Sistema risolutore

Il sistema generico che si ottiene dopo aver ricavato tutti i legami cinematici e aver scritto le forme di energia in funzione delle variabili indipendenti è il seguente:

$$[M]\underline{\ddot{z}} + [R]\underline{\dot{z}} + [K]\underline{z} = \underline{Q}$$

A questo punto possiamo operare la partizione e dunque ricordando che le matrici possono essere scritte nel seguente modo e che il vettore delle variabili indipendenti e quello delle forze esterne attive agenti sul sistema possono essere riscritti come segue:

$$[M] = \begin{bmatrix} [M_{LL}] & [M_{LV}] \\ [M_{VL}] & [M_{VV}] \end{bmatrix} \qquad [R] = \begin{bmatrix} [R_{LL}] & [R_{LV}] \\ [R_{VL}] & [R_{VV}] \end{bmatrix} \qquad [K] = \begin{bmatrix} [K_{LL}] & [K_{LV}] \\ [K_{VL}] & [K_{VV}] \end{bmatrix} \qquad \underline{z} = \begin{Bmatrix} \underline{z_L} \\ \underline{z_V} \end{Bmatrix} \qquad \underline{Q} = \begin{Bmatrix} \underline{Q_L} \\ \underline{Q_V} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} [M_{LL}] & [M_{LV}] \\ [M_{VL}] & [M_{VV}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\ddot{z}_L} \\ \underline{\ddot{z}_V} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [R_{LL}] & [R_{LV}] \\ [R_{VL}] & [R_{VV}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\dot{z}_L} \\ \underline{\dot{z}_V} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{LL}] & [K_{LV}] \\ [K_{VL}] & [K_{VV}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{z_L} \\ \underline{z_V} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{Q_L} \\ \underline{Q_V} \end{Bmatrix}$$

Il sistema generico può dunque essere riscritto come un sistema di due equazioni:

$$\begin{cases} [M_{LL}]\underline{\ddot{z}_L} + [R_{LL}]\underline{\dot{z}_L} + [K_{LL}]\underline{z_L} = \underline{Q_L} - [M_{LV}]\underline{\ddot{z}_V} - [R_{LV}]\underline{\dot{z}_V} - [K_{LV}]\underline{z_V} \\ \underline{Q_V} = [M_{VL}]\underline{\ddot{z}_L} + [R_{VL}]\underline{\dot{z}_L} + [K_{VL}]\underline{z_L} + [M_{VV}]\underline{\ddot{z}_V} + [R_{VV}]\underline{\dot{z}_V} + [K_{VV}]\underline{z_V} \end{cases}$$

Calcolo delle pulsazioni e delle frequenze proprie

A questo punto per calcolare le frequenze proprie prendo la prima delle due equazioni che costituiscono il sistema e nello specifico la prendo non forzata e non smorzata e per un sistema libero ($\underline{z_V} = \underline{0}$) ottenendo dunque:

$$[M_{LL}]\underline{\ddot{z}_L} + [K_{LL}]\underline{z_L} = \underline{0}$$

Propongo una soluzione del tipo:

$$\underline{z_L} = \underline{z_{L0}}e^{i\omega t}$$
$$\underline{\dot{z}_L} = i\omega\underline{z_{L0}}e^{i\omega t}$$
$$\underline{\ddot{z}_L} = -\omega^2\underline{z_{L0}}e^{i\omega t}$$

$e^{i\omega t}$ posso mandarlo via perché è un termine sempre positivo

Sostituisco queste soluzioni nell'equazione non forzata e non smorzata:

$$[M_{LL}](-\omega^2\underline{z_{L0}}e^{i\omega t}) + [K_{LL}]\underline{z_{L0}}e^{i\omega t} = 0$$

$$(-\omega^2[M_{LL}] + [K_{LL}])\underline{z_{L0}}e^{i\omega t} = 0$$

Ho dunque due soluzioni:

- Soluzione banale: $\underline{z_{L0}} = 0$ $\rightarrow$ non ci interessano soluzioni banali
- Soluzione non banale: $-\omega^2[M_{LL}] + [K_{LL}] = 0$

  $$[A] = -\omega^2[M_{LL}] + [K_{LL}]$$

  Ottengo così un'equazione algebrica lineare di grado 2 parametrica in ω. Ricordiamo che A è una matrice dunque per poter risolvere questa equazione e trovarne gli zeri occorre annullare il suo determinante. In questo modo si ricava ω_1 e ω_2. Ho così ricavato le due pulsazioni proprie del sistema. Per ricavare le frequenze proprie associate si procede nel seguente modo:

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} \qquad f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi}$$

Calcolo dei modi di vibrare del sistema

Per ricavare i modi di vibrare del sistema associati alla pulsazione ω_i procedo nel seguente modo. Sostituisco ω_i nella seguente equazione:

$$(-\omega_i{}^2[M_{LL}]+[K_{LL}])\underline{z_{L0}}e^{i\omega t}=0$$

$$(-\omega_i{}^2[M_{LL}]+[K_{LL}])\underline{z_{L0}}=0$$

Anche in questo caso ho semplificato il termine esponenziale in quanto sempre positivo. Si ottiene dunque un sistema indeterminato le cui equazioni sono combinazioni lineari e quindi sono linearmente dipendenti le une dalle altre. Dando ora valore 1 a una delle componenti di $\underline{z_{L0}}$ si ricava $\underline{z_{L0}}^{(i)}$ cioè il modo di vibrare associato alla i-esima frequenza propria del sistema

Funzione di risposta in frequenza da coppia

Considero la prima equazione del sistema ottenuta in precedenza con la partizione:

$$[M_{LL}]\underline{\ddot{z}_L}+[R_{LL}]\underline{\dot{z}_L}+[K_{LL}]\underline{z_L}=\underline{Q_L}-[M_{LV}]\underline{\ddot{z}_V}-[R_{LV}]\underline{\dot{z}_V}-[K_{LV}]\underline{z_V}$$

Impongo $\underline{\ddot{z}_V}=\underline{\dot{z}_V}=\underline{z_V}=\underline{0}$ e modulo della coppia uguale a 1: $C_0=1$. Dunque, elimino dall'equazione sopra scritto tutti contributi dovuti a $\underline{z_V}$:

$$[M_{LL}]\underline{\ddot{z}_L}+[R_{LL}]\underline{\dot{z}_L}+[K_{LL}]\underline{z_L}=C_0e^{i\Omega t}=\underline{b}e^{i\Omega t}$$

Dato che impongo che $\underline{z_L}=\underline{z_{L0}}e^{i\Omega t}$

$$\underline{\dot{z}_L}=i\Omega\underline{z_{L0}}e^{i\Omega t}$$
$$\underline{\ddot{z}_L}=-\Omega^2\underline{z_{L0}}e^{i\Omega t}$$

Ottengo il seguente sistema:

$$[M_{LL}](-\Omega^2\underline{z_{L0}}e^{i\Omega t})+[R_{LL}]i\Omega\underline{z_{L0}}e^{i\Omega t}+[K_{LL}]\underline{z_{L0}}e^{i\Omega t}=\underline{b}e^{i\Omega t}$$

$$(-\Omega^2[M_{LL}]+[R_{LL}]i\Omega+[K_{LL}])\underline{z_{L0}}e^{i\Omega t}=\underline{b}e^{i\Omega t}$$

$$(-\Omega^2[M_{LL}]+[R_{LL}]i\Omega+[K_{LL}])\underline{z_{L0}}=\underline{b}$$

$$[A]\underline{z_{L0}}=\underline{b}$$

Da questa equazione posso ricavare $\underline{z_{L0}}=[A]^{-1}\underline{b}$ cioè un vettore di numeri complessi i cui moduli rappresentano le funzioni di trasferimento dell'ampiezza di vibrazioni di oscillazione con forzamento C. Il modulo della componente della i-esima riga di $\underline{z_{L0}}$ è la funzione di trasferimento in ampiezza del i-esimo grado di libertà:

$$\underline{z_{L0}}=\begin{bmatrix}FRF_{C\to gdl1}\\FRF_{C\to gdl2}\end{bmatrix}$$

Funzione di risposta in frequenza da forza

Considero la prima equazione del sistema ottenuta in precedenza con la partizione:

$$[M_{LL}]\underline{\ddot{z}_L}+[R_{LL}]\underline{\dot{z}_L}+[K_{LL}]\underline{z_L}=\underline{Q_L}-[M_{LV}]\underline{\ddot{z}_V}-[R_{LV}]\underline{\dot{z}_V}-[K_{LV}]\underline{z_V}$$

Impongo $\underline{\ddot{z}_V}=\underline{\dot{z}_V}=\underline{z_V}=\underline{0}$ e modulo della forza uguale a 1: $F_0=1$. Dunque, elimino dall'equazione sopra scritto tutti contributi dovuti a $\underline{z_V}$:

$$[M_{LL}]\underline{\ddot{z}_L}+[R_{LL}]\underline{\dot{z}_L}+[K_{LL}]\underline{z_L}=F_0e^{i\Omega t}=\underline{b}e^{i\Omega t}$$

Dato che impongo che $\underline{z_L} = \underline{z_{L0}} e^{i\Omega t}$

$$\underline{\dot{z}_L} = i\Omega \underline{z_{L0}} e^{i\Omega t}$$
$$\underline{\ddot{z}_L} = -\Omega^2 \underline{z_{L0}} e^{i\Omega t}$$

Ottengo il seguente sistema:

$$[M_{LL}](-\Omega^2 \underline{z_{L0}} e^{i\Omega t}) + [R_{LL}] i\Omega \underline{z_{L0}} e^{i\Omega t} + [K_{LL}] \underline{z_{L0}} e^{i\Omega t} = \underline{b} e^{i\Omega t}$$

$$(-\Omega^2 [M_{LL}] + [R_{LL}] i\Omega + [K_{LL}]) \underline{z_{L0}} e^{i\Omega t} = \underline{b} e^{i\Omega t}$$

$$(-\Omega^2 [M_{LL}] + [R_{LL}] i\Omega + [K_{LL}]) \underline{z_{L0}} = \underline{b}$$

$$[A] \underline{z_{L0}} = \underline{b}$$

Da questa equazione posso ricavare $\underline{z_{L0}} = [A]^{-1} \underline{b}$ cioè un vettore di numeri complessi i cui moduli rappresentano le funzioni di trasferimento dell'ampiezza di vibrazioni di oscillazione con forzamento F. Il modulo della componente della i-esima riga di $\underline{z_{L0}}$ è la funzione di trasferimento in ampiezza del i-esimo grado di libertà:

$$\underline{z_{L0}} = \begin{bmatrix} FRF_{F\to gdl1} \\ FRF_{F\to gdl2} \end{bmatrix}$$

<u>**Funzione di risposta in frequenza da vincolo imposto**</u>

Considero la prima equazione del sistema ottenuta in precedenza con la partizione:

$$[M_{LL}] \underline{\ddot{z}_L} + [R_{LL}] \underline{\dot{z}_L} + [K_{LL}] \underline{z_L} = \underline{Q_L} - [M_{LV}] \underline{\ddot{z}_V} - [R_{LV}] \underline{\dot{z}_V} - [K_{LV}] \underline{z_V}$$

Impongo $\underline{z_{V0}} = \underline{0}$ e $\underline{Q_L} = 1$. Imponiamo che

$$\underline{z_L} = \underline{z_{L0}} e^{i\Omega t} \qquad \underline{z_V} = e^{i\Omega t}$$
$$\underline{\dot{z}_L} = i\Omega \underline{z_{L0}} e^{i\Omega t} \qquad \underline{\dot{z}_V} = i\Omega e^{i\Omega t}$$
$$\underline{\ddot{z}_L} = -\Omega^2 \underline{z_{L0}} e^{i\Omega t} \qquad \underline{\ddot{z}_V} = -\Omega^2 e^{i\Omega t}$$

Dunque si semplifica l'equazione sopra scritta e si ottiene:

$$[M_{LL}](-\Omega^2 \underline{z_{L0}} e^{i\Omega t}) + [R_{LL}] i\Omega \underline{z_{L0}} e^{i\Omega t} + [K_{LL}] \underline{z_{L0}} e^{i\Omega t} = -[M_{LV}](-\Omega^2 e^{i\Omega t}) - [R_{LV}] i\Omega e^{i\Omega t} - [K_{LV}] e^{i\Omega t}$$

$$(-\Omega^2 [M_{LL}] + [R_{LL}] i\Omega + [K_{LL}]) \underline{z_{L0}} e^{i\Omega t} = (\Omega^2 [M_{LV}] - [R_{LV}] i\Omega - [K_{LV}]) e^{i\Omega t}$$

$$(-\Omega^2 [M_{LL}] + [R_{LL}] i\Omega + [K_{LL}]) \underline{z_{L0}} = (\Omega^2 [M_{LV}] - [R_{LV}] i\Omega - [K_{LV}])$$

$$[A] \underline{z_{L0}} = \underline{b}$$

Da questa equazione posso ricavare $\underline{z_{L0}} = [A]^{-1} \underline{b}$ cioè un vettore di numeri complessi i cui moduli rappresentano le funzioni di trasferimento dell'ampiezza di vibrazioni di oscillazione con forzamento z. Il modulo della componente della i-esima riga di $\underline{z_{L0}}$ è la funzione di trasferimento in ampiezza del i-esimo grado di libertà:

$$\underline{z_{L0}} = \begin{bmatrix} FRF_{z\to gdl1} \\ FRF_{z\to gdl2} \end{bmatrix}$$