Metodi Analitici e Numerici per l'Ingegneria	II prova parziale
Compito A	**2 Febbraio 2016**

DOMANDA 1

1. (T) Sia $Q = (0, \pi) \times (0, +\infty)$. Si enunci il principio del massimo per soluzioni dell'equazione:
$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 \qquad (x,t) \in Q\,.$$
2. (E) Si determini una soluzione $u = u(x,t)$ del problema
$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 & \text{in} \quad Q, \\ u(x,0) = 1 + \sin x + \dfrac{1}{2}\sin(4x) & \text{in} \quad (0,\pi), \\ u(0,t) = 1 \text{ e } u(\pi,t) = \pi, & \text{in} \quad (0,+\infty). \end{cases}$$
3. (E) Quanto vale il massimo di u su $\overline{Q}$?
4. (E) La soluzione u è continua su $\overline{Q}$?

(N.B. Non è necessario riportare tutta la separazione di variabili ma solo i passaggi principali. Il calcolo dei coefficienti è facoltativo. E' necessario però indicare come si calcolano.)

DOMANDA 1-bis

1. (T) Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un insieme aperto e limitato. Sia $\partial\Omega$ il bordo di ω. Si enunci principio del massimo per soluzioni del problema:
$$\Delta u = 0 \qquad x \in \Omega\,.$$
2. (T) Si enunci una proprietà del valor medio per soluzioni del problema:
$$\Delta u = 0 \qquad x \in \Omega\,.$$
3. (E) Sia $B_1 \subset \mathbb{R}^2$ il cerchio di centro nell'origine e raggio 1 e δB_1 la circonferenza. Si consideri il problema di Dirichlet
$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in} \quad B_1, \\ u(x,y) = x^2 + 2y^2 + xy & \text{on} \quad \partial B_1. \end{cases}$$
Si calcoli il valore della soluzione $u(0,0)$.
4. (E) Sempre relativamente all'esercizio al punto precedente, di trovino massimo e minimo assoluti della soluzione $u(x,y)$ su ∂B_1.
5. (E) Si trovi la soluzione del problema al punto 2) con il metodo di separazione delle variabili, senza riportare tutto il procedimento e indicando solo come calcolare i coefficienti.

6. (Facoltativo, da svolgersi solo dopo aver completato tutto il resto) (E) Calcolare anche i coefficienti e scrivere la soluzione in coordinate cartesiane.

(N.B. E' utile ricordare le formule $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ e $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$.)

DOMANDA 2
Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} -u''(x) + u'(x) + u(x) = x - x^2, \quad 0 < x < 1 \\ u(0) = 1 \\ u'(1) = 1\,. \end{cases}$$

1. (T) Si ricavi la formulazione debole del problema giustificando i passaggi e motivando la scelta degli spazi funzionali.
2. (T) Si dimostri che la forma bilineare ottenuta al punto precedente è coerciva.
3. (T) Si enunci il lemma (o teorema) di Lax-Milgram.
4. (E) Si disegnino le funzioni di base dello spazio di elementi finiti lineari definiti su una partizione unifome dell'intervallo $[0,1]$ di passo $h = 1/4$, che approssimano lo spazio funzionale scelto per la formulazione debole.
5. (E) Si scriva il sistema lineare corrispondente all'approssimazione ad elementi finiti.
6. (M) Si implementi in MATLAB il sistema, lo si risolva e si disegni il grafico della soluzione.

DOMANDA 3 Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(t) + y'(t) + y(t) = \sin t, \quad t > 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

1. (E) Si trasformi l'equazione in un sistema del primo ordine.
2. (T) Si scriva il metodo di Eulero in avanti per la risoluzione di un sistema.
3. (M) Si implementi l'algoritmo di Eulero in avanti per sistemi 2×2.
4. (M) Si risolva il problema di Cauchy nell'intervallo di tempo $[0,1]$ con passi di discretizzazione $h = 1/5, 1/10, 1/20, 1/40$ con l'algoritmo Eulero avanti programmato sopra.
5. (M) Sapendo che la soluzione esatta è $y(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \cos t$ verificare l'ordine di convergenza del metodo. Il risultato trovato è in accordo con la teoria?