

# DOMANDE DI TEORIA

## 1. Il primo principio della Termodinamica e le sue conseguenze.

Il primo principio della termodinamica può essere formulato in due diversi modi:

- Per tutti i processi adiabatici che avvengono tra due specificati stati di un sistema termodinamico chiuso, il lavoro netto scambiato col sistema è lo stesso considerando la natura del processo e la natura del sistema
- Qualunque coppia di stati  $A_1$  e  $A_2$  di un sistema  $A$  può essere interconnessa mediante un processo meccanico e indicando con  $(z_2 - z_1)$  la variazione di quota prodotta da questo processo di un grave di massa  $m$  immerso in un campo gravitazionale di accelerazione costante  $g$ , il prodotto  $mg(z_2 - z_1)$  assume lo stesso valore per tutti i processi meccanici che interconnettono i due stati  $A_1$  e  $A_2$ .

La principale conseguenza del primo principio della termodinamica è il principio di conservazione dell'energia secondo cui l'energia non si crea né si distrugge ma si trasforma soltanto. L'energia risulta dunque essere una proprietà dello stato termodinamico che può essere misurata se è noto un valore di riferimento  $E_0$ :  $E_1 = E_0 - mg(z_1 - z_0)$

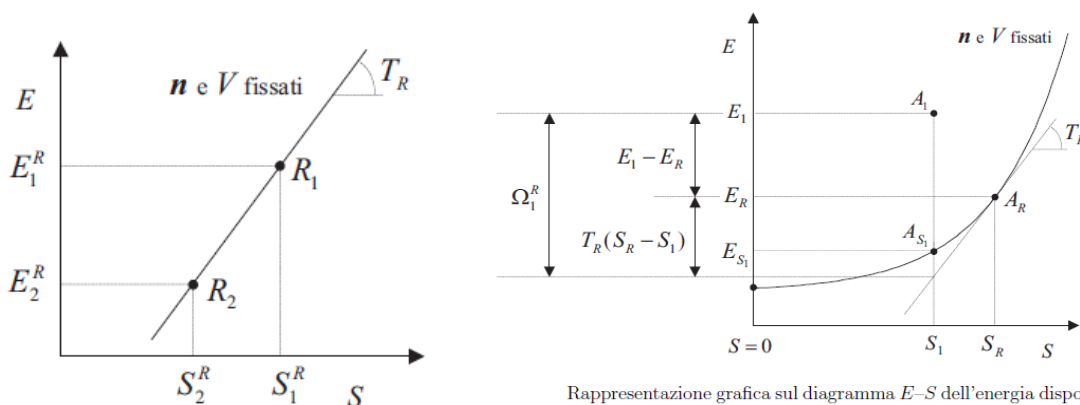
## 2. Il secondo principio della Termodinamica e le sue conseguenze.

Il secondo principio della termodinamica afferma che è sempre possibile, mediante un processo meccanico reversibile, raggiungere uno stato di equilibrio stabili con valori arbitrariamente fissati di energia, quantità di costituenti e parametri. Le conseguenze del secondo principio sono 4:

- Enunciato di Kelvin-Planck = partendo da uno stato di equilibrio stabile non è possibile estrarre energia meccanica senza lasciare tracce nell'ambiente
- Negli stati di equilibrio instabile esiste una certa quantità di energia, nota come disponibilità adiabatica, che può essere trasferita ad un grave mediante un processo meccanico
- La quantità di energia inutile presente in uno stato di equilibrio instabile è detta entropia
- È sempre possibile stabilire il verso in cui può avvenire un processo meccanico tra due stati

## 3. Definizione di disponibilità adiabatica e di energia disponibile rispetto ad un serbatoio, schematizzazione su diagramma U-S.

Si definisce disponibilità adiabatica la massima quantità di energia che può essere trasferita ad un grave mediante un processo meccanico reversibile partendo da uno stato di equilibrio instabile. Si definisce invece energia disponibile rispetto ad un serbatoio la massima quantità di energia che può essere trasferita ad un grave, in un processo meccanico per il sistema composto AR, senza modificare i valori della quantità di costituenti e parametri del sistema  $A$  e del serbatoio  $R$ .



Rappresentazione grafica sul diagramma  $E-S$  dell'energia disponibile dello stato  $A_1$  rispetto ad un serbatoio  $R$  a temperatura  $T_R$ .

## 4. Definizione di entropia.

Si definisce entropia la massima quantità di energia che non può essere trasferita ad un grave mediante un processo meccanico. L'entropia gode di alcune proprietà:

- Additività = considerati due sistemi diversi tra loro  $A$  e  $B$  e il sistema composto  $C$ , formato dall'insieme dei due sistemi, si ha che l'entropia di  $C$  è uguale alla somma dell'entropia di  $A$  e quella di  $B$
- Principio di non decrescita = afferma che l'entropia può solo aumentare. Tale principio fissa il verso in è possibile che avvenga un processo meccanico

$$\begin{array}{lll}
 S_2 > S_1 & (S_{irr})_{12} = 0 & \text{processo irreversibile} \\
 S_2 = S_1 & (S_{irr})_{12} > 0 & \text{processo reversibile}
 \end{array}$$

## 5. I principi della massima entropia e della minima energia.

Il principio della massima entropia afferma che tra tutti gli stati termodinamici con fissati i valori di quantità di costituenti, parametri ed energia, quello di equilibrio stabile è quello con la massima entropia possibile. Il principio della minima energia invece afferma che tra tutti gli stati termodinamici con fissati i valori di quantità di costituenti, parametri ed entropia, quello di equilibrio stabile è quello con la minima energia possibile.

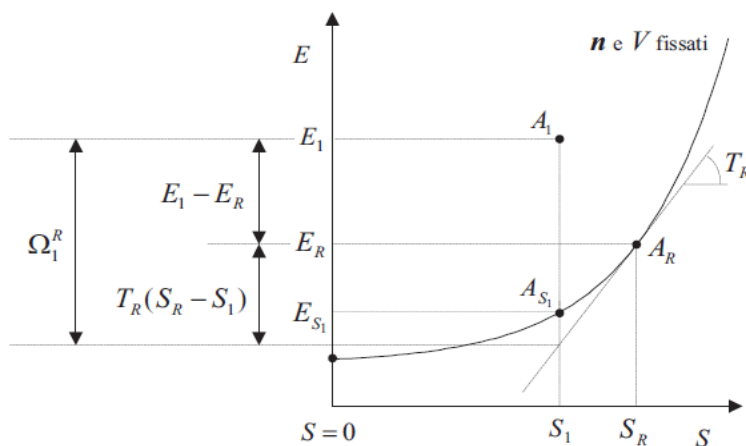
## 6. Il principio di stato e la relazione fondamentale (forma energetica ed entropica) per un sistema termodinamico.

Il principio di stato afferma che tra gli stati con gli valori di energia, quantità di costituenti e parametri, uno e uno solo è di equilibrio stabile, per la seconda legge della termodinamica; perciò il valore di ogni proprietà del sistema in uno stato di equilibrio stabile è univocamente determinato dai valori di energia, quantità di costituenti e parametri. Il principio di stato applicato alla proprietà di entropia fornisce la relazione fondamentale:

Forma entropica:  $S = S(U, n_1, \dots, n_r, \beta_1, \dots, \beta_s)$

Forma energetica:  $U = U(S, n_1, \dots, n_r, \beta_1, \dots, \beta_s)$

## 7. Rappresentazione dello stato termodinamico (equilibrio e non equilibrio) di un sistema su un diagramma U-S, rappresentazione grafica di disponibilità adiabatica o di energia disponibile.



Rappresentazione grafica sul diagramma  $E-S$  dell'energia disponibile dello stato  $A_1$  rispetto ad un serbatoio  $R$  a temperatura  $T_R$ .

## 8. Equazione di Eulero (ipotesi di partenza, significato e/o utilità).

Tutte le variabili che compaiono nella relazione fondamentale sono variabili estensive del sistema. Considerando ora un sistema  $A$  in equilibrio e suddividendolo in  $\lambda$  sottosistemi identici tutti in mutuo equilibrio tra loro, è possibile riscrivere le proprietà della relazione fondamentale come:

$$U_A = \lambda U \quad S_A = \lambda S \quad V_A = \lambda V \quad N_{Ai} = \lambda N_i$$

$$U_A = U(S_A, V_A, N_{Ai}) = \lambda U(S, V, N_i)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_A}{\partial \lambda} &= \left( \frac{\partial U_A}{\partial S_A} \right)_{V_A, N_{Ai}} * \frac{\partial S_A}{\partial \lambda} + \left( \frac{\partial U_A}{\partial V_A} \right)_{S_A, N_{Ai}} * \frac{\partial V_A}{\partial \lambda} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial U_A}{\partial N_{iA}} \right)_{S_A, V_A} * \frac{\partial N_{iA}}{\partial \lambda} = \\ &= T_A S - P_A V + \sum \mu_{iA} N_i = \\ &= TS - PV + \sum \mu_i N_i = U \\ T_A &= \left( \frac{\partial U_A}{\partial S_A} \right)_{V_A, N_{Ai}} = \left[ \frac{\partial(\lambda U)}{\partial(\lambda S)} \right]_{\lambda V, \lambda N_i} = \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_{V, N_i} = T \end{aligned}$$

Tale equazione è nota come equazione di Eulero e permette di esprimere una dipendenza tra le variabili intensive e le variabili estensive del sistema in suo stato di equilibrio.

## 9. Relazione di Gibbs-Duhem (ipotesi, significato e utilità).

Consideriamo un sistema monocomponente. La relazione di Gibbs-Duhem che si ottiene sottraendo alla relazione fondamentale differenziale in forma energetica la relazione di Eulero differenziata permette di descrivere completamente lo stato di un sistema conoscendo solo (n+1) proprietà intensive.

$$dU = TdS - PdV + \sum_{i=1}^n \mu_i dN_i$$

$$U_{di\ Eul} = TS - PV + \sum \mu_i N_i$$

$$dU_{di\ Eul} = TdS + SdT - PdV - VdP + \sum_{i=1}^n \mu_i dN_i + \sum_{i=1}^n N_i d\mu_i$$

$$dU - dU_{di\ Eul} = SdT - VdP + \sum_{i=1}^n N_i d\mu_i = \emptyset$$

## 10. Trasformata di Legendre e sua applicazione per ricavare uno dei potenziali termodinamici (F, H, G).

La relazione fondamentale è espressa in variabili estensive che però non solo facilmente rappresentabili o misurabili, al contrario invece di quelle estensive come temperatura e pressione. Le trasformate di Legendre hanno lo scopo di scrivere la relazione fondamentale in funzione di uno o più variabili intensive. Il problema di voler sostituire una variabile estensiva con una intensiva è equivalente al sostituire la variabile x nella funzione  $y = y(x)$  con la funzione  $dy/dx$ . Applicando la trasformata di Legendre alla relazione fondamentale è possibile ricavare dei potenziali termodinamici:

- Energia libera di Helmholtz (F) = si ottiene applicando la trasformazione di Legendre alla relazione fondamentale in forma energetica, sostituendo l'entropia con la temperatura:

$$U = U(S, V) \quad U = F + \frac{\partial U}{\partial S} S \quad \frac{\partial U}{\partial S} = T \quad F = F(T, V) = U - TS$$

$$dF = dU - TdS - SdT = TdS - PdV - TdS - SdT = -PdV - SdT$$

- Entalpia (H) = si ottiene applicando la trasformazione di Legendre alla relazione fondamentale in forma energetica, sostituendo la pressione con il volume:

$$U = U(S, V) \quad U = H - \frac{\partial U}{\partial V} V \quad -\frac{\partial U}{\partial V} = P \quad H = H(S, P) = U + PV$$

$$dH = TdS - PdV + PdV + VdP = TdS + VdP$$

- Energia libera di Gibbs (G) = si ottiene applicando la trasformazione di Legendre alla relazione fondamentale in forma energetica, sostituendo la pressione con il volume e sostituendo l'entropia con la temperatura:

$$U = U(S, V) \quad U = G - \frac{\partial U}{\partial V} V + \frac{\partial U}{\partial S} S \quad -\frac{\partial U}{\partial V} = P \quad \frac{\partial U}{\partial S} = T \quad G = G(T, P) = H - TS$$

$$dG = TdS + PdV - TdS - SdT = VdP - SdT$$

## 11. Teorema di Schwartz e suo utilizzo per ricavare le relazioni di Maxwell.

Il teorema di Schwartz stabilisce che l'ordine di determinazione in una derivata parziale mista è irrilevante, quindi se in un punto  $x_0, y_0$  le derivate prime sono continue, per la funzione  $f = f(x, y)$  vale:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Applicando tale teorema ai potenziali termodinamici si ricavano le equazioni di Maxwell:

- 1° equazione di Maxwell:

$$U = U(S, V) \quad dU = TdS - PdV \quad \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V} = \frac{\partial^2 U}{\partial V \partial S} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V$$

- 2° equazione di Maxwell:

$$F = F(T, V) \quad dF = -SdT - PdV \quad \frac{\partial^2 F}{\partial T \partial V} = \frac{\partial^2 F}{\partial V \partial T} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$$

- 3° equazione di Maxwell:

$$H = H(S, P) \quad dH = TdS + PdV \quad \frac{\partial^2 H}{\partial S \partial P} = \frac{\partial^2 H}{\partial P \partial S} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P$$

- 4° equazione di Maxwell:

$$G = G(T, P) \quad dG = VdP - SdT \quad \frac{\partial^2 G}{\partial T \partial P} = \frac{\partial^2 G}{\partial P \partial T} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = -\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T$$

## 12. Processo di scambio termico isobaro reversibile (derivazione di $C_p$ e di $\alpha_P$ ). (Da dimostrare e commentare)

Prendiamo in considerazione un sistema costituito da un cilindro-pistone su cui insiste una pressione costante ed a cui viene fornito calore in modo reversibile. Misurando le variazioni di volume e temperatura tra due stati di equilibrio del processo reversibile di scambio termico è possibile determinare il calore specifico a pressione costante per unità di massa o mole:

$$c_p = \frac{1}{N} \left(\frac{\partial Q_{rev}}{\partial T}\right)_p \quad c_p^* = \frac{1}{M} \left(\frac{\partial Q_{rev}}{\partial T}\right)_p$$

Analizziamo ora i bilanci di entalpia ed entropia:

- Entalpia:

$$dH = TdS + VdP = Tds = \partial Q_{rev} \quad \rightarrow \quad c_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p \quad c_p^* = \frac{1}{M} T \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p$$

- Bilancio entropico:

$$dH = TdS = \partial Q_{rev} \quad \rightarrow \quad c_p = \frac{1}{N} T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p \quad c_p^* = \frac{1}{M} T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p$$

In processo isobaro è anche possibile determinare il coefficiente volumetrico di dilatazione termica che descrive come varia il volume del sistema al variare della temperatura quando le pressioni sono mantenute costanti:

$$\alpha_p = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = \rho \left(\frac{\partial \rho^{-1}}{\partial T}\right)_p = -\rho \left(\frac{\partial \rho^{-2} \partial \rho}{\partial T}\right)_p = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p$$

Per i gas ideali:  $v = \frac{RT}{P} \quad \frac{1}{v} = \frac{P}{RT} \quad \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = \frac{R}{P} \quad \alpha_p = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = \frac{P}{RT} \frac{R}{P} = \frac{1}{T}$

## 13. Processo isoterma reversibile (derivazione di $\kappa_T$ e della legge di Boyle). (Da dimostrare e commentare)

Consideriamo un processo isoterma reversibile. Durante tale processo il sistema è mantenuto a temperatura costante poiché in contatto con un serbatoio termico a temperatura costante. Si misuri quindi la variazione di pressione del sistema per un'assegnata variazione di volume. Facendo per esempio espandere il sistema in maniera molto lenta, tramite dunque un processo quasi statico, il sistema scambia reversibilmente  $\partial Q_{rev}$

con l'ambiente. La grandezza fisica che si può stimare durante questo processo è nota come coefficiente di comprimibilità isoterma, funzione di temperatura e pressione con gli altri tre coefficienti:

$$k_T = -\frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial P} \right)_T$$

Per un gas ideale si ha:  $v = \frac{RT}{P}$   $\left( \frac{\partial v}{\partial P} \right)_T = -\frac{RT}{P^2}$   $k_T = -\frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial P} \right)_T = -\frac{RT}{P} * \left( -\frac{RT}{P^2} \right) = \frac{1}{P}$

La variazione di pressione per una determinata variazione di volume, lungo una trasformazione isoterma può essere determinata considerando il differenziale della funzione  $T=T(P,v)$ , così che:

$$dT = \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_v dP + \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_P dv$$

$$dT = 0$$

$$0 = \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_v dP + \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_P dv$$

$$\frac{k_T}{\alpha_p} dP + \frac{1}{v\alpha_p} dv = 0$$

$$dP = \frac{\alpha_p}{k_T} * \left( -\frac{1}{v\alpha_p} \right) dv = -\frac{1}{vk_T} dv$$

Per un gas ideale  $Pv=RT$ ,  $\alpha_p = 1/T$  e  $k_T = 1/P$  si ha che:

$$\frac{T}{P} dP + \frac{T}{v} dv = 0$$

$$\frac{dP}{P} + \frac{dv}{v} = 0$$

$$\int \frac{dP}{P} + \int \frac{dv}{v} = 0$$

$$\log P + \log v = cost$$

$$Pv = cost$$

#### 14. Legge di Mayer generalizzata e sua declinazione per i gas ideali. (Da dimostrare e commentare)

La legge di Mayer è il legame tra calore specifico a volume costante e calore specifico a pressione costante, entrambi funzione di T e P. Partendo dalla definizione di  $c_v$  si ha:

$$c_v = \left( \frac{\partial Q_{rev}}{\partial T} \right)_v = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_v = T \frac{\partial(s,v)}{\partial(T,v)} = T \frac{\partial(s,v)}{\partial(T,P)} * \frac{\partial(T,P)}{\partial(T,v)} = \left( \frac{\partial P}{\partial v} \right)_T * \frac{\partial(s,v)}{\partial(T,P)} T = -\frac{T}{vk_T} \frac{\partial(s,v)}{\partial(T,P)}$$

Sviluppiamo ora questo jacobiano residuo:

$$\frac{\partial(s,v)}{\partial(T,P)} = \begin{vmatrix} \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_P & \left( \frac{\partial s}{\partial P} \right)_T \\ \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_P & \left( \frac{\partial v}{\partial P} \right)_T \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_P * \left( \frac{\partial v}{\partial P} \right)_T - \left( \frac{\partial s}{\partial P} \right)_T * \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_P =$$

$$= \frac{T}{T} \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_P * \frac{v}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial P} \right)_T - \left[ -\left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_P * \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_P \right] = -\frac{c_p}{T} vk_T + v^2 \alpha_p^2$$

Quindi si ha che:

$$c_v = -\frac{T}{vk_T} * \left( -\frac{c_p}{T} vk_T + v^2 \alpha_p^2 \right) = c_p - \frac{Tv\alpha_p^2}{k_T}$$

Per i gas ideali invece:

$$c_v = c_p - \frac{TvP}{T^2} = c_p - \frac{RT}{T} = c_p - R$$

$$c_p = c_v + R$$

### 15. Variazione di volume adiabatica reversibile ed applicazione ai gas ideali. (Da dimostrare e commentare)

Si prenda ora in considerazione il sistema cilindro-pistone che scambia lavoro in modo reversibile con l'ambiente. Durante questo processo si misurano le variazioni di volume e pressione del sistema e dunque l'entropia può essere descritta come funzione di queste due variabili. Il processo è adiabatico e quasistatico quindi  $ds = \emptyset$ :

$$S = S(P, V)$$

$$ds = \left( \frac{\partial s}{\partial P} \right)_v dP + \left( \frac{\partial s}{\partial v} \right)_P dv$$

$$\emptyset = \left( \frac{\partial s}{\partial P} \right)_v dP + \left( \frac{\partial s}{\partial v} \right)_P dv$$

$$\emptyset = -\left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_s dP + \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_s dv$$

Utilizzando le proprietà del jacobiano e sviluppando il primo termine dell'equazione si ottiene che:

$$-\left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_s = -\frac{\partial(v, s)}{\partial(T, s)} = \frac{\partial(v, s)}{\partial(s, T)} * \frac{\partial(v, T)}{\partial(v, T)} = \frac{\partial(v, s)}{\partial(v, T)} * \frac{\partial(v, T)}{\partial(s, T)} = \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_v \frac{T}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial s} \right)_T$$

$$\left( \frac{\partial v}{\partial s} \right)_T = \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_v = \frac{\partial(T, v)}{\partial(P, v)} * \frac{\partial(T, P)}{\partial(T, P)} = \frac{\partial(v, T)}{\partial(T, vP)} * \frac{\partial(T, P)}{\partial(v, P)} = -\left( \frac{\partial v}{\partial P} \right)_T \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_P$$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_v = vk_T * \frac{1}{v\alpha_p}$$

$$-\left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_s = \frac{c_v k_T}{T \alpha_p}$$

Il secondo termine  $\left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_s$  dell'equazione può invece essere sviluppato come:

$$\frac{\partial(P, s)}{\partial(T, s)} * \frac{\partial(P, T)}{\partial(P, T)} = \frac{\partial(P, T)}{\partial(T, s)} * \frac{\partial(P, s)}{\partial(P, T)} = -\frac{\partial(P, T)}{\partial(T, s)} * \frac{\partial(s, P)}{\partial(T, P)} =$$

$$= -\left( \frac{\partial P}{\partial s} \right)_T * \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_P = \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_P \frac{v}{v} * \frac{t}{t} \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_P = \frac{1}{v\alpha_p} * \frac{c_p}{T} = \frac{c_p}{Tv\alpha_p}$$

L'espressione iniziale diventa allora:

$$\emptyset = \frac{c_v k_T}{T \alpha_p} dP + \frac{c_p}{Tv\alpha_p} dv$$

Per i gas ideali si ha quindi che:

$$\emptyset = \frac{c_v T}{T P} dP + \frac{c_p T}{T v} dv$$

$$\emptyset = c_v \frac{dP}{P} + c_p \frac{dv}{v}$$

### 16. Processo isoenergetico e sue conseguenze sul comportamento dei gas ideali. (Da dimostrare e commentare)

In un processo isoenergetico il calore ed il lavoro scambiati dal sistema sono uguali ed opposti quindi si avrà che  $\partial W_{rev} = -\partial Q_{rev}$  e dunque la variazione di energia interna sarà nulla. Calcolando ora la variazione di temperatura come funzione della variazione di volume si ha che:

$$\Delta T = T_f - T_i = T(U, V_f) - T(U, V_i)$$

$$T = T(U, V)$$

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial U}\right)_V dU + \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_U dV = \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_U dV$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_U &= \frac{\partial(T, U)}{\partial(V, U)} * \frac{\partial(V, T)}{\partial(V, T)} = \frac{\partial(T, U)}{\partial(V, T)} * \frac{\partial(V, T)}{\partial(V, U)} = -\frac{\partial(U, T)}{\partial(V, T)} * \frac{\partial(V, T)}{\partial(V, U)} = \\ &= \left[-\frac{\partial(U, T)}{\partial(V, T)}\right] \cdot \left[\frac{\partial(V, U)}{\partial(V, T)}\right] = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T : \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = -\left[\frac{Tds - PdV}{dV}\right]_T : \left[T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_V\right] = \\ &= \left[P - T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_T\right] : \left[T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_V\right] = \left[P - \frac{T\alpha_p}{k_T}\right] : c_v = \frac{P - \frac{T\alpha_p}{k_T}}{c_v} \end{aligned}$$

Per i gas ideali:  $\alpha_p = \frac{1}{T}$   $k_T = \frac{1}{P}$   $\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_U = 0$

Dunque la temperatura di un gas ideale non cambia se l'energia interna è costante.

### 17. Coefficiente di Joule-Thomson, significato fisico e conseguenze, grafico T-P e curva d'inversione. Ricavato utilizzando un deflusso reversibile di una sostanza in sistema chiuso ed adiabatico oppure con deflusso irreversibile di una sostanza in sistema aperto ed adiabatico. (Da dimostrare e commentare)

Il coefficiente di Joule-Thomson per un gas a temperatura T e pressione P è definito come la variazione infinitesima di temperatura dovuta ad una variazione infinitesima di pressione quando il gas è sottoposto a un'espansione o una compressione isoentalpica. È possibile analizzare i due diversi casi per cui si ottiene una espansione o una compressione isoentalpica:

- Deflusso reversibile:

$$q = 0$$

$$dU = -dW$$

$$U_2 - U_1 = -(W_2 - W_1)$$

$$U_2 - U_1 = -(P_2 V_2 - P_1 V_1)$$

$$U_2 + P_2V_2 = U_1 + P_1V_1$$

$$H_2 = H_1$$

- Deflusso irreversibile:

$$\dot{m} \left[ (h_1 - h_2) + g(z_1 - z_2) + \frac{w_1^2}{2} - \frac{w_2^2}{2} \right] + \dot{Q} - \dot{L} = 0$$

$$h_1 - h_2 = 0$$

$$h_1 = h_2$$

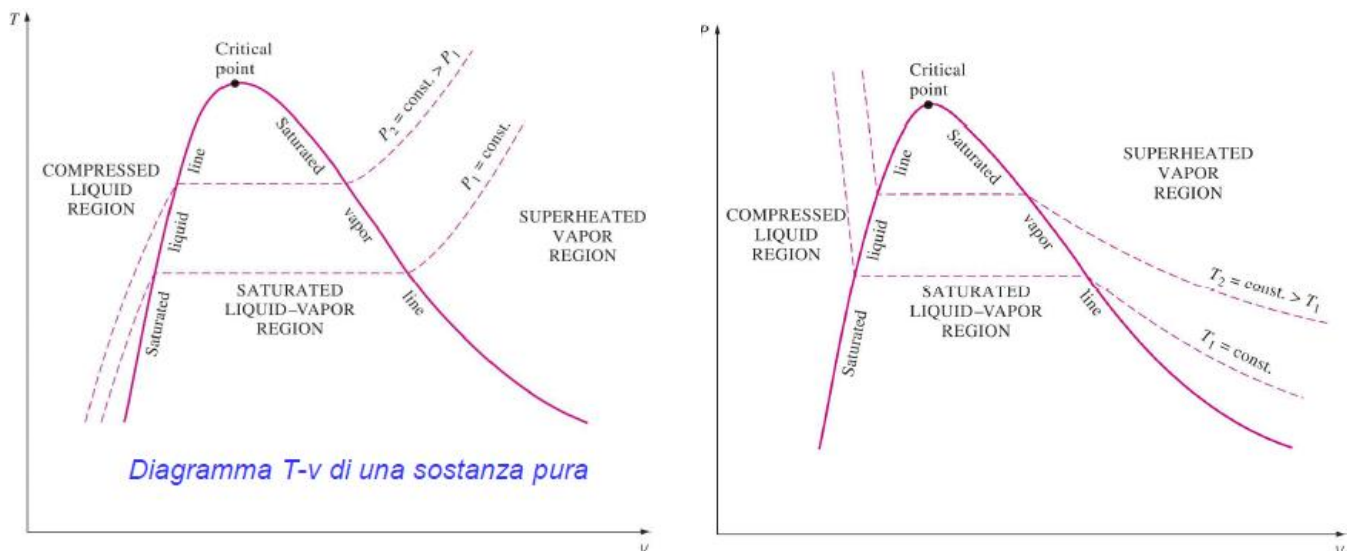
Il coefficiente di Joule si ricava:

$$\delta = \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_h = \frac{\partial(T, h)}{\partial(T, P)} = \frac{\partial(T, h)}{\partial(T, P)} * \frac{\partial(T, P)}{\partial(P, h)} = - \left( \frac{\partial h}{\partial P} \right)_T * \left( \frac{\partial T}{\partial h} \right)_P = - \frac{\left( \frac{\partial h}{\partial P} \right)_T}{\left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_P} = - \frac{T \left( \frac{ds}{dP} \right)_T + v \left( \frac{dP}{dT} \right)_T}{T \left( \frac{ds}{dP} \right)_P + v \left( \frac{dP}{dT} \right)_P} = - \frac{T \left( \frac{ds}{dP} \right)_T + v}{c_p}$$

$$- \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_P = \left( \frac{\partial s}{\partial P} \right)_T$$

$$\delta = - \frac{-T \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_P + v}{c_p} = \frac{Tv\alpha_p + v}{c_p} = v \frac{\alpha_p T - 1}{c_p}$$

### 18. Sostanze pure: superficie P-V-T e diagrammi T-V e P-V. Descrivere zone di esistenza di uno, due e tre stati di aggregazione.

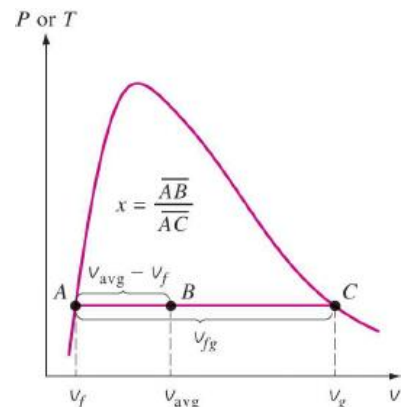


### 19. Miscela sature di liquido e vapore: regola della leva e proprietà.

Sotto la campana del digramma P-V e T-V delle sostanze pure sono presenti le miscele sature di liquido-vapore. Le quantità relative di liquido e vapore presenti in tali miscele sono definite dal titolo  $x$  della miscela stessa e possono essere ricavate a partire dalla regola della leva:

$$x = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

Tramite il titolo della miscela e le tabelle di saturazione liquido-vapore dell'acqua è possibile ricavare tutte le grandezze che caratterizzano tale miscela. È inoltre importante sottolineare che tutte le trasformazioni sotto la campana sono di tipo isoterobariche.

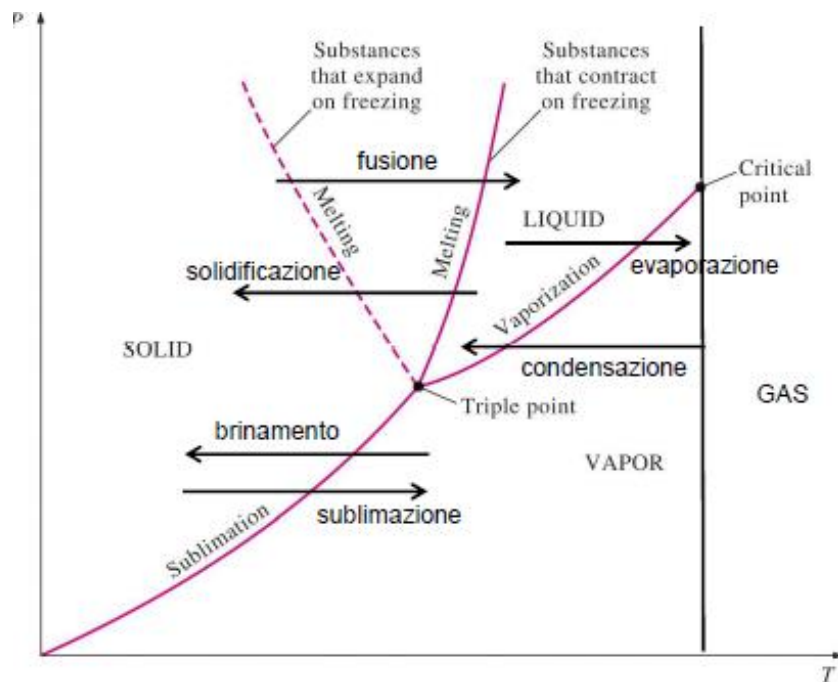




## 20. Diagramma P-T ed Equazione di Clausius-Clapeyron.

L'equazione di Clausius-Clapeyron descrive la variazione della pressione in relazione alla temperatura lungo la curva di equilibrio tra due fasi di una stessa sostanza.

$$\frac{dP}{dT} = \frac{\lambda}{T\Delta v}$$



## 21. Diagrammi T-s ed h-s per una sostanza pura.

## 22. Regola delle fasi o di Gibbs, gradi di libertà di un sistema termodinamico all'equilibrio.

Si consideri un sistema multifase (M fasi ed r componenti), in cui ogni fase è separata dalle altre da superfici di discontinuità non vincolate. Le condizioni di equilibrio sono date dalle seguenti  $(r+2)(M-1)$  equazioni:

- Equilibrio termico  $T' = T'' = \dots = T^{(M)}$
- Equilibrio meccanico  $P' = P'' = \dots = P^{(M)}$
- Equilibrio chimico  $\mu_1' = \mu_1'' = \dots = \mu_1^{(M)} \quad \mu_r' = \mu_r'' = \dots = \mu_r^{(M)}$

Lo stato di equilibrio del sistema è completamente definito utilizzando  $M(r+2)$  variabili; d'altra parte per ogni fase sussiste la relazione di Gibbs-Duhem per cui il numero di variabili di riduce a  $M(r+1)$ . Le condizioni di equilibrio sono quindi definite da un sistema di  $(r+2)(M-1)$  equazioni che devono essere soddisfatte da  $M(r+1)$  variabili. Affinché tale sistema ammetta soluzioni è necessario che il numero di equazioni non sia superiore al numero di incognite. Risulta allora:

$$(r + 2)(M - 1) \leq M(r + 1)$$

$$Mr - r + 2M - 2 \leq Mr + M$$

$$2M - M \leq r + 2$$

$$M \leq r + 2$$

In altri termini, in un sistema costituito da  $r$  componenti, non più di  $(r+2)$  fasi possono coesistere all'equilibrio. Se il numero  $M$  di fasi è minore di  $r+2$  risulta che  $r+2-m$  variabili intensive possono assumere valori arbitrari. Vale a dire che si possono variare arbitrariamente  $r+2-M$  variabili senza pregiudicare l'esistenza di una condizione di equilibrio con quelle fasi per il sistema; evidentemente gli altri parametri varieranno in modo ben determinato. Il numero di parametri che si possono variare arbitrariamente viene detto numero di gradi di libertà o varianza del sistema. Indicano con la lettera  $f$  tale numero, la regola delle fasi può essere riscritta come:

$$f = r + 2 - M$$

### 23. Proprietà dei liquidi e dei solidi ideali.

Se i liquidi e i solidi sono ideali allora possono essere considerati come incompressibili ed indilatabili e quindi avranno  $k_T = 0$  e  $\alpha_p = 0$ . Tali sostanze godono di alcune proprietà come:

- $c_v = c_p = c$
- $du = cdT$
- $ds = \frac{cdT}{T}$
- $dh = cdT + vdP \cong cdT$                        $vdP \ll cdT$

### 24. Formule approssimate per il calcolo delle proprietà termodinamiche (h ed s principalmente) per le sostanze pure.

Per le sostanze pure le proprietà come  $H$  ed  $S$  sono valutate a partire da uno stato di riferimento. Solitamente si considera come riferimento il punto triplo sul diagramma  $P-T$  della fase liquida e quindi:

- Processi isobari:       $dh = dQ$        $ds = \frac{dQ}{T}$
- Processi isotermi:     $dh = vdP$        $ds = 0$

### 25. Differenza tra gas e vapore, condizioni necessarie per poter considerare un gas a comportamento ideale (fattore di comprimibilità $Z$ e sua deviazione in funzione di $P$ e $T$ ).

Si definisce gas una specie chimica gassosa che si trova al di sopra della sua temperatura critica. Si definisce invece vapore una specie chimica gassosa che si trova ad una temperatura inferiore rispetto a quella critica. Fissate i valori delle temperature e delle pressioni si definisce fattore di comprimibilità  $Z$  il valore che indica come un gas reale si discosta dal comportamento ideale. Esso è definito come:

$$Z = \frac{Pv}{RT} = \frac{v_{actual}}{v_{ideal}}$$

Più  $Z$  è diverso da 1 più il gas si discosta dal comportamento ideale. In generale i gas si comportano come ideali per bassi valori di densità e dunque per elevate temperature e basse pressioni.

### 26. Sapendo che per un gas perfetto vale $du = c_v dT$ , dimostrare che vale anche $dh = c_p dT$

$$du = c_v dT = (c_p - R)dT$$

$$dh = du + VdP + PdV =$$

$$= c_v dT + VdP + PdV = (c_p - R)dT + VdP + PdV =$$

$$= c_p dT - RdT + VdP + PdV = c_p dT - PdV - VdP + VdP + PdV = c_p dT$$

$$PV = RT$$

$$RdT = PdV + VdP$$

**27. Le espressioni delle variazioni di entalpia ed entropia specifica per un gas ideale in funzione di P e T.**

$$\Delta H = M c_p \Delta T$$

$$\Delta h = c_p \Delta T$$

$$\Delta S = M c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - M R^* \ln \frac{P_2}{P_1}$$

$$\Delta s = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R^* \ln \frac{P_2}{P_1}$$

**28. Le espressioni delle variazioni di entalpia ed entropia specifica per un liquido ideale in funzione di P e T.**

$$\Delta s = c \ln \frac{T_{fin}}{T_{in}}$$

$$\Delta u = \Delta h = c \Delta T$$

**29. Dimostrare che nel piano T-s le curve isocore sono sempre più pendenti delle curve isobare.**

Le isobare sono descritte da:  $\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_p = \frac{T}{c_p}$

Le isocore sono descritte da:  $\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_v = \frac{T}{c_v}$

$$c_p > c_v$$

$$\frac{T}{c_p} < \frac{T}{c_v}$$

**30. Scrivere le equazioni di partenza e le ipotesi necessarie per ricavare l'equazione generale delle trasformazioni politropiche.**

Introduciamo le politropiche come conseguenza della variazione di volume adiabatica reversibile in un sistema cilindro-pistone che scambia lavoro in modo reversibile con l'ambiente attraverso un processo quasistatico. Le due ipotesi di partenza sono dunque considerare una variazione di volume adiabatica e un processo quasistatico:

$$\phi = \left(\frac{\partial s}{\partial P}\right)_v dP + \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_P dv$$

$$\phi = \frac{c_v k_T}{T \alpha_p} dP + \frac{c_p}{T v \alpha_p} dv$$

Per i gas ideali si ha quindi che:

$$\phi = \frac{c_v T}{T P} dP + \frac{c_p T}{T v} dv$$

$$\phi = c_v \frac{dP}{P} + c_p \frac{dv}{v}$$

Integrando si ottiene:

$$c_v \int \frac{dP}{P} + c_p \int \frac{dv}{v} = \phi$$

$$c_v \ln P + c_p \ln v = cost$$

$$P v^{\frac{c_p}{c_v}} = cost$$

$$\frac{c_p}{c_v} = k$$

**31. Descrivere le condizioni in cui un gas può essere trattato come ideale; riportare un'equazione di stato di un modello di gas reale e descrivere il significato fisico dei termini che vi appaiono.**

Un gas può essere trattato come ideale quando ha fattore di comprimibilità pari a 1 o quando ha densità basse (elevate temperature e basse pressioni). Un'equazione di stato di un gas reale è l'equazione di Van der Waals. Tale modello introduce due effetti non presenti nel modello del gas ideale: le forze di attrazione intermolecolari ed il volume occupato dalle molecole stesse. L'incertezza dei risultati ottenuta applicando tale equazione è spesso inadeguata:

$$\left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT$$

**32. Espressione per il calcolo dell'umidità relativa di un'aria umida.**

L'aria umida è una miscela di aria secca e vapore acqueo. L'espressione per il calcolo dell'umidità relativa di un'aria umida è:

$$\varphi = \frac{P_v}{P_{sat}} \quad \xi = \frac{x}{x_s} = \varphi \frac{P - P_{sat}}{P - P_v}$$

**33. La relazione tra umidità assoluta ed umidità relativa per un'aria umida.**

$$x = \frac{M_v}{M_a} = \frac{M m_v n_v}{M m_a n_a} = \frac{18,013}{28,96} \frac{P_v}{P_a} = 0,622 \frac{P_v}{P - P_v} = 0,622 \frac{\varphi P_{sat}}{P - \varphi P_{sat}}$$

$$\frac{n_v}{n_a} = \frac{P_v}{P_a}$$

$$P_a = P - P_v \quad \varphi = \frac{P_v}{P_{sat}} \quad P_v = \varphi P_{sat}$$

**34. Scrivere l'espressione dell'entalpia per un'aria umida, indicando il significato dei termini che vi compaiono.**

$$H = H_a + H_v = M_a h_a^* + M_v h_v^* = M_a h_a^* + x M_a h_v^*$$

$$x = \frac{M_v}{M_{as}}$$

$$h^* = \frac{H}{M_a} = \frac{M_a h_a^* + x M_a h_v^*}{M_a} = h_a^* + x h_v^*$$

$$h_v^* = h + c_p \Delta T = 2501,6 + 4 \frac{8,314}{18,013} t = 2501,6 + 1,846 t$$

$$h_a^* = c_p \Delta T = \frac{7,314}{28,96} t = 1,005 t$$

**35. Il diagramma di Mollier per l'aria umida. Disegnare e commentare.**

Il diagramma di Mollier è un diagramma termodinamico che rappresenta l'entalpia di un sistema in funzione dell'umidità assoluta dell'aria umida

### 36. Miscelazione di due arie umide (caso omogeneo o caso eterogeneo).

Nella miscelazione di due arie umide si conserva la massa totale di vapore. Dunque procedendo con i bilanci possibili si ottiene:

$$\begin{cases} M_{a1}x_1 + M_{a2}x_2 = (M_{a1} + M_{a2})x_m \\ M_{a1}h_1 + M_{a2}h_2 = (M_{a1} + M_{a2})h_m \end{cases}$$

È dunque possibile ricavare l'umidità assoluta della miscela finale e la sua entalpia:

$$x_m = \frac{M_{a1}x_1 + M_{a2}x_2}{M_{a1} + M_{a2}}$$

$$h_m = \frac{M_{a1}h_1 + M_{a2}h_2}{M_{a1} + M_{a2}}$$

Il punto m che rappresenta la miscela finale può appartenere a due differenti zone del diagramma di Mollier:

- Zona omogenea: la miscela finale sarà costituita da sola aria umida
- Zona eterogenea: la miscela finale condenserà e dunque oltre all'aria umida si avrà del condensato. Tale porzione del grafico è anche nota come zona delle nebbie

### 37. Bilancio di massa e di energia per un sistema aperto allo scambio di massa ed in regime stazionario.

Nella sua rappresentazione più semplice un sistema aperto è schematizzabile come un condotto delimitato da due aperture, una d'ingresso e una d'uscita del fluido, e di una semplice chiusura laterale volta allo scambio di massa. Tutto il contorno della superficie del sistema è detta superficie di controllo. Il bilancio di massa di un sistema aperto risulta essere:

$$\sum_{i=1}^n \dot{m}_i = \sum_{o=1}^k \dot{m}_o$$

Mentre il bilancio energetico di un sistema, che tiene conto dell'energia associata al fluido di massa che attraversa il condotto in entrata e in uscita, dell'energia termica che attraversa il contorno del sistema e dell'energia meccanica per unità di tempo, risulta essere:

$$\dot{m} \left[ (h_1^* - h_2^*) + g(z_1 - z_2) + \frac{w_1^2}{2} - \frac{w_2^2}{2} \right] + \dot{Q} - \dot{L} = 0$$

### 38. Bilancio entropico per un generico sistema fluente in regime stazionario.

$$\dot{m}(s_1^* - s_2^*) + \dot{S}_Q + \dot{S}_{irr} = 0$$

### 39. Applicazione del bilancio energetico ed entropico a turbine e compressori.

È possibile considerare sia le turbine che i compressori come macchine adiabatiche  $\dot{Q} = 0$  ed inoltre è possibile trascurare i contributi di energia cinetica, potenziale, dunque il bilancio energetico e quello entropico risultano essere:

$$\dot{m}(h_1^* - h_2^*) - \dot{L} = 0$$

$$\dot{m}(s_1^* - s_2^*) + \dot{S}_{irr} = 0$$

### 40. Applicazione del bilancio energetico ed entropico alla laminazione isoentalpica e sue conseguenze su P e T.

Nella laminazione isoentalpica il bilancio energetico ed entropico risulta essere:

$$h_1^* = h_2^*$$

$$s_1^* \leq s_2^*$$

Da tali bilanci ne consegue che un qualsiasi fluido che attraversa una laminazione isoentropica si espanderà sempre:

$$dh = Tds + VdP$$

$$0 = \int dh = \int Tds + \int VdP$$

$$-\int_1^2 TdS = \int_1^2 VdP$$

$$T > 0 \quad ds > 0 \quad \rightarrow \quad -\int_1^2 TdS < 0 \quad \rightarrow \quad \int_1^2 VdP < 0$$

$$VdP < 0$$

$$P_2 - P_1 < 0$$

$$P_2 < P_1$$

#### 41. Bilancio energetico ed entropico per una macchina termodinamica motrice reversibile.

Con il termine macchina termodinamica motrice si intende un sistema composto da un'opportuna combinazione di sottosistemi elementari che ha come funzione la conversione termodinamica di energia termica in lavoro:

$$Q_H - Q_C - L = 0$$

$$-\frac{Q_H}{T_H} + \frac{Q_C}{T_C} = 0$$

#### 42. Bilancio energetico ed entropico per una macchina termodinamica motrice irreversibile.

Con il termine macchina termodinamica motrice si intende un sistema composto da un'opportuna combinazione di sottosistemi elementari che ha come funzione la conversione termodinamica di energia termica in lavoro:

$$Q_H - Q_C - L = 0$$

$$-\frac{Q_H}{T_H} + \frac{Q_C}{T_C} = S_{irr}$$

#### 43. Bilancio energetico ed entropico per una macchina termodinamica operatrice reversibile.

Con il termine macchina termodinamica operatrice si intende un sistema composto da un'opportuna combinazione di sottosistemi elementari che ha come funzione il trasferimento di energia termica da uno o più serbatoi di calore a temperatura inferiore a uno o più serbatoi a temperatura superiore:

$$-Q_H + Q_C + L = 0$$

$$+\frac{Q_H}{T_H} - \frac{Q_C}{T_C} = 0$$

#### 44. Bilancio energetico ed entropico per una macchina termodinamica operatrice irreversibile

Con il termine macchina termodinamica operatrice si intende un sistema composto da un'opportuna combinazione di sottosistemi elementari che ha come funzione il trasferimento di energia termica da uno o più serbatoi di calore a temperatura inferiore a uno o più serbatoi a temperatura superiore:

$$-Q_H + Q_C + L = 0$$

$$+\frac{Q_H}{T_H} - \frac{Q_C}{T_C} = S_{irr}$$

#### 45. Definizione di COP per macchina termodinamica operatrice che lavora come frigorifero.

Si definisce COP, coefficient of performace, il parametro di merito cioè il rapporto tra l'effetto utile fratto la spesa. Tale valore è anche noto come efficienza della macchina frigorifera e si calcola come:

$$\varepsilon_f = \frac{Q_c}{W}$$

#### 46. Il rendimento di secondo principio per macchine motrici o operatrici.

Il rendimento di secondo principio rappresenta la capacità di un processo di avvicinarsi alle prestazioni del processo ideale:

- Macchina motrice:  $\eta_{II} = \frac{L_{reale}}{L_{ideale}} = \frac{\eta}{\eta_{rev}}$
- Macchina operatrice (frigorifero):  $\eta_{II} = \frac{L_{ideale}}{L_{reale}}$
- Macchina operatrice (pompa di calore):  $\eta_{II} = \frac{L_{ideale}}{L_{reale}}$

#### 47. Esprimere il rendimento di un ciclo Joule diretto in funzione di scambi energetici, temperature, rapporto di compressione.

Il ciclo Joule è un ciclo costituito da 2 isobare e da 2 isoentropiche.

Rapporto di compressione:  $\beta = \frac{P_{max}}{P_{min}} = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_3}{P_4}$

Calore entrante:  $q_e = q_{23} = h_3 - h_2 = c_p(T_3 - T_2)$

Calore uscente:  $q_u = -q_{41} = -(h_1 - h_4) = c_p(T_4 - T_1)$

$$\eta_{\text{Joule-Brayton}} = \frac{W_{netto}}{q_e} = \frac{q_e - q_u}{q_e} = 1 - \frac{q_u}{q_e} = 1 - \frac{c_p(T_4 - T_1)}{c_p(T_3 - T_2)} = 1 - \frac{T_1 \left( \frac{T_4}{T_1} - 1 \right)}{T_2 \left( \frac{T_3}{T_2} - 1 \right)}$$

$$P_1^{1-k} T_1^k = P_2^{1-k} T_2^k$$

$$P_1^{\frac{1-k}{k}} T_1 = P_2^{\frac{1-k}{k}} T_2$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{1-k}{k}} = \left( \frac{P_3}{P_4} \right)^{\frac{1-k}{k}} = \beta^{\frac{1-k}{k}} = \frac{1}{\beta^{\frac{k-1}{k}}} = \frac{T_4}{T_3}$$

$$\eta_{\text{Joule-Brayton}} = 1 - \frac{T_1 \left( \frac{T_4}{T_1} - 1 \right)}{T_2 \left( \frac{T_3}{T_2} - 1 \right)} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \beta^{\frac{1-k}{k}} = 1 - \frac{1}{\beta^{\frac{k-1}{k}}}$$

#### 48. Metodi per aumentare il rendimento di un ciclo Joule.

Il rendimento di ciclo Joule può essere migliorato tramite:

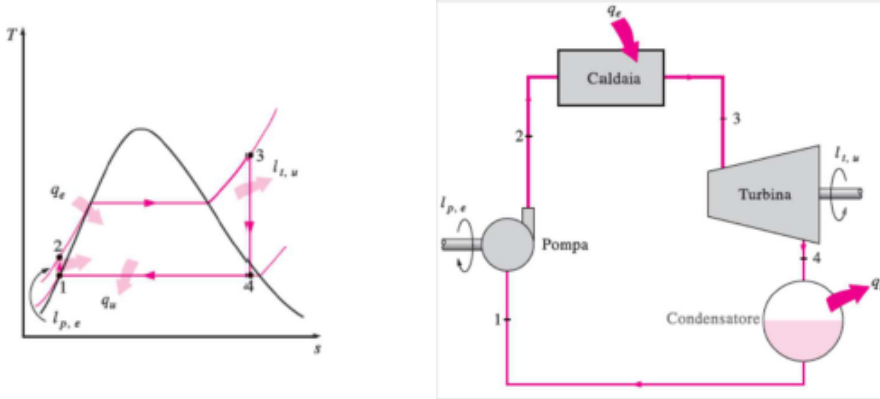
- Aumento della temperatura di combustione e/o di ingresso in turbina
- Aumento dell'efficienza delle macchine quali turbina e compressione
- Modifica del ciclo base tramite:
  - \* Interrefrigerazione = permette di raffreddare l'aria in uscita dal compressore e quindi diminuisce il lavoro richiesto per comprimere il gas
  - \* Rigenerazione = riscalda il fluido ad alta pressione in uscita dal compressore utilizzando il fluido in uscita dalla turbina
  - \* Ricombustione = fornisce entalpia maggiore all'ingresso della turbina

#### 49. Confronto tra ciclo Otto e ciclo Diesel.

Il ciclo Otto è un ciclo termodinamico costituito da due isovolumiche e da due isoentalpiche mentre quello Diesel è costituito da un'isobara, una isovolumica e due isoentropiche. Entrambi tali cicli conservano quindi le due adiabatichhe. Il ciclo Otto è simmetrico mentre il ciclo Diesel no. Entrambi possono lavorare con un sistema cilindro-pistone e sono entrambi cicli a gas.

#### 50. Ciclo Rankine motore: diagramma termodinamico, schema d'impianto, bilanci energetici.

Il ciclo Rankine è un ciclo termodinamico composto da due adiabatichhe e due isobare:



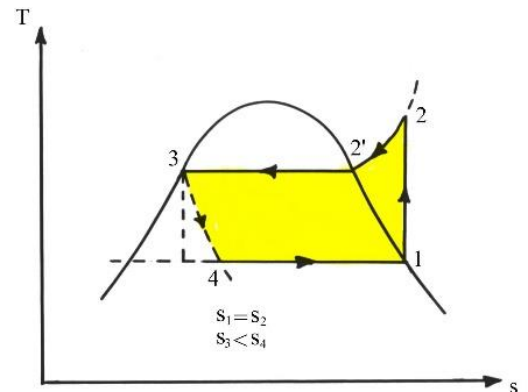
Pompa	$W_{p,e} = h_2 - h_1 \cong v_1(P_2 - P_1)$
Caldaia	$q_e = h_3 - h_2$
Turbina	$W_{t,u} = h_3 - h_4$
Condensatore	$q_u = h_4 - h_1$

#### 51. Riportare sul diagramma T,s un ciclo Rankine inverso reale e scrivere le espressioni (in funzione di opportuni potenziali termodinamici) dei COP associati all'utilizzo del ciclo come macchina frigorifera e pompa di calore.

1-2) Compressione isoentropica	$w_{p,e} = h_2 - h_1 \cong v_1(P_2 - P_1)$
2-3) Raffreddamento isobaro:	$q_u = h_2 - h_3$
3-4) Laminazione isoentalpica:	$w_{t,u} = h_3 - h_4$
4-1) evaporazione isotermodarica:	$q_e = h_1 - h_4$

Rendimento pdc:  $\varepsilon_{pdc} = \frac{q_u}{W_{p,e}} = \frac{h_2 - h_3}{h_2 - h_1} = \frac{-(h_3 - h_2)}{h_2 - h_1}$

Rendimento f:  $\varepsilon_f = \frac{q_e}{W_{p,e}} = \frac{h_1 - h_4}{h_2 - h_1}$



#### 52. L'espressione del rendimento isoentropico di un compressore nel caso di gas ideale, in funzione delle temperature ad inizio e fine compressione

$$\eta_{is} = \frac{\Delta h_{is}}{\Delta h} = \frac{c_p \Delta T_{is}}{c_p \Delta T} = \frac{T_{2is} - T_1}{T_2 - T_1}$$

#### 53. L'espressione del rendimento isoentropico di una turbina nel caso di gas ideale, in funzione delle temperature ad inizio e fine espansione

$$\eta_{is} = \frac{\Delta h}{\Delta h_{is}} = \frac{c_p \Delta T}{c_p \Delta T_{is}} = \frac{T_2 - T_1}{T_{2is} - T_1}$$



#### 54. Il postulato di Fourier.

Il postulato di Fourier è l'equazione della conduzione termica vale:

$$\alpha \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t}$$

#### 55. L'equazione generale della conduzione: vari casi (Laplace, Poisson, Fourier), condizioni necessarie per la sua integrazione.

L'equazione generale della conduzione è:

$$\alpha \nabla^2 T + \frac{\dot{q}'''}{\rho c_p^*} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

A partire da tale equazione è possibile distinguere vari casi:

- Regime stazionario:  $\frac{\partial T}{\partial t} = \emptyset \quad \rightarrow \quad \nabla^2 T + \frac{\dot{q}'''}{k} = \emptyset$  Eq. Poisson
- Senza generazione di potenza:  $\dot{q}''' = \emptyset \quad \rightarrow \quad \alpha \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t}$  Eq. Fourier
- Senza generazione di potenza e in regime stazionario:  $\dot{q}''' = \emptyset, \frac{\partial T}{\partial t} = \emptyset \rightarrow \nabla^2 T = \emptyset$  Eq. Laplace

Le condizioni generali per l'integrazione sono:

- Condizione temporale (Dirichlet): si conosce il valore della temperatura di una superficie
- Condizione spaziale (Neumann): c'è un valore fisso o costante del flusso  $\dot{q}_s''$  sulla superficie

#### 56. L'espressione della conduzione del calore attraverso un cilindro cavo a sezione circolare, in funzione delle temperature dei fluidi che ne lambiscono le due superfici.

$$\begin{cases} k \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \\ T(r = r_1) = T_{s1} \\ T(r = r_2) = T_{s2} \end{cases}$$

Ricavo l'espressione della temperatura in funzione del raggio:

$$r \frac{dT}{dr} = c_1$$

$$dT = \frac{c_1}{r} dr$$

$$T(r) = c_1 \ln r + c_2$$

$$\begin{cases} T(r) = c_1 \ln r + c_2 \\ T(r = r_1) = T_{s1} \\ T(r = r_2) = T_{s2} \end{cases}$$

Applico le condizioni al contorno per ricavare le costanti di integrazione:

$$T_{s1} = c_1 \ln r_1 + c_2$$

$$T_{s2} = c_1 \ln r_2 + c_2$$

$$T_{s1} - T_{s2} = c_1 \ln r_1 + c_2 - (c_1 \ln r_2 + c_2) = c_1 \ln \frac{r_1}{r_2}$$

$$c_1 = \frac{T_{s1} - T_{s2}}{\ln \frac{r_1}{r_2}}$$

$$T_{s1} = c_1 \ln r_1 + c_2 = \frac{T_{s1} - T_{s2}}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \ln r_1 + c_2$$

$$c_2 = T_{s1} - \frac{T_{s1} - T_{s2}}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \ln r_1$$

$$T(r) = \frac{T_{s1} - T_{s2}}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \ln r + T_{s1} - \frac{T_{s1} - T_{s2}}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \ln r_1 = \frac{T_{s1} - T_{s2}}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \ln \frac{r}{r_1} + T_{s1}$$

**57. L'espressione della conduzione del calore attraverso una parete costituita da due strati, in funzione delle temperature dei fluidi che ne lambiscono le due facce**

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \\ T(x=0) = T_{s1} \\ T(x=s) = T_{s2} \end{cases}$$

Ricavo l'espressione della temperatura in funzione di x:

$$T(x) = c_1 x + c_2$$

$$\begin{cases} T(x) = c_1 x + c_2 \\ T(x=0) = T_{s1} \\ T(x=s) = T_{s2} \end{cases}$$

Applico le condizioni al contorno per ricavare le costanti di integrazione:

$$T_{s1} = c_2$$

$$T_{s2} = c_1 s + T_{s1}$$

$$c_1 = \frac{T_{s2} - T_{s1}}{s}$$

$$T(x) = \frac{T_{s2} - T_{s1}}{s} x + T_{s1}$$

**58. L'equazione generale della conduzione per un mezzo avente conduttività costante con la temperatura ed in condizioni stazionarie**

L'equazione generale della conduzione per un mezzo avente conduttività costante con la temperatura e in condizione stazionarie è l'equazione di Laplace:

$$\nabla^2 T = 0$$

**59. Scrivere le equazioni di partenza e le ipotesi necessarie per ricavare l'equazione generale della conduzione.**

Per ricavare l'equazione generale della conduzione è necessario effettuare un bilancio energetico considerando un cubettino infinitesimo di materiale isotropo ed omogeneo. Si considerano dunque:

- Energia entrante  $\dot{E}_{in} = \dot{q}_x + \dot{q}_y + \dot{q}_z$
- Energia generata  $\dot{E}_{gen} = \dot{q}''' dx dy dz$
- Energia uscente  $\dot{E}_{out} = \dot{q}_{x+dx} + \dot{q}_{y+dy} + \dot{q}_{z+dz}$
- Energia accumulata  $\dot{E}_{acc} = \rho c_p^* \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz$

$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_{gen} = \dot{E}_{acc}$$

## 60. La conduzione in regime variabile: i parametri concentrati e la definizione ed il significato dei gruppi adimensionali Biot e Fourier.

In generale in un problema di conduzione in regime variabile la temperatura all'interno del mezzo solido varierà con la posizione e con il tempo. Esistono però alcune applicazioni ingegneristiche nelle quali la temperatura può essere considerata costante dentro al corpo e quindi risulterà che la temperatura sarà funzione del solo tempo. Questa semplificazione è nota come metodo dei parametri concentrati. Introduciamo quindi due parametri adimensionali:

- Numero di Biot = rappresenta il rapporto tra la resistenza conduttiva e quella convettiva. Affinché sia possibile applicare il metodo dei parametri concentrati tale numero deve essere inferiore a 0,1

$$Bi = \frac{hL_c}{k} < 0.1$$

- Numero di Fourier = rappresenta il tempo adimensionale

$$Fo = \frac{\alpha t}{L_c^2} \quad \alpha = \frac{k}{\rho c^*}$$

## 61. La definizione ed il significato di tre gruppi adimensionali a piacere.

- Numero di Reynolds = serve ad individuare il regime di moto. Tale numero tiene conto delle proprietà fisiche del fluido e della sua geometrica:

$$Re = \frac{\rho w L_c}{\mu}$$

- Pr = numero di Prandtl rappresenta il rapporto fra viscosità cinematica ( $\nu$ ) che regola la trasmissione della quantità di moto per effetto della viscosità in presenza di un gradiente di velocità e la diffusività termica (D) che regola la trasmissione di calore per sola diffusione termica (conduzione termica) quando esiste un gradiente di temperatura:

$$Pr = \frac{c_p \mu}{k_f} = \frac{\nu}{D}$$

- Nu = numero di Nusselt rappresenta il rapporto fra la quantità di calore trasmesso per convezione e la quantità di calore trasmesso per sola conduzione

$$Nu = L \frac{h}{k_f}$$

## 62. La definizione ed il significato del gruppo adimensionale Pr.

Il numero di Prandtl rappresenta il rapporto fra viscosità cinematica ( $\nu$ ) che regola la trasmissione della quantità di moto per effetto della viscosità in presenza di un gradiente di velocità e la diffusività termica (D) che regola la trasmissione di calore per sola diffusione termica (conduzione termica) quando esiste un gradiente di temperatura:

$$Pr = \frac{c_p \mu}{k_f} = \frac{\nu}{D}$$

## 63. La definizione ed il significato del gruppo adimensionale Re ed il suo utilizzo per classificare il moto dei fluidi.

Il numero di Reynolds serve ad individuare il regime di moto. Tale numero tiene conto delle proprietà fisiche del fluido e della sua geometrica:

$$Re = \frac{\rho w L_c}{\mu}$$

In linea generale alti valori di Re corrispondono a moto turbolento, mentre bassi valori del numero di Reynolds descrivono moto laminare. Il punto in cui il flusso da laminare si trasforma in turbolento è detto punto critico di Reynolds.

**64. L'espressione del profilo di temperatura in una lastra in stato stazionario soggetta a generazione interna di potenza con temperatura sulle superfici nota e costante.**

$$\begin{cases} \frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{q}'''}{k} = 0 \\ T(-L) = T_{s1} \\ T(L) = T_{s2} \end{cases}$$

Ricavo l'espressione della temperatura in funzione di x integrando due volte la prima equazione:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{q}'''}{k} = 0$$

$$\int d^2T = \int -\frac{\dot{q}'''}{k} dx^2$$

$$dT = -\frac{\dot{q}'''}{k} x + c_1$$

$$\int dT = \int -\frac{\dot{q}'''}{k} x + c_1$$

$$T(x) = -\frac{\dot{q}'''}{2k} x^2 + c_1 x + c_2$$

Applicando ora le condizioni al contorno per ricavare le costanti di integrazione:

$$T_{s1} = -\frac{\dot{q}'''}{2k} (-L)^2 + c_1(-L) + c_2 = -\frac{\dot{q}'''}{2k} L^2 - c_1 L + c_2$$

$$T_{s2} = -\frac{\dot{q}'''}{2k} (L)^2 + c_1(L) + c_2 = -\frac{\dot{q}'''}{2k} L^2 + c_1 L + c_2$$

$$T_{s1} - T_{s2} = -2c_1 L$$

$$c_1 = \frac{-(T_{s1} - T_{s2})}{2L} = \frac{T_{s2} - T_{s1}}{2L}$$

Sostituendo questo valore a  $T_{s1}$  si può ricavare  $c_2$ :

$$T_{s1} = -\frac{\dot{q}'''}{2k} L^2 - c_1 L + c_2 = -\frac{\dot{q}'''}{2k} L^2 - \frac{T_{s2} - T_{s1}}{2L} L + c_2$$

$$c_2 = \frac{\dot{q}'''}{2k} L^2 + \frac{T_{s1} + T_{s2}}{2}$$

Sostituiamo tutto in  $T(x)$ :

$$T(x) = -\frac{\dot{q}'''}{2k} x^2 + \frac{T_{s2} - T_{s1}}{2L} x + \frac{\dot{q}'''}{2k} L^2 + \frac{T_{s1} + T_{s2}}{2} = \frac{\dot{q}'''}{2k} (L^2 - x^2) + \frac{T_{s2} - T_{s1}}{2L} x + \frac{T_{s1} + T_{s2}}{2}$$

**65. Determinare i profili generali del flusso termico e della temperatura in funzione del raggio per un cilindro di lunghezza indefinita omogeneo ed isotropo, tramite l'integrazione dell'equazione della conduzione in condizioni stazionarie e con generazione di potenza. Commentare la condizione al contorno in corrispondenza dell'asse del cilindro per cilindri pieni**

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\dot{q}'''}{k} = \emptyset \\ -k \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} = \emptyset \\ T(r = r_0) = T_s = \text{cost} \end{cases}$$

Ricavo l'espressione della temperatura in funzione del raggio:

$$\int d \left( r \frac{dT}{dr} \right) = - \int \frac{\dot{q}'''}{k} r dr$$

$$r \frac{dT}{dr} = - \frac{\dot{q}'''}{2k} r^2 + c_1$$

$$\int dT = - \int \frac{\dot{q}'''}{2k} r + \frac{c_1}{r}$$

$$T(r) = - \frac{\dot{q}'''}{4k} r^2 + c_1 \ln r + c_2$$

Applichiamo ora le condizioni al contorno per ricavare le costanti di integrazione:

$$-k \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} = \emptyset \quad \rightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial r} (r = 0) = 0 = - \frac{\dot{q}'''}{2k} r + \frac{c_1}{r} \quad \rightarrow \quad c_1 = 0$$

$$T(r = r_0) = T_s = \text{cost} \quad \rightarrow \quad T_s = - \frac{\dot{q}'''}{4k} r_0^2 + c_2 \quad \rightarrow \quad c_2 = T_s + \frac{\dot{q}'''}{4k} r_0^2$$

$$T(r) = - \frac{\dot{q}'''}{4k} r^2 + T_s + \frac{\dot{q}'''}{4k} r_0^2$$

### 66. La legge di Wien ed il suo significato

La legge di Wien consente di individuare per quale lunghezza d'onda  $\lambda_{max}$  è massima l'emissione radioattiva di un corpo nero di massa generica avente una certa temperatura T:

$$T \lambda_{max} = 2898 \mu m K$$

### 67. La legge di Kirchhoff per corpi opachi

La legge di Kirchhoff permette di correlare il coefficiente di assorbimento dell'emissività di un corpo. In condizioni di equilibrio termico, cioè, l'assorbanza è pari all'emissività di un corpo:

$$\alpha_c = \varepsilon_c$$

### 68. Rappresentare alcune curve del potere emissivo (o emissione monocromatica) di corpo nero in funzione di temperatura e lunghezza d'onda

### 69. La legge di reciprocità tra i fattori di vista per due corpi neri

$$A_i F_{ij} = A_j F_{ji} \quad \Leftrightarrow \quad A_i = A_j \quad F_{ij} = F_{ji}$$

### 70. L'espressione della potenza termica scambiata per irraggiamento tra due superfici opache che chiudono una cavità

La potenza termica scambiata per irraggiamento tra due superfici opache si calcola come la radiazione termica emessa dalla superficie 1 e intercettata dalla superficie 2 meno la radiazione termica emessa dalla superficie 2 e intercettata dalla superficie 1:

$$\dot{Q}_{12} = A_1 J_1 F_{12} - A_2 J_2 F_{21} = AF(J_1 - J_2) = \frac{J_1 - J_2}{\frac{1}{AF}} = \frac{J_1 - J_2}{R_{12}}$$

### 71. La legge di Newton e le grandezze da cui dipende il coefficiente convettivo

La legge di Newton della convezione termica è:

$$\dot{Q} = Ah(T_{superficie} - T_{fluido})$$

Dove h è il coefficiente di convezione che rappresenta la potenza termica scambiata tra una superficie solida e un fluido in moto relativo e A indica la superficie di scambio. Il coefficiente convettivo dipende da

### 72. Rappresentare i profili di velocità e temperatura in fluido che lambisce una parete in convezione forzata

### 73. L'espressione della temperatura in funzione del tempo per un sistema durante un transitorio descrivibile a parametri concentrati

$$\frac{T - T_f}{T_0 - T_f} = e^{-\frac{t}{\tau}} = e^{-Bi * Fo} \quad \tau = RC = \frac{1}{hA} * \rho c V$$

### 74. Rappresentare il profilo di temperatura in una parete piana composta da tre strati A, B, C di identico spessore, sapendo che $\lambda_A > \lambda_B > \lambda_C$

Maggiore è  $\lambda$  minore è la pendenza del profilo poiché:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{q''}{\lambda}$$

### 75. Scrivere le equazioni che esprimono lo scambio energetico tra i due fluidi in uno scambiatore di calore

Da fluido caldo e freddo:  $\dot{Q}_c = \dot{m}_c (h_{out,c} - h_{in,c}) = \dot{m}_c c_{pc} (T_{out,c} - T_{in,c}) = C_c (T_{out,c} - T_{in,c})$

Da fluido freddo a caldo:  $\dot{Q}_h = \dot{m}_h (h_{out,h} - h_{in,h}) = \dot{m}_h c_{ph} (T_{out,h} - T_{in,h}) = C_h (T_{out,h} - T_{in,h})$

### 76. Il metodo della differenza di temperatura media logaritmica per scambiatori di calore.

La potenza termica scambiata tra i due fluidi viene legata alla differenza di temperatura tra il fluido freddo e il fluido caldo ma questa varia con la posizione all'interno dello scambiatore e quindi occorre utilizzare una differenza di temperatura opportunamente mediata. L'equazione di scambio diventa quindi:

$$\dot{Q} = UA \Delta T_{ml} \quad \Delta T_{ml} = \frac{\Delta T_u - \Delta T_i}{\ln \frac{\Delta T_u}{\Delta T_i}} \quad \Delta T_u = T_{hot,u} - T_{cold,u} \quad \Delta T_i = T_{hot,i} - T_{cold,i}$$