STATICA

(Distillazione verticale)

OBIETTIVI: **A)** Conosenza e comprensione dei fondamenti della statica;
B) Capacità di operare con grandezze vettoriali;
C) Capacità di risolvere problemi sui baricentri di figure piane e sui momenti d'inerzia di superfici;
D) Capacità di risolvere problemi sulle reazioni vincolari nei sistemi isostatici.

COMPOSIZIONE E SCOMPOSIZIONE DI FORZE COMPLANARI

- Vettore (def)
- Forza (def)
- Risultante (def)
- Composizione di forze aventi stessa linea d'azione (appl.)
- Composizione di due forze incidenti ortogonali (appl.)
- Composizione di due forze parallele dello stesso verso e di verso contrario (appl.)
- Scomposizione di forze secondo due linee d'azione ortogonali e due linee d'azione parallele (appl.)
- Composizione e scomposizione di forze aventi linee d'azione incidenti qualsiasi (appl.)
- Generalizzazione sulla composizione delle forze
  poligono delle forze e poligono funicolare (appl.)

GEOMETRIA DELLE AREE

- Centro di forze parallele (def.)
- Baricentro (def.)
- Baricentro di una figura piana (def.)
  baricentri segmento, quadrato, rettangolo, triangolo, trapezio, cerchio (appl.)
  asse di simmetria (def.)
  regole pratiche (descr.)
- Momento statico di una superficie rispetto ad un asse (def.)
  unità di misura
- Coordinate del baricentro di figure piane complesse (appl.)
  strategia di soluzione (descr.)

MOMENTI D'INERZIA DI SUPERFICI

- Momento d'inerzia rispetto ad una retta (def.)
  Unità di misura
- Teorema di trasposizione (enunciato + formula)
  Esempi di sua utilizzazione (appl.)
- Momento d'inerzia polare (def.)
  Relazione tra momenti d'inerzia polare e assiali (formula)
- Raggio d'inerzia (def.)
- Momenti d'inerzia rispetto ad assi baricentrici del rettangolo, triangolo, cerchio (appl.)

- Momenti d’inerzia di figure complesse (calcolo)
  Strategia di soluzione (descr.)

STATICA DEL CORPO RIGIDO

- Momento di una forza rispetto ad un punto (def.)
  Unità di misura, convenzione sui segni, convenzione di rappresentazione
- Momento di un sistema di forze rispetto ad un punto (def.)
- Coppia di forze (def.)
- Momento di una coppia di forze (def.)
- Teorema di Varignon (enunciato + formula)
- Corpo rigido (def.)
  Possibili movimenti nel piano (descr.)
  Condizione di equilibrio $R = 0$ $M = 0$
- Vincolo (def.)
- Reazione vincolare (def.)
- Tipi di vincoli
  cerniera scorrevole, cerniera fissa, incastro (descr.)
  Movimenti impediti e relative reazioni vincolari (descr.)
- Struttura isostatica (def.)
- Equazioni cardinali della statica (appl.)
  $\sum F_x = 0$ equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale
  $\sum F_y = 0$ equazione di equilibrio alla traslazione verticale
  $\sum M = 0$ equazione di equilibrio alla rotazione
- Calcolo reazioni vincolari (appl.)
  Strategia di risoluzione (descr.)

S T A T I C A - SCHEDA DI LEZIONE

COMPOSIZIONE E SCOMPOSIZIONE DI VETTORI COMPLANARI

GRANDEZZA FISICA: è ogni entità che si può misurare in modo inequivocabile; si distinguono in grandezze scalari e grandezze vettoriali.
GRANDEZZE SCALARI: sono grandezze la cui misura è definita da un numero e da una unità di misura.

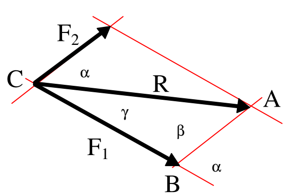
Esempi: massa (kg), lunghezza (m), tempo (s), temperatura (K).

GRANDEZZE VETTORIALI: sono grandezze rappresentate da un modulo (numero x unità di misura), da una linea d'azione (retta lungo la quale agiscono), da un verso (senso in cui agiscono).

Esempi: forza (N), peso (N), velocità (m/s), accelerazione (m/s^2).

VETTORE: è un ente geometrico (segmento) definito da linea d'azione, verso, modulo (lunghezza) e punto di applicazione.
FORZE: sono le cause che cambiano lo stato di quiete o di moto di un corpo.
SOMMARE più forze significa calcolare la risultante che è quella forza unica che produce lo stesso effetto di tutte le forze insieme, chiamate componenti.
RISULTANTE DI FORZE CONCORDI AVENTI STESSA LINEA D'AZIONE: è una forza che ha la stessa linea d'azione e lo stesso verso delle componenti e, per modulo la somma aritmetica dei moduli delle componenti.
RISULTANTE DI FORZE DISCORDI AVENTI STESSA LINEA D'AZIONE: è una forza che ha la stessa linea d'azione il verso delle forze maggiori e, il modulo uguale alla somma algebrica dei moduli delle componenti.
RISULTANTE DI DUE FORZE INCIDENTI ORTOGONALI: è la forza data dalla diagonale del rettangolo che ha per lati le forze componenti.
RISULTANTE DI DUE FORZE PARALLELE DELLO STESSO VERSO: è la forza che ha per modulo la somma dei moduli delle componenti, ha la loro linea d'azione ed il loro verso e si trova tra esse a distanza inversamente proporzionale ai loro moduli.
RISULTANTE DI DUE FORZE PARALLELE DI VERSO CONTRARIO: è la forza che ha per modulo la differenza dei moduli delle componenti, ha il verso della forza maggiore e si trova dalla sua parte, in un punto tale la cui distanza dai punti di applicazione delle componenti è inversamente proporzionale ai loro moduli.
RISULTANTE DI DUE FORZE INCIDENTI QUALSIASI: è una forza data dalla diagonale del parallelogramma che ha per lati le forze componenti.

COMPOSIZIONE DI DUE FORZE AVENTI DIREZIONI INCIDENTI QUALSIASI:



Sono noti F_1, F_2, α.

Dal triangolo ABC con $\overline{AB} = F_2$; $\overline{BC} = F_1$; $\beta = 180° - \alpha$

Si calcola: (teorema di Carnot)

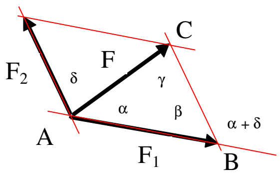
$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1 \cdot F_2 \cos\beta} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cos\alpha}$$

poiché $\cos\beta = -\cos\alpha$ solo quando $\alpha + \beta = 180°$, cioè quando α e β sono angoli supplementari.

Si calcola: (teorema dei seni)

$$\frac{F_2}{\sin\gamma} = \frac{R}{\sin\beta} \Rightarrow \sin\gamma = \frac{F_2 \sin\beta}{R}; \quad \gamma = \arcsin(\sin\gamma)$$

SCOMPOSIZIONE DI UNA FORZA SECONDO DUE DIREZIONI INCIDENTI QUALSIASI:



Sono noti F, α, δ.

Si calcolano: $\gamma = \delta$ perché angoli alterni interni

$\beta = 180° - (\alpha + \delta)$

Dal triangolo ABC, si calcola: (teorema dei seni),

$$\frac{F}{sin\beta} = \frac{F_1}{sin\gamma} \Rightarrow F_1 = \frac{Fsin\gamma}{sin\beta}$$

Si calcola: (teorema dei seni)

$$\frac{F}{sin\beta} = \frac{F_2}{sin\alpha} \Rightarrow F_2 = \frac{Fsin\alpha}{sin\beta}$$

RISULTANTE DI PIÙ FORZE CONCORRENTI COMPLANARI: si può calcolare sommando due forze con la regola del parallelogramma, la risultante ottenuta si compone con lo stesso metodo alla forza successiva e così via; oppure con il metodo del poligono delle forze: il lato di chiusura del poligono rappresenta la risultante totale del sistema di forze.
Quando le forze non sono concorrenti si adottano dei metodi grafici (POLIGONO DELLE FORZE + POLIGONO FUNICOLARE).

GEOMETRIA DELLE AREE

CENTRO DI FORZE PARALLELE: è il punto di intersezione delle direzioni delle risultanti di forze parallele fatte ruotare intorno ai loro punti di applicazione.
BARICENTRO: è il centro di forze parallele le cui intensità rappresentano il peso del corpo.

BARICENTRO DI UNA FIGURA PIANA: è il centro di forze parallele le cui intensità rappresentano delle aree.

Baricentro SEGMENTO: è il punto medio del segmento.
Baricentro QUADRATO O RETTANGOLO: è il punto di intersezione delle diagonali.
Baricentro TRIANGOLO: è il punto di intersezione delle mediane.
Baricentro CERCHIO: coincide con il centro del cerchio.

ASSE DI SIMMETRIA: è l'asse che divide in due parti speculari la figura.
REGOLE PRATICHE: se la figura ha un asse di simmetria, il suo baricentro è un punto di tale asse; se la figura ha due o più assi di simmetria, il suo baricentro è il punto di intersezione di tali assi.
MOMENTO STATICO DI UNA SUPERFICIE RISPETTO AD UN ASSE: é la somma dei prodotti delle aree infinitesime (a_i) per le relative distanze dall'asse (d_i) , (le distanze tra aree e asse vanno prese perpendicolarmente all'asse).

$$S_t = \sum a_i \cdot d_i = a_1 \cdot d_1 + a_2 \cdot d_2 + a_3 \cdot d_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_n \cdot d_n$$

Il momento statico può essere positivo, negativo o nullo e la sua unità di misura è quella di una lunghezza al cubo (m^3).
Per il teorema di Varignon, il momento statico è uguale al prodotto tra l'area della figura (A) e la distanza del suo baricentro dall'asse (d_t).

$$S_t = \sum a_i \cdot d_i = A \cdot d_t \quad \text{con} \begin{cases} A & \text{area della figura} \\ d_t & \text{distanza tra baricentro e asse} \end{cases} \Rightarrow$$

$$d_t = \frac{S_t}{A} \qquad \text{formula utile per il calcolo dei baricentri}$$

Il momento statico di una figura qualsiasi rispetto ad un <u>asse passante per il suo baricentro è sempre nullo</u> perché è nulla la distanza tra asse e baricentro.

STRATEGIA DI CALCOLO DELLE COORDINATE DEL BARICENTRO DI UNA FIGURA PIANA COMPLESSA:

1) si fissa un sistema di riferimento cartesiano arbitrario e si rappresenta nella figura;
2) si divide la figura in figure elementari di cui è nota la posizione del baricentro;
3) si calcolano le coordinate dei baricentri delle figure elementari rispetto al sistema di riferimento fissato e le aree delle figure elementari;
4) si calcolano le coordinate del baricentro della figura complessa rispetto al sistema di riferimento fissato: $x_G = \frac{S_y}{\sum A_i}$; $y_G = \frac{S_x}{\sum A_i}$
5) si segna sulla figura la posizione del baricentro $G \equiv (x_G , y_G)$.

MOMENTI D'INERZIA DI SUPERFICI

MOMENTO D'INERZIA ASSIALE: è la somma dei prodotti delle aree infinitesime (a_i) per i quadrati delle distanze (d_i^2) dall'asse.

$$J_t = \sum a_i \cdot d_i^2 = a_1 \cdot d_1^2 + a_2 \cdot d_2^2 + ...+ a_n \cdot d_n^2$$

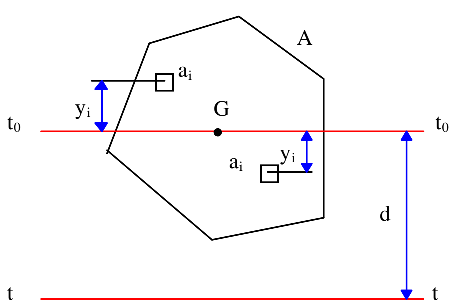
Il momento d'inerzia assiale è sempre positivo e la sua unità di misura è quella di una lunghezza alla quarta potenza (m^4).

TEOREMA DI TRASPOSIZIONE: il momento d'inerzia rispetto ad un asse t si ottiene sommando al momento d'inerzia rispetto all'asse t_0 baricentrico e parallelo a t, il prodotto dell'area (A) della superficie per il quadrato della distanza (d^2) fra le rette t e t_0

$$J_t = J_{t_0} + A \cdot d^2$$

Si utilizza per calcolare momenti d'inerzia rispetto ad assi paralleli ad assi baricentrici.

DIMOSTRAZIONE: consideriamo una figura piana qualsiasi e suddividiamola in aree infinitesime a_i



Le aree elementari a_i che stanno al di sopra dell'asse baricentrico t_o, distano (y_i + d) dall'asse t, mentre le aree elementari a_i che stanno al di sotto dell'asse baricentrico t_o, distano (y_i - d) dall'asse t. In generale possiamo scrivere:

$J_t = \sum a_i \cdot (y_i \pm d)^2$ sviluppando il quadrato del binomio si ha:

$$J_t = \sum a_i \cdot (y^2{}_i + d^2 \pm 2 \cdot y_i \cdot d) =$$

$$= \sum a_i \cdot y_i^2 + \sum a_i \cdot d^2 \pm \sum a_i \cdot 2 \cdot y_i \cdot d$$

Portando fuori dal segno di sommatoria le costanti, si ottiene:

$J_t = \sum a_i \cdot y_i^2 + d^2 \cdot \sum a_i \pm 2 \cdot d \cdot \sum a_i \cdot y_i$ ma $\sum a_i \cdot y_i = 0$ perchè è il momento statico della figura rispetto ad un suo asse baricentrico $\Rightarrow$

$J_t = \sum a_i \cdot y_i^2 + d^2 \cdot \sum a_i$ ma si ha $\begin{cases} \sum a_i \cdot y_i^2 = J_{t_0} \\ \sum a_i = A \end{cases}$ $\Rightarrow$

$J_t = J_{t_0} + A \cdot d^2$ come volevasi dimostrare

MOMENTO D'INERZIA POLARE: è la somma dei prodotti della aree infinitesime (a_i) per i quadrati delle distanze (d_i^2) dal punto dato.

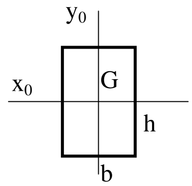
$$J_P = \sum a_i \cdot z_i^2 = a_1 \cdot z_1^2 + a_2 \cdot z_2^2 + ...+ a_n \cdot z_n^2$$

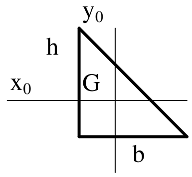
Si dimostra che $J_P = J_r + J_t$ dove r e t sono due assi perpendicolari che si intersecano nel punto P.

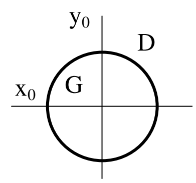
RAGGIO D'INERZIA: è la distanza dalla retta fino ad un punto in cui si dovrebbe concentrare tutta l'area della figura per ottenere lo stesso valore del momento d'inerzia.

$$\rho = \sqrt{\frac{J}{A}}$$

MOMENTI D'INERZIA DI FIGURE ELEMENTARI RISPETTO AD ASSI BARICENTRICI.







$$Jx_0 = \frac{b \cdot h^3}{12} \qquad Jx_0 = \frac{b \cdot h^3}{36} \qquad Jx_0 = Jy_0 = \frac{\pi \cdot D^4}{64}$$

$$Jy_0 = \frac{h \cdot b^3}{12} \qquad Jy_0 = \frac{h \cdot b^3}{36} \qquad J_G = Jx_0 + Jy_0 = \frac{\pi \cdot D^4}{32}$$

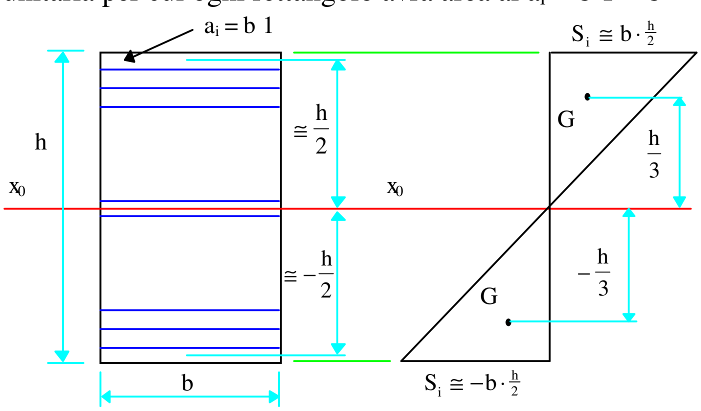
STRATEGIA DI SOLUZIONE per il calcolo dei momenti d'inerzia di figure complesse:

1) si divide la figura in figure elementari di cui sono noti i momenti d'inerzia rispetto ad assi baricentrici, perché i momenti d'inerzia possono essere sommati o sottratti, purché siano calcolati rispetto allo stesso asse;
2) di ogni figura elementare si calcola il momento d'inerzia rispetto alla retta assegnata utilizzando, se necessario, il teorema di trasposizione;
3) si calcola la somma algebrica dei momenti d'inerzia delle figure elementari.

<u>Il momento d'inerzia di un rettangolo rispetto all'asse baricentrico parallelo al lato b vale</u> $\frac{b \cdot h^3}{12}$

DIMOSTRAZIONE:

suddividiamo il rettangolo in tante strisce piccolissime di area infinitesima di larghezza b e altezza unitaria per cui ogni rettangolo avrà area ai $a_i = b\ 1 = b$



Il momento d'inerzia può essere pensato come il momento statico di un momento statico, infatti:

$$J_{x_0} = \sum a_i \cdot y_i^2 = \sum (a_i \cdot y_i) \cdot y_i = \sum (S_i) \cdot y_i$$

dove S_i è il momento statico della strisciolina i-esima rispetto all'asse baricentrico; tali momenti statici sono massimi per le striscioline più distanti dall'asse neutro, mentre per le altre striscioline va diminuendo (perché diminuisce la distanza dall'asse neutro) fino ad annullarsi per la strisciolina posta sull'asse neutro in quanto è nulla la distanza dall'asse baricentrico.

Il momento statico delle striscioline è rappresentato dalle aree dei due triangoli, per cui si ha:

per il triangolo superiore $\quad S_{ts} = \frac{b \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{2}}{2} = \frac{b \cdot h^2}{8}$

per il triangolo inferiore $\quad S_{ti} = \frac{-b \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{2}}{2} = -\frac{b \cdot h^2}{8}$

I momenti statici di queste due aree rappresentano il momento statico del momento statico e cioè il momento d'inerzia:

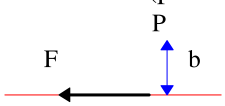
$$J_{x_0} = S_{t_s} \cdot \frac{h}{3} + S_{t_i} \cdot \left(-\frac{h}{3}\right) = \frac{b \cdot h^2}{8} \cdot \frac{h}{3} + \left(-\frac{b \cdot h^2}{8}\right) \cdot \left(-\frac{h}{3}\right) = \frac{b \cdot h^3}{24} + \frac{b \cdot h^3}{24} = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

STATICA DEL CORPO RIGIDO

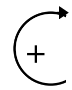
MOMENTO DI UNA FORZA rispetto ad un punto: è un vettore il cui modulo è dato dal prodotto dell'intensità della forza per la sua distanza (braccio) dal punto. Il BRACCIO è inteso come distanza dal punto alla linea d'azione della forza e NON al punto di applicazione della forza.

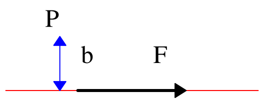
$$\text{Momento} = \text{forza} \times \text{braccio} \qquad M = F \cdot b \ \ (N \cdot m)$$

L'effetto di un momento di una forza è sempre quello di produrre una rotazione attorno al punto di riferimento (polo dei momenti).

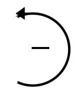


rotazione oraria $\Rightarrow$ momento positivo $M = F \cdot b$





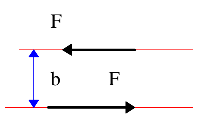
rotazione antioraria $\Rightarrow$ momento negativo $M = -(F \cdot b)$



MOMENTO DI UN SISTEMA DI FORZE rispetto ad un punto: è la somma algebrica dei momenti delle singole forze calcolati rispetto allo stesso punto.

COPPIA: sistema di due forze complanari, parallele, di uguale intensità e di verso opposto.

MOMENTO DI UNA COPPIA: prodotto dell'intensità di una delle due forze per la distanza tra le forze.
Il momento di una coppia è costante qualunque sia il punto considerato.



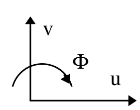
$M = F \cdot b$ <u>COSTANTE</u> per qualsiasi punto del piano

TEOREMA DI VARIGNON: in un sistema di forze complanari il momento della risultante rispetto ad un punto è uguale alla somma algebrica dei momenti delle singole forze rispetto allo stesso punto.

$$R \cdot b = F_1 \cdot b_1 + F_2 \cdot b_2 + \cdots\cdots + F_n \cdot b_n$$
$$R \cdot b = \sum F_i \cdot b_i$$

CORPO RIGIDO: corpo ideale assolutamente indeformabile, cioè la distanza tra due suoi punti qualsiasi è sempre uguale.
Un corpo che si muove in un piano ha tre possibilità di movimento o tre gradi di libertà:

- u traslazione orizzontale
- v traslazione verticale
- ϕ rotazione nel piano



CONDIZIONI DI EQUILIBRIO: un corpo è in equilibrio se il sistema di forze cui è sottoposto ha risultante nulla e momento nullo rispetto ad un punto qualsiasi del piano.

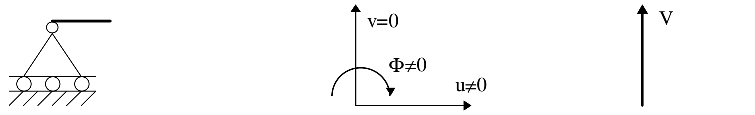
$$R = 0 \qquad M = 0 \ \Rightarrow \text{ il corpo è in equilibrio.}$$

VINCOLO: qualunque collegamento esterno adatto ad impedire i vari movimenti di un corpo.

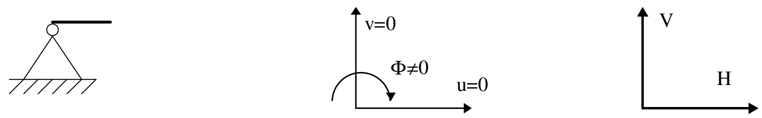
REAZIONE VINCOLARE: forza esercitata dal vincolo per impedire i movimenti del corpo rigido.

tipo di vincolo — rappres. grafica — MOVIMENTI — REAZIONI VINCOLARI

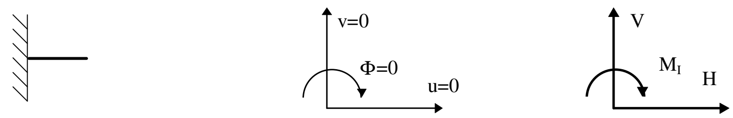
CERNIERA SCORREVOLE
(vincolo semplice)



CERNIERA FISSA
(vincolo doppio)



INCASTRO
(vincolo triplo)



H	reazione vincolare orizzontale
V	reazione vincolare verticale
M_I	reazione vincolare di momento

Ogni vincolo esplica tante reazioni quanti sono i movimenti che impedisce ed ogni reazione ha la direzione del movimento impedito.

STRUTTURA ISOSTATICA: quando il numero di vincoli è strettamente necessario per garantirne l'equilibrio o per impedirne qualsiasi movimento.

EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA: sono tre equazioni di equilibrio che ci permettono di calcolare le reazione vincolari in strutture isostatiche.

$\sum F_{ix} = 0 \Rightarrow F_{1x} + F_{2x} + \cdots\cdots\cdots + F_{nx} + H = 0$ equilibrio alla traslazione orizzontale

$\sum F_{iy} = 0 \Rightarrow F_{1y} + F_{2y} + \cdots\cdots\cdots + F_{ny} + V = 0$ equilibrio alla traslazione verticale

$\sum F_i \cdot b_i = 0 \Rightarrow F_1 \cdot b_1 + F_2 \cdot b_2 + \cdots + F_n \cdot b_n + M_I = 0$ equilibrio alla rotazione rispetto ad un punto qualsiasi del piano

CALCOLO REAZIONI VINCOLARI: strategia di risoluzione.

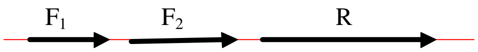
1) Si scompongono eventuali forze inclinate secondo le direzioni perpendicolare e parallela (o coincidente) all'asse della struttura.
2) Si segnano le reazioni vincolari (incognite del problema) che i vincoli possono esplicare assegnandogli un verso arbitrario.
3) Si scrivono e si risolvono le tre equazioni cardinali della statica tenendo conto sia delle forze esterne che delle reazioni vincolari, da cui si calcolano le reazioni vincolari incognite.
4) Se le reazioni vincolari risultano positive vuol dire che i versi scelti arbitrariamente sono esatti, se qualcuna delle reazioni vincolari risulta negativa vuol dire che il verso scelto arbitrariamente è errato, quindi bisogna cambiargli il verso.

L'INSIEME DELLE FORZE ESTERNE APPLICATE ALLA STRUTTURA E DELLE REAZIONI VINCOLARI COSTITUISCONO UN SISTEMA DI FORZE AVENTE R = 0, M = 0 (CIOÈ EQUILIBRATO), QUINDI LA STRUTTURA È IN EQUILIBRIO.

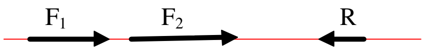
STATICA - Esercizi

ESERCIZI SULLA COMPOSIZIONE DELLE FORZE

Determinare la somma e la differenza delle forze $F_1 = 2000$ N ed $F_2 = 3000$ N aventi stessa linea d'azione orizzontale.



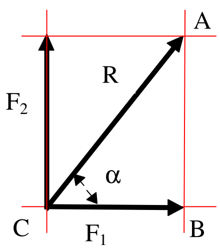
$$R = F_1 + F_2 = 5000N$$



$R = F_1 - F_2 = 1000N$ con verso opposto a quello di F_2

Determinare la risultante delle forze ortogonali incidenti rappresentate in figura:

si compongono con la regola del parallelogramma



$F_1 = 1000$ N

$F_2 = 1300$ N

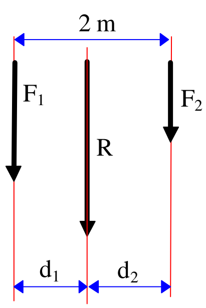
Dal triangolo rettangolo ABC si calcola

$$R = \sqrt{\overline{BC}^2 + \overline{AB}^2} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{1000^2 + 1300^2} = 16400N$$

$$tg\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{F_2}{F_1} = \frac{1300}{1000} = 1{,}3$$

$$\alpha = arctg(1{,}3) = 52{,}43°$$

Determinare la risultante delle forze parallele e concordi rappresentate in figura:



$$\left.\begin{matrix} F_1 = 2000N \\ F_2 = 1600N \end{matrix}\right\} \Rightarrow R = F_1 + F_2 = 2000 + 1600 = 3600N$$

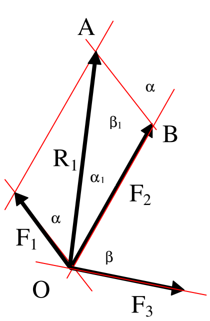
$F_1 : F_2 = d_2 : d_1$

$(F_1 + F_2) : F_2 = (d_2 + d_1) : d_1$

ma $F_1 + F_2 = R$ e $d_2 + d_1 = 2$ m $\Rightarrow$

$$R : F_2 = 2 : d_1 \Rightarrow \begin{matrix} d_1 = \frac{2F_2}{R} = \frac{2x1600}{3600} = 0{,}888m \\ d_2 = 2 - d_1 = 2 - 0{,}888 = 1{,}112m \end{matrix}$$

Calcolare la risultante del sistema di forze incidenti rappresentate in figura:



$F_1 = 2000$ N, $F_2 = 3000$ N, $F_3 = 2500$ N, $\alpha = 68°$, $\beta = 75°$

Si calcola la risultante di F_1 ed F_2 : (triangolo OAB)

$$R_1 = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha} = \sqrt{2000^2 + 3000^2 + 2 \times 2000 \times 3000\cos 68°} = 4182{,}73N$$

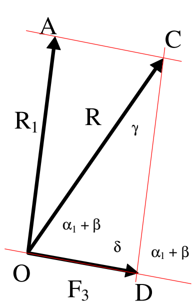
$$\beta_1 = 180° - \alpha = 180° - 68° = 112°$$

$$\frac{R_1}{\sin\beta_1} = \frac{F_1}{\sin\alpha_1} \Rightarrow \sin\alpha_1 = \frac{F_1 \cdot \sin\beta_1}{R_1} = \frac{2000 \times \sin 112°}{4182{,}73} = 0{,}4433$$

$$\alpha_1 = \arcsin\left(\sin\alpha_1\right) = \arcsin\left(0{,}4433\right) = 26{,}31°$$

Si calcola la risultante di R_1 ed F_3 : (triangolo OCD)

l'angolo fra R_1 ed F_3 vale $(\alpha_1 + \beta) = 26{,}31° + 75° = 101{,}31°$



$$R = \sqrt{R_1^2 + F_3^2 + 2R_1F_3\cos(\alpha_1 + \beta)} = \sqrt{4182{,}73^2 + 2500^2 + 2 \times 4182{,}73 \times 2500\cos 101{,}31°} = 4431{,}83N$$

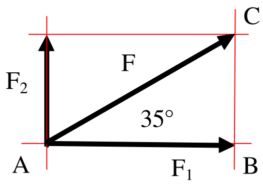
$$\delta = 180° - \left(\alpha_1 + \beta\right) = 180° - 101{,}31° = 78{,}69°$$

$$\frac{F_3}{\sin\gamma} = \frac{R}{\sin\delta} \Rightarrow \sin\gamma = \frac{F_3 \cdot \sin\delta}{R} = \frac{2500 \times \sin 78{,}69°}{4431{,}83} = 0{,}5531$$

$$\gamma = \arcsin\left(\sin\gamma\right) = \arcsin\left(0{,}5531\right) = 33{,}58°$$

ESERCIZI SULLA SCOMPOSIZIONE DELLE FORZE

Determinare le componenti della forza F = 5000 N in figura, secondo le direzioni assegnate:

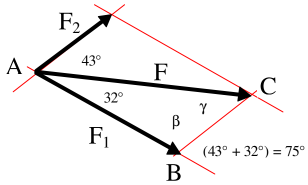


Dal triangolo rettangolo ABC si calcola:

F_1 = F cos 35°= 5000 x 0,819 = 4095,7 N

F_2 = F sin 35°= 5000 x 0,573 = 2867,8 N

Determinare le componenti della forza F = 5000 N in figura, secondo le direzioni assegnate:



si calcolano:

$\gamma = 43°$ perché angoli alterni interni

$\beta = 180° - (32° + 43°) = 105°$

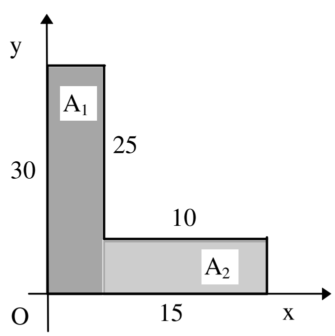
Dal teorema dei seni applicato al triangolo ABC

$$\frac{F}{\sin\beta} = \frac{F_1}{\sin\gamma} \Rightarrow F_1 = \frac{F\cdot\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{5000\times\sin 43°}{\sin 105°} = 3530{,}28\text{N}$$

$$\frac{F}{\sin\beta} = \frac{F_2}{\sin 32°} \Rightarrow F_2 = \frac{F\cdot\sin 32°}{\sin\beta} = \frac{5000\times\sin 32°}{\sin 105°} = 2743{,}06\text{N}$$

ESERCIZI SUI BARICENTRI

Calcolare il baricentro della sezione a L rappresentata in figura (misure espresse in centimetri). Calcolare il baricentro di una figura complessa vuol dire calcolare le coordinate del baricentro rispetto ad un sistema di riferimento scelto arbitrariamente.

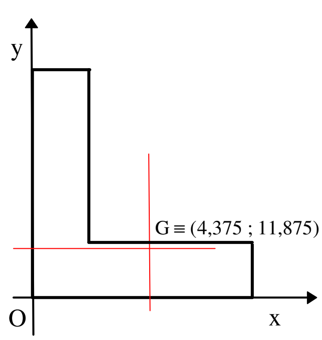


Si sceglie arbitrariamente il sistema di riferimento segnato in figura. Si suddivide la figura nei due rettangoli (30 x 5) e (10 x 5) e si calcolano le aree e le coordinate dei loro baricentri rispetto al sistema di riferimento scelto.

$A_1 = 30 \times 5 = 150\ cm^2$ $\qquad G_1 \equiv (2{,}5\ ;\ 15)$

$A_2 = 10 \times 5 = 50\ cm^2$ $\qquad G_2 \equiv (10\ ;\ 2{,}5)$

Si calcolano le coordinate del baricentro della figura complessa con le formule $x_G = \frac{S_y}{\sum A_i}$; $y_G = \frac{S_x}{\sum A_i}$ essendo S_y e S_x i momenti statici delle figure elementari rispetto agli assi y ed x.

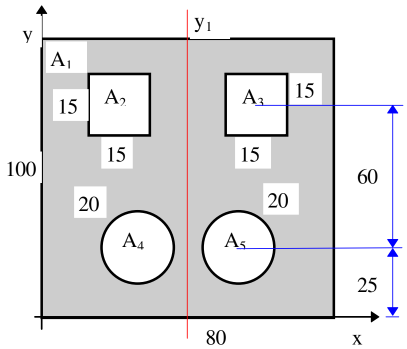


$$x_G = \frac{S_y}{\sum A_i} = \frac{A_1\cdot x_{G1} + A_2\cdot x_{G2}}{A_1 + A_2} = \frac{150\cdot 2{,}5 + 50\cdot 10}{150 + 50} = 4{,}375\ \text{cm}$$

$$y_G = \frac{S_x}{\sum A_i} = \frac{A_1\cdot y_{G1} + A_2\cdot y_{G2}}{A_1 + A_2} = \frac{150\cdot 15 + 50\cdot 2{,}5}{150 + 50} = 11{,}875\ \text{cm}$$

G ≡ (4,375 ; 11,875)

Calcolare il baricentro della piastra forata rappresentata in figura (misure espresse in centimetri).



Si sceglie arbitrariamente il sistema di riferimento in figura.
Si suddivide la figura nel rettangolo (100 x 80), nei quadrati (di lato 15 cm), nei cerchi di diametro 20 cm e si calcolano le aree e le coordinate dei loro baricentri rispetto al sistema di riferimento scelto.

$A_1 = 100 \times 80 = 8000\ cm^2$ $\qquad G_1 \equiv (40\ ;\ 50)$

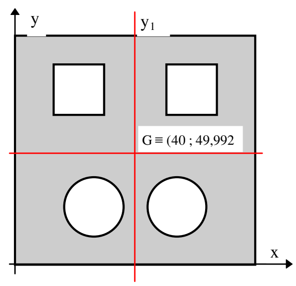
$A_2 = A_3 = 15 \times 15 = 225\ cm^2$ $\qquad G_2 \equiv (23\ ;\ 85)$

$G_3 \equiv (57\ ;\ 85)$

$A_4 = A_5 = 3{,}14 \times 10^2 = 314\ cm^2$ $\qquad G_4 \equiv (27\ ;\ 25)$

$G_5 \equiv (53\ ;\ 25)$

Si calcolano le coordinate del baricentro della figura complessa. Poiché la retta y_1 = 40 cm è un asse di simmetria per la figura, ciò vuol dire che il baricentro della figura è un punto di tale retta, per cui la coordinata x del baricentro vale x_G = 40 cm. Quindi rimane da determinare la coordinata y_G.



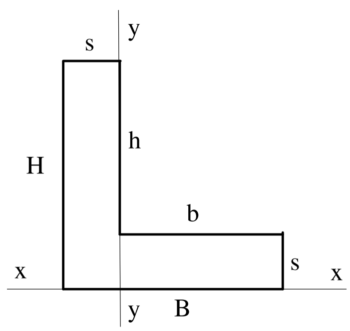
$$y_G = \frac{S_x}{\sum A_i} = \frac{A_1 \cdot y_{G1} - A_2 \cdot y_{G2} - A_3 \cdot y_{G3} - A_4 \cdot y_{G4} - A_5 \cdot y_{G5}}{A_1 - A_2 - A_3 - A_4 - A_5} =$$

$$= \frac{8000 \cdot 50 - 225 \cdot 85 - 225 \cdot 85 - 314 \cdot 25 - 314 \cdot 25}{8000 - 225 - 225 - 314 - 314} = 49{,}992\ cm$$

$$G \equiv (40\ ;\ 49{,}992)$$

ESERCIZI SUI MOMENTI D'INERZIA

Calcolare i momenti d'inerzia assiali della sezione a L rappresentata in figura rispetto agli assi x e y.

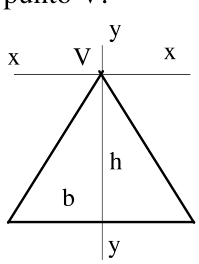


Si suddivide la figura nei due rettangoli (H x s) e (b x s), si calcolano i momenti d'inerzia dei singoli rettangoli rispetto allo stesso asse (asse passante per la base) e poi se ne calcola la somma.

$$Jx = \frac{s\,H^3}{3} + \frac{b\,s^3}{3}$$

$$Jy = \frac{H\,s^3}{3} + \frac{s\,b^3}{3}$$

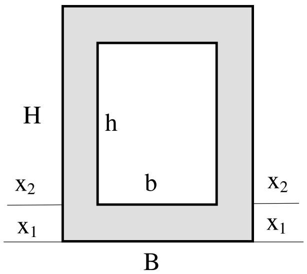
Calcolare il momento d'inerzia polare della sezione triangolare rappresentata in figura rispetto al punto V.



$$J_V = Jx + Jy$$

$$\left.\begin{array}{l} Jx = \dfrac{b\,h^3}{36} + \dfrac{b\,h}{2}\left(\dfrac{2\,h}{3}\right)^2 = \dfrac{b\,h^3}{4} \\ Jy = \dfrac{h\left(\dfrac{b}{2}\right)^3}{12} + \dfrac{h\left(\dfrac{b}{2}\right)^3}{12} = \dfrac{h\,b^3}{48} \end{array}\right\} \Rightarrow J_V = \frac{b\,h^3}{4} + \frac{h\,b^3}{48}$$

Calcolare i momenti d'inerzia assiali della sezione rettangolare cava rappresentata in figura.

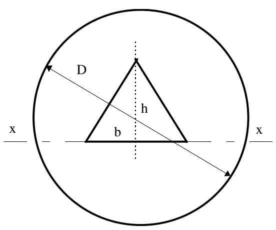


Si suddivide la figura nei due rettangoli (B x H) e (b x h), si calcolano i momenti d'inerzia dei singoli rettangoli rispetto allo stesso asse e poi se ne calcola la differenza.

$$Jx_1 = \frac{B\,H^3}{3} - \left[\frac{b\,h^3}{12} + b\,h\left(\frac{H}{2}\right)^2\right]$$

$$Jx_2 = \frac{B\,H^3}{12} + B\,H\left(\frac{h}{2}\right)^2 - \frac{b\,h^3}{3}$$

Calcolare il momento d'inerzia assiale della piastra circolare con un foro triangolare rispetto all'asse passante per la base del triangolo (i baricentri del cerchio e del triangolo coincidono).

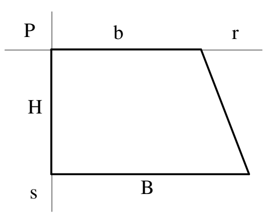


Si suddivide la figura in un cerchio e in un triangolo, si calcolano i momenti d'inerzia delle singole figure rispetto allo stesso asse e poi se ne calcola la differenza.

$$Jx = \frac{\pi D^4}{64} + \frac{\pi D^2}{4}\left(\frac{h}{3}\right)^2 - \frac{b\,h^3}{12}$$

Calcolare il momento d'inerzia polare del trapezio in figura rispetto al punto P.

Si divide la figura in un rettangolo e in un triangolo e si procede come segue:



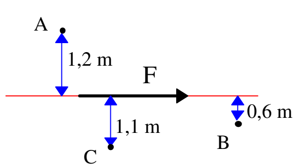
$$J_P = Jr + Js \quad \text{con}$$

$$Jr = \frac{b\,H^3}{3} + \frac{(B-b)\,H^3}{36} + \frac{(B-b)\,H}{2}\left(\frac{2\,H}{3}\right)^2$$

$$Js = \frac{H\,b^3}{3} + \frac{H\,(B-b)^3}{36} + \frac{(B-b)\,H}{2}\left(b + \frac{B - b}{3}\right)^2$$

ESERCIZI SUI MOMENTI

1) Calcolare il momento della forza F = 2000 N rispetto ai punti A, B, C segnati in figura:

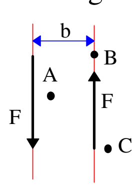


$$M_A = -(F \cdot b) = -(2000 \times 1{,}2) = -2400\ N \cdot m$$

$$M_B = (F \cdot b) = (2000 \times 0{,}6) = 1200\ N \cdot m$$

$$M_C = (F \cdot b) = (2000 \times 1{,}1) = 2100\ N \cdot m$$

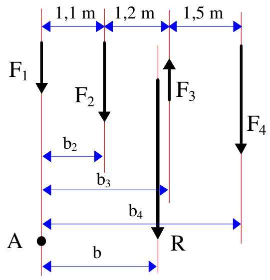
2) Calcolare il momento di una coppia avente F = 1500 N e braccio b = 2,5 m rispetto ai punti A, B, C segnati in figura:



Poiché il momento di una coppia di forze è costante qualunque sia il punto rispetto a cui si calcola si ha:

$M_A = M_B = M_C = -(F \cdot b) = -(1500 \times 2{,}5) = -3750\ N \cdot m$ negativo perché ha senso di rotazione antiorario

3) Calcolare la risultante del sistema di forze F1 = 1000 N, F2 = 2000 N, F3 = 500 N, F4 = 3000 N parallele, rappresentato in figura, applicando il teorema di Varignon.



Della risultante da calcolare sono noti l'intensità

$$R = F_1 + F_2 - F_3 + F_4 = 1000 + 2000 - 500 + 3000 = 5500N$$

il verso (dall'alto in basso) e la direzione che è parallela alle direzioni delle forze componenti, ma non conosco per quale punto passa; applico il teorema di Varignon calcolando i momenti rispetto ad un punto A scelto arbitrariamente:

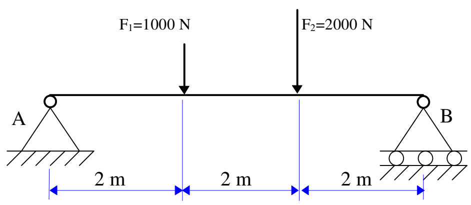
$$R \cdot b = F_1 \cdot b_1 + F_2 \cdot b_2 - F_3 \cdot b_3 + F_4 \cdot b_4$$

dove l'incognita è il braccio b della risultante

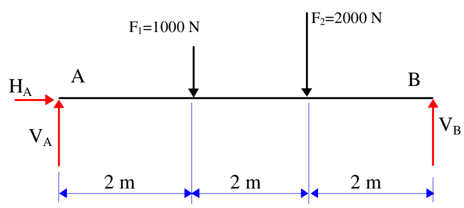
$$b = \frac{F_1 \cdot b_1 + F_2 \cdot b_2 - F_3 \cdot b_3 + F_4 \cdot b_4}{R} = \frac{1000 \times 0 + 2000 \times 1{,}1 - 500 \times 2{,}3 + 3000 \times 3{,}8}{5500} = 2{,}26 \text{ m}$$

ESERCIZI SULLE REAZIONI VINCOLARI

1) Calcolare le reazioni vincolari della struttura isostatica in figura:



Si tolgono i vincoli che vengono sostituiti dalle reazioni che possono esplicare (ricorda che ogni vincolo esplica tante reazioni quanti sono i movimenti che impedisce).



le incognite del problema sono H_A, V_A, V_B

Si scrive e si risolve l'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale, cioè si fa la somma algebrica delle forze orizzontali applicate alla struttura (forze esterne e reazioni vincolari) assumendo come verso positivo un verso arbitrario e si uguaglia a zero.

$$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0 \;;\quad H_A = 0$$

Si scrive e si risolve l'equazione di equilibrio alla rotazione (si fa la somma algebrica dei momenti di tutte le forze comprese le reazioni vincolari assumendo come positivi i momenti orari) rispetto ad un punto qualsiasi del piano che conviene scegliere in uno dei vincoli per rendere nullo il momento di una delle incognite.

$$+ \sum F_i \cdot b_i = 0 \qquad \text{scegliendo il punto A} \qquad \sum M_A = 0$$

$$H_A \times 0 + V_A \times 0 + F_1 \times 2 + F_2 \times 4 - V_B \times 6 = 0$$

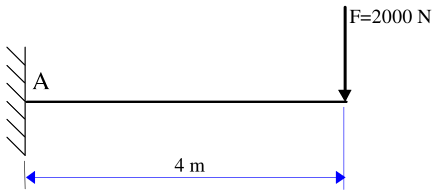
$$1000 \times 2 + 2000 \times 4 - V_B \times 6 = 0 \quad \Rightarrow V_B = \frac{10000}{6} = 1666{,}7 \text{ N}$$

Si scrive e si risolve l'equazione di equilibrio alla traslazione verticale, cioè si fa la somma algebrica di tutte le forze verticali applicate alla struttura (forze esterne e reazioni vincolari) e si uguaglia a zero.

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \;;\quad V_A - F_1 - F_2 + V_B = 0 \;;\quad V_A - 1000 - 2000 + 1666{,}7 = 0 \;;$$

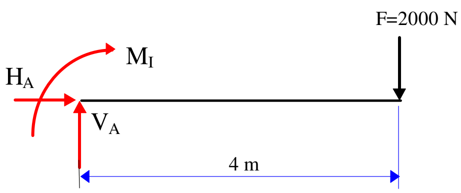
$$V_A = 1000 + 2000 - 1666{,}7 = 1333{,}3 \text{ N}$$

2) Calcolare le reazioni vincolari della struttura isostatica in figura:



Si tolgono i vincoli che vengono sostituiti dalle reazioni che possono esplicare (ricorda che ogni vincolo esplica tante reazioni quanti sono i movimenti che impedisce).

Le incognite del problema sono H_A, V_A, M_I



$\xrightarrow{+} \sum F_{ix} = 0 ; \quad H_A = 0$

$+ \curvearrowright \sum M_A = 0$

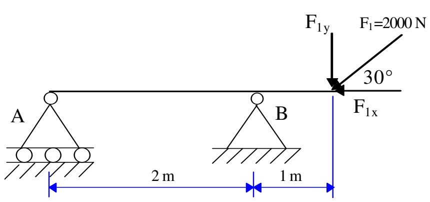
$H_A \times 0 + V_A \times 0 + M_I + F \times 4 = 0$

$M_I + 2000 \times 4 = 0 ; M_I = - 11000 \text{ N·m}$

Poiché il risultato è negativo, ciò vuol dire che il verso scelto per la reazione M_I è errato quindi bisogna cambiarlo

$+\uparrow \sum F_y = 0 ; \quad V_A - F = 0 ; V_A - 2000 = 0 ; V_A = 2000 \text{ N}$

3) Calcolare le reazioni vincolari della struttura isostatica in figura:

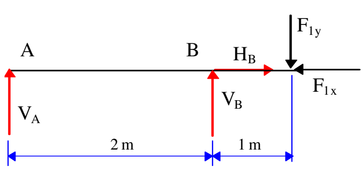


Si scompone la forza inclinata nelle sue due componenti perpendicolare e parallela all'asse della struttura:

$F_{1x} = F_1 \cos 30° = 2000 \times \cos 30° = 1732 \text{ N}$

$F_{1y} = F_1 \sin 30° = 2000 \times \sin 30° = 1000 \text{ N}$

Si tolgono i vincoli che vengono sostituiti dalle reazioni che possono esplicare.
Le incognite del problema sono V_A, H_B, V_B



$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0 ; \quad H_B - F_{1x} = 0 ; \quad H_B - 1732 = 0 ; H_B = 1732 \text{ N}$

$+ \curvearrowright \sum M_B = 0$

$V_A \times 2 + H_B \times 0 + V_B \times 0 + F_{1x} \times 0 + F_{1y} \times 1 = 0$

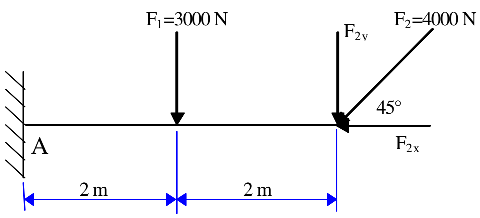
$V_A \times 2 + 1732 \times 1 = 0 \qquad \Rightarrow V_A = \frac{-1732 \times 1}{2} = -866 \text{ N}$

poiché il risultato è negativo, ciò vuol dire che il verso scelto per la reazione V_A è errato quindi bisogna cambiarlo

$+\uparrow \sum F_y = 0 ; V_A + V_B - F_{1y} = 0$

$866 + V_B - 1732 = 0 ; \quad V_B = 1732 - 866 = 866 \text{ N}$

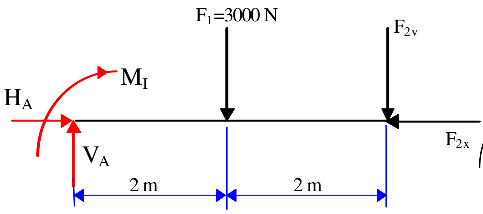
4) Calcolare le reazioni vincolari della struttura isostatica in figura:



Si scompone la forza inclinata nelle sue due componenti perpendicolare e parallela all'asse della struttura:

$F_{2x} = F_2 \cos 45° = 4000 \text{ x } \cos 45° = 2828$ N
$F_{2y} = F_2 \sin 45° = 4000 \text{ x } \sin 45° = 2828$ N

Si tolgono i vincoli che vengono sostituiti dalle reazioni che possono esplicare.



Le incognite del problema sono H_A, V_A, M_I

$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0$; $H_A - F_{2x} = 0$

$H_A - 2828 = 0$; $H_A = 2828$ N

$+ \sum M_A = 0$

$H_A \text{ x } 0 + V_A \text{ x } 0 + M_I + F_1 \text{ x } 2 + F_{2y} \text{ x } 4 + F_{2x} \text{ x } 0 =$
0

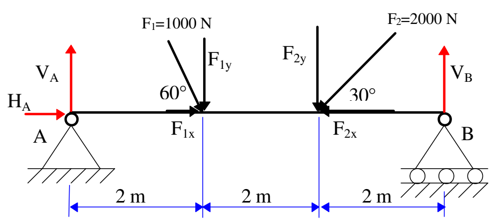
$M_I = - 3000 \text{ x } 2 - 2828 \text{ x } 4 = -17312$ N m

poiché il risultato è negativo, ciò vuol dire cheil verso scelto per la reazione M_I è errato quindi bisogna cambiarlo

$+\uparrow \qquad \sum F_{iy} = 0$

$V_A - F_1 - F_{2x} = 0$; $V_A - 3000 - 2828 = 0$; $V_A = 5828$ N

5) Calcolare le reazioni vincolari della struttura isostatica in figura:



le incognite del problema sono H_A, V_A, V_B

$F_{1x} = F_1 \cos 60° = 1000 \times \cos 60° = 500$ N
$F_{1y} = F_1 \sin 60° = 1000 \times \sin 60° = 866$ N
$F_{2x} = F_2 \cos 30° = 2000 \times \cos 30° = 1732$ N
$F_{2y} = F_2 \sin 30° = 2000 \times \sin 30° = 1000$ N

Si scrive e si risolve l'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale, cioè si fa la somma algebrica delle forze orizzontali applicate alla struttura (forze esterne e reazioni vincolari) e si uguaglia a zero.

$$\sum F_{ix} = 0 ; \quad H_A + F_{1x} - F_{2x} = 0 ; H_A + 500 - 1732 = 0 ; \quad H_A = 1232 \text{ N}$$

Si scrive e si risolve l'equazione di equilibrio alla rotazione rispetto ad un punto qualsiasi del piano che conviene scegliere in uno dei vincoli per rendere nullo il momento di una delle incognite.

$$\sum F_i \cdot b_i = 0 \qquad \text{scegliendo il punto A} \qquad \sum M_A = 0$$

$$H_A \times 0 + V_A \times 0 + F_{1x} \times 0 + F_{1y} \times 2 + F_{2y} \times 4 + F_{2x} \times 0 - V_B \times 6 = 0$$

$$866 \times 2 + 1000 \times 4 - V_B \times 6 = 0 \qquad \Rightarrow V_B = \tfrac{866 \times 2 + 1000 \times 4}{6} = 955{,}33\text{N}$$

Si scrive e si risolve l'equazione di equilibrio alla traslazione verticale, cioè si fa la somma algebrica di tutte le forze verticali applicate alla struttura (forze esterne e reazioni vincolari) e si uguaglia a zero.

$$\sum F_{iy} = 0 ; \quad V_A - F_{1y} - F_{2y} + V_B = 0 ; \qquad V_A - 866 - 1000 + 955{,}33 = 0 ;$$

$$V_A = 866 + 1000 - 955{,}33 = 910{,}67 \text{ N}$$