,1] con passo $h = 1/3$ e che approssimano lo spazio funzionale scelto per il problema in formulazione debole di cui al punto (a).

(e) *(1 punto)* Si ripeta il punto (d) considerando ora lo spazio di Elementi Finiti di grado $r = 2$.

(f) *(4 punti)* Si ponga ora per il problema (2) il dato $f(x) = (6 + 3\,\pi^2)\,\sin(\pi\,x) - 3\,\pi\,\cos(\pi\,x)$.

Si utilizzi opportunamente Matlab® per risolvere il problema (2) con il dato precedente tramite il metodo degli Elementi Finiti di grado $r = 1$ definiti su una partizione uniforme di [0,1] con passo $h = 1/10$. Si assembli il sistema lineare corrispondente a tale approssimazione agli Elementi Finiti, ovvero $A\,\mathbf{u} = \mathbf{f}$, dove $A \in \mathbb{R}^{N_h \times N_h}$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{N_h}$ e $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{N_h}$, con N_h la dimensione dello spazio Elementi Finiti. Si utilizzi opportunamente il metodo dei trapezi compositi per assemblare il vettore $\mathbf{f}$.

Si riportino: i valori delle componenti A_{11} e A_{12} della matrice A e delle componenti f_1 e f_2 del vettore $\mathbf{f}$ (si indichino i risultati con almeno 4 cifre decimali).

$A_{11} =$ ____________________ $A_{12} =$ ____________________

$f_1 =$ ____________________ $f_2 =$ ____________________

Si risolva il sistema lineare $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$ e si riportino i valori della soluzione approssimata $u_h(x)$ con il metodo Elementi Finiti quando valutata in $\overline{x} = 1/5$ e $\widehat{x} = 7/20$ (si indichino i risultati con almeno 4 cifre decimali).

$u_h(\overline{x}) =$ ____________________ $u_h(\widehat{x}) =$ ____________________