Metodi Analitici e Numerici per l'Ingegneria	II prova parziale 3 Febbraio 2015

DOMANDA 1

Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} -u''(x) + u'(x) = x, \quad 0 < x < 1 \\ u(0) = -1 \\ u'(1) = 1\,. \end{cases}$$

1. (T) Si ricavi la formulazione debole del problema giustificando i passaggi e motivando la scelta degli spazi funzionali.
2. (T) Si dimostri che la forma bilineare ottenuta al punto precedente è continua e coerciva.
3. (T) Si enunci il lemma (o teorema) di Lax-Milgram.
4. (E) Si disegnino le funzioni di base dello spazio di elementi finiti lineari definiti su una partizione unifome dell'intervallo $[0,1]$ di passo $h = 1/4$, che approssimano lo spazio funzionale scelto per la formulazione debole.
5. (E) Si scriva il sistema lineare corrispondente all'approssimazione ad elementi finiti.
6. (M) Si implementi in MATLAB il sistema, lo si risolva e si disegni il grafico della soluzione.

DOMANDA 2

1. (T) Si determini una soluzione $u = u(x,t)$ del problema

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 & \text{in} \quad (0,\pi) \times (0,+\infty), \\ u(x,0) = -\frac{4}{\pi^2}x^2 + \frac{2}{\pi}x + 1 & \text{in} \quad (0,\pi), \\ u(0,t) = 1 \text{ e } u(\pi,t) = -1, & \text{in} \quad (0,+\infty). \end{cases}$$

senza riportare tutta la separazione di variabili, ma solo i passaggi principali. In particolare esprimere i coefficienti sotto forma di integrale senza calcolarli esplicitamente.

2. (E) Qual è la soluzione stazionaria?
3. (T) La soluzione u è continua su $[0,\pi] \times [0,+\infty)$?
4. (T) Enunciare il principio del massimo per $u(x,t)$.
5. (T) Dimostrare l'unicità della soluzione per il problema.
6. (M) Risolvere l'equazione con MATLAB (usando DCT o DST per calcolare i coefficienti) e disegnare il grafico della soluzione per $t = 1$. (Si ricorda che per una funzione $f(x)$, utilizzando la formula del punto medio, $a_k \simeq \dfrac{2}{N}\displaystyle\sum_{j=1}^{N} f\left(\frac{\pi(2j-1)}{2N}\right)\cos\left(\frac{\pi k(2j-1)}{2N}\right)$ e utilizzando la formula del trapezio $b_k \simeq \dfrac{2}{N}\displaystyle\sum_{j=1}^{N-1} f\left(\frac{\pi j}{N}\right)\sin\left(\frac{\pi k j}{N}\right)$)
7. (M) Si osservi che la soluzione numerica soddisfa il principio del massimo per $t \in [0,1]$