

Metodi Analitici e Numerici per l'Ingegneria Docente:		II Prova Parziale 31 Gennaio 2017
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Gli esercizi richiedono l'uso di Matlab. Riportare sul foglio esclusivamente gli output richiesti.

---

**SPAZIO RISERVATO ALLA COMMISSIONE**

Esercizio 1	
Esercizio 2	
Matlab	
Totale	

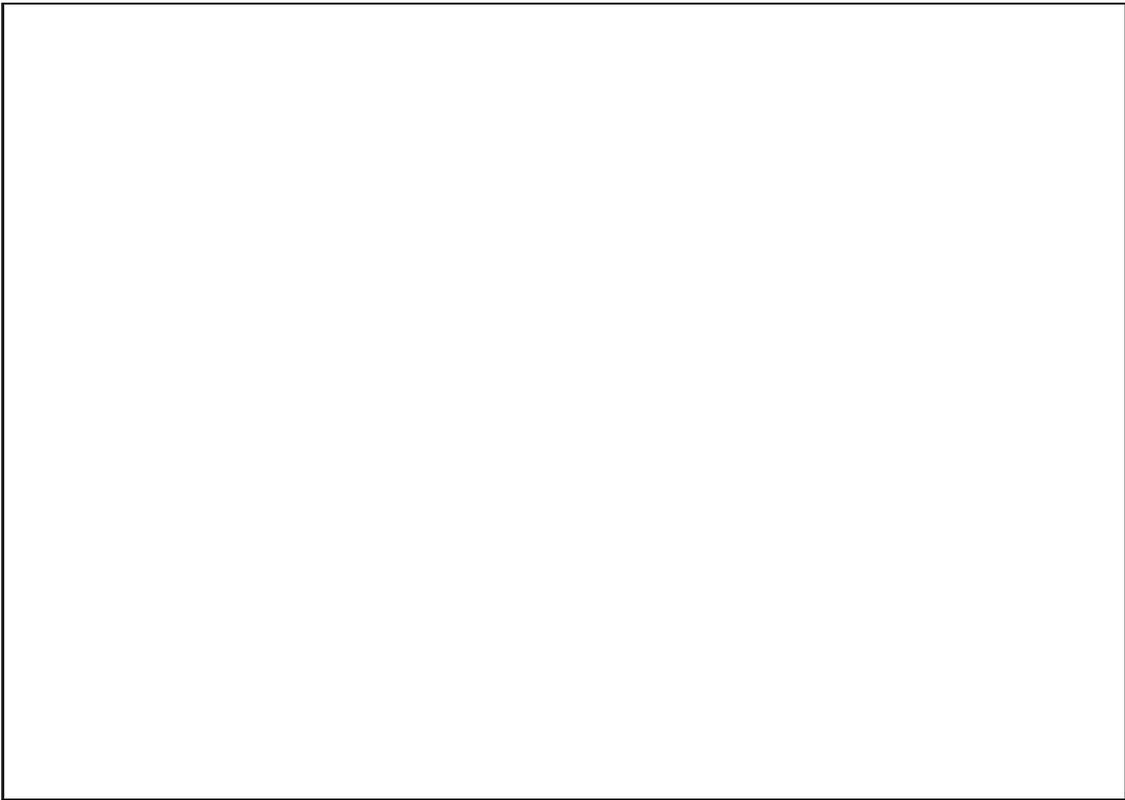
---

**DOMANDA 1** Si consideri il seguente problema:

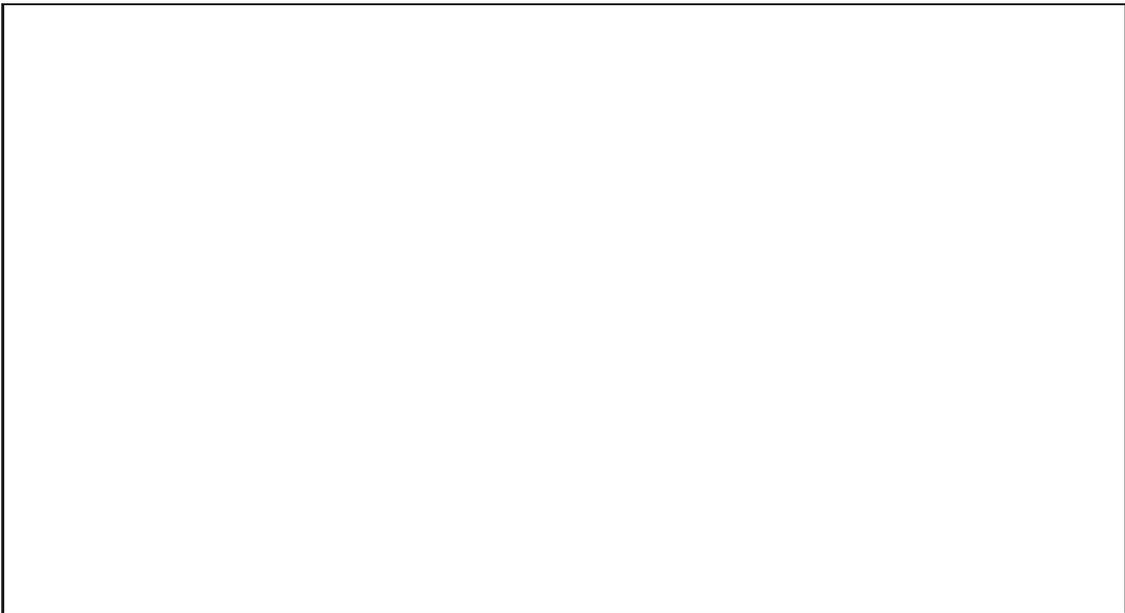
$$\begin{cases} -3u''(x) - 2u'(x) + u(x) = x, & 0 < x < 1 \\ u(0) = 1 \\ u'(1) = 1. \end{cases} \quad (1)$$

1. (T) Si ricavi la formulazione debole del problema giustificando i passaggi e motivando la scelta degli spazi funzionali.

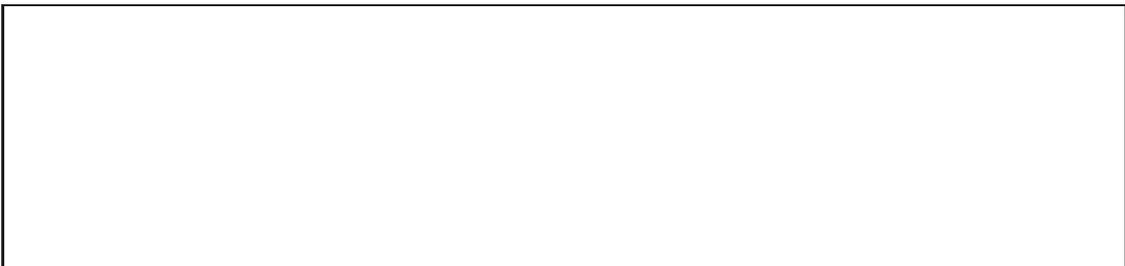
2. (T) Si dimostri che la forma bilineare ottenuta al punto precedente è coerciva.



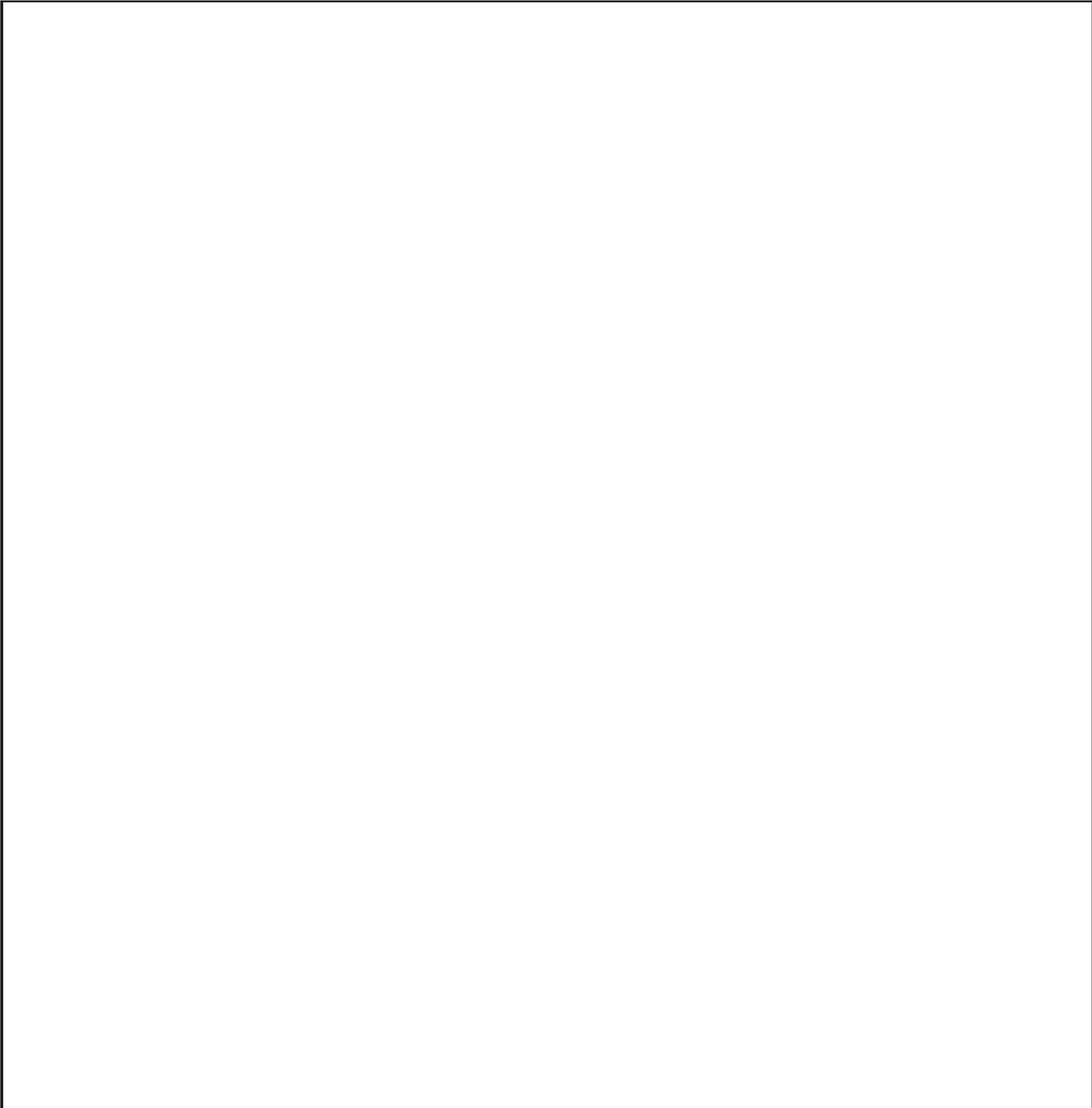
3. (T) Si enunci con precisione il lemma (o teorema) di Lax-Milgram.



4. (E) Si disegnino le funzioni di base dello spazio di elementi finiti lineari definiti su una partizione uniforme dell'intervallo  $[0, 1]$  di passo  $h = 1/3$ , che approssimano lo spazio funzionale scelto per la formulazione debole.



5. (E) Si scriva l'approssimazione di Galerkin del problema,  $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$  ottenuta utilizzando lo spazio degli elementi finiti lineari descritto al punto 2, indicando come gli elementi della matrice  $A$  e del vettore  $\mathbf{f}$  dipendono dagli elementi della base a elementi finiti.



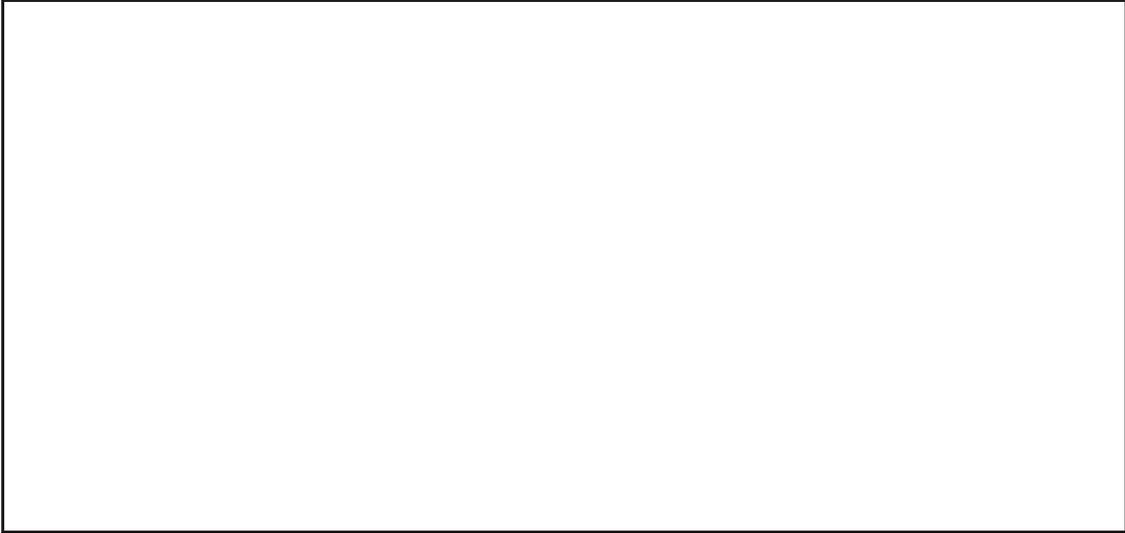
6. (M) Si implementi in MATLAB il sistema, lo si risolva e si disegni il grafico della soluzione del problema (1). Si riporti sul foglio il disegno della soluzione.



**DOMANDA 2** Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = e^{-t}, & t > 0 \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

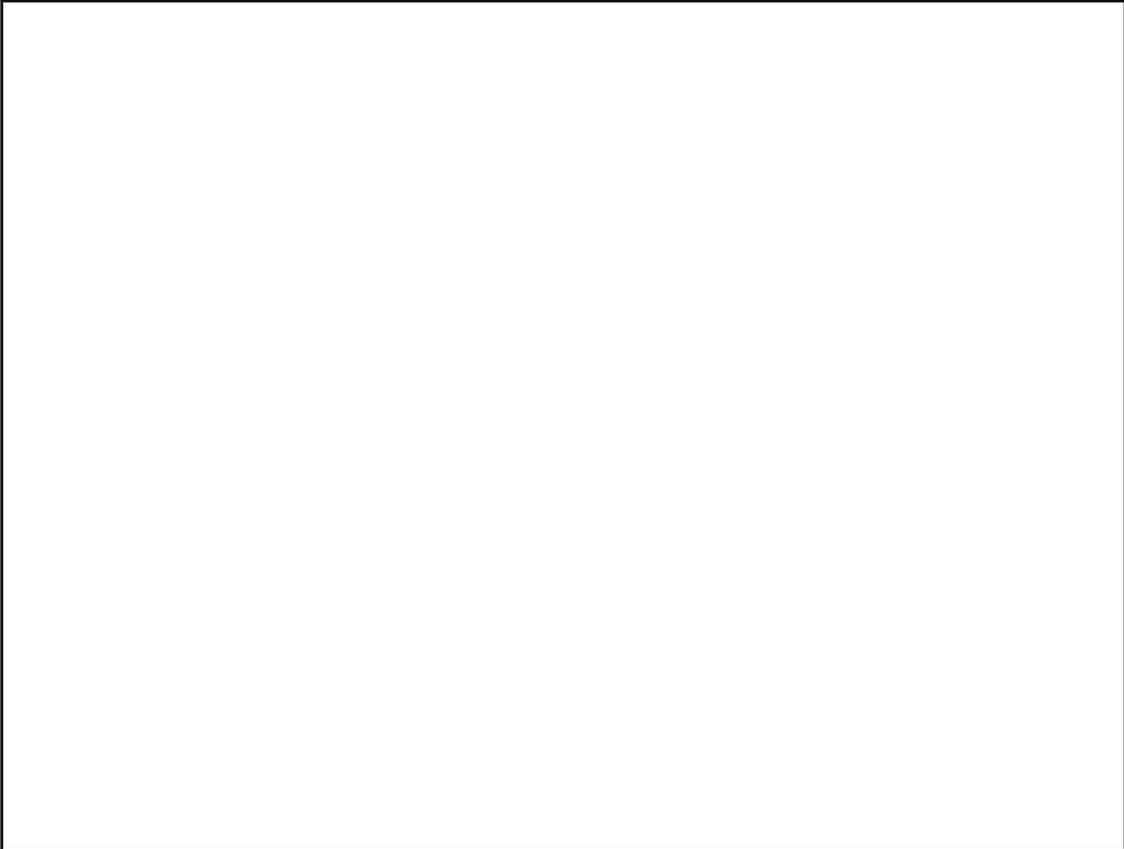
1. (E) Sia  $Y(p)$  la trasformata di Laplace della soluzione. Si calcoli la trasformata di Laplace dell'equazione e si ricavi  $Y(s)$  (si ricorda che la trasformata di Laplace di  $e^{-ax}$  è  $\frac{1}{p+a}$ )



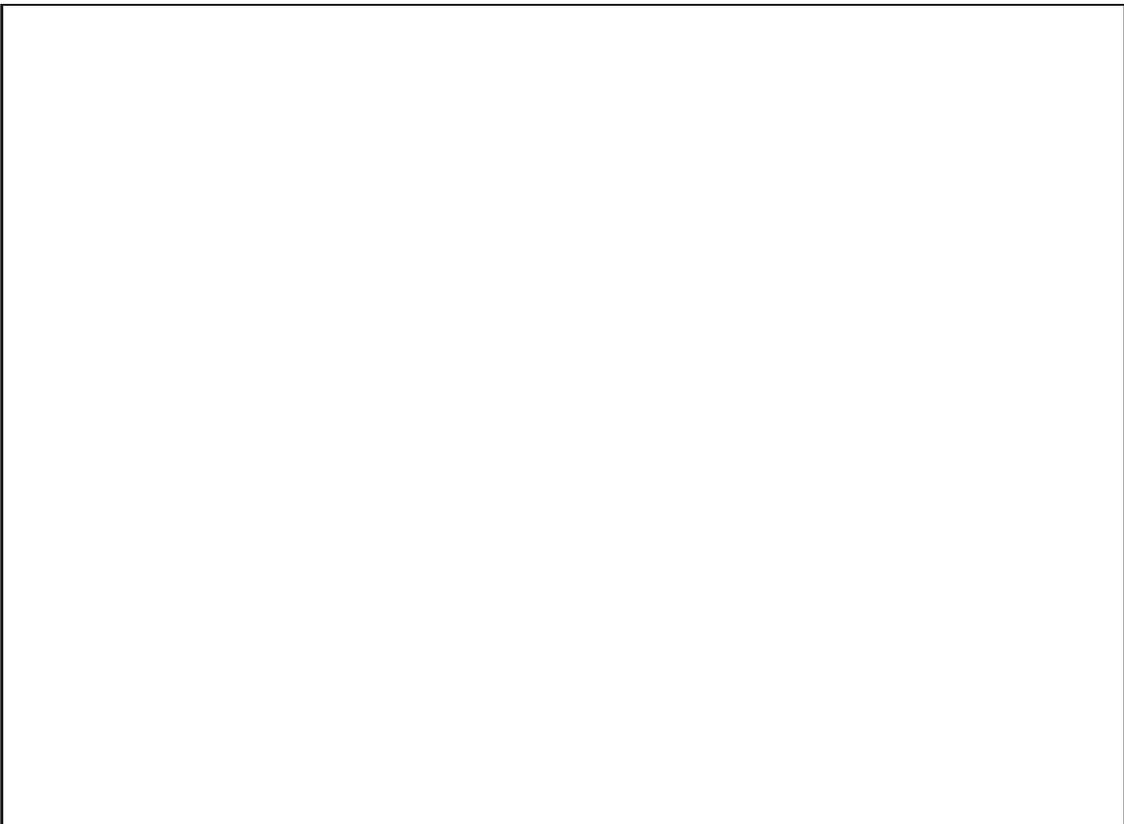
2. (E) Utilizzando il risultato al punto 1., si determini, motivando ogni passaggio, la soluzione  $y(t)$  di (2) per  $t \geq 0$ .



3. (T) Si ricavi il metodo Leap-Frog per un generico problema di Cauchy per un'equazione del secondo ordine, precisando da dove deriva.



4. (E) Si scriva il metodo Leap-Frog per la soluzione del problema di Cauchy (2) e si mostri che essendo l'equazione lineare è possibile trovare un'espressione esplicita per entrambe le variabili.



5. (M) Si implementi con Matlab l'algoritmo ricavato al punto precedente e si risolva il problema (2) nell'intervallo di tempo  $[0, 1]$  usando il metodo di Leap-Frog con passi di discretizzazione  $h = 1/40$ . Si riporti il grafico della soluzione numerica ottenuta.



6. (M) Conoscendo il valore esatto  $y(1) = \frac{1}{8e^3} + \frac{e}{8} - \frac{1}{4e}$ , si valuti l'andamento dell'errore  $e_h = |y(1) - y_h(1)|$  al diminuire del passo di discretizzazione temporale, calcolandolo per i valori di  $h = 1/5, 1/10, 1/20, 1/40$ . Si confronti quanto ottenuto con il risultato teorico (si scriva commento).

