Riepiogo sull'algebra dei limiti di successioni

$(\boldsymbol{i})$ $\quad Se \ \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \ \ e \ \lim_{n\to\infty} b_n = \beta \ \ allora \ \lim_{n\to\infty}\left(a_n + b_n\right) = \alpha+\beta$

$(\boldsymbol{ii})$ $\quad Se \ \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \ \ e \ \lim_{n\to\infty} b_n = \beta \ \ allora \ \lim_{n\to\infty}\left(a_n b_n\right) = \alpha\beta$

$(\boldsymbol{iii})$ $\quad Se \ \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \ \ e \ \lim_{n\to\infty} b_n = \pm\infty \ \ allora \ \lim_{n\to\infty}\left(a_n + b_n\right) = \pm\infty$

$(\boldsymbol{iv})$ $\quad Se \ \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \neq 0 \ \ allora \ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = \frac{1}{\alpha}$

$(\boldsymbol{v})$ $\quad Se \ \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \ \ allora \ \lim_{n\to\infty}\lambda a_n = \lambda\alpha \ \ (ove \ \lambda\in\mathbb{R})$

$(\boldsymbol{vi})$ $\quad Se \ \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \neq 0 \ \ e \ \lim_{n\to\infty} b_n = \beta \ \ allora \ \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = \frac{\beta}{\alpha}$

Alcuni limiti fondamentali di successioni

$(\boldsymbol{i})$ $\quad Se \ a>1 \ \ allora \ \lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$

$(\boldsymbol{ii})$ $\quad Se \ \left|a\right|<1 \ \ allora \ \lim_{n\to+\infty} a^n = 0$

$(\boldsymbol{iii})$ $\quad Se \ a=1 \ \ allora \ \lim_{n\to+\infty} a^n = 1$

$(\boldsymbol{iv})$ $\quad Se \ a>1 \ \ e \ \lim_{n\to\infty}\alpha_n = +\infty \ \ allora \ \lim_{n\to+\infty} a^{\alpha_n} = +\infty$

$(\boldsymbol{v})$ $\quad Se \ a>1 \ \ e \ \lim_{n\to\infty}\alpha_n = +\infty \ \ allora \ \lim_{n\to+\infty} a^{-\alpha_n} = 0$

$(\boldsymbol{vi})$ $\quad Se \ a>0 \ \ allora \ \lim_{n\to+\infty} a^{1/n} = 1$

$(\boldsymbol{vii})$ $\quad Se \ a>0 \ \ e \ \lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0 \ \ allora \ \lim_{n\to+\infty} a^{\alpha_n} = 1$

$(\boldsymbol{viii})$ $\quad Se \ a>0 \ \ e \ \lim_{n\to\infty}\alpha_n = \alpha \ \ allora \ \lim_{n\to+\infty} a^{\alpha_n} = a^{\alpha}$

$(\boldsymbol{ix})$ $\quad Se \ \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \ \ e \ \ k\in\mathbb{N}^+ \ \ allora \ \lim_{n\to\infty}\sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\alpha}$

$(\boldsymbol{x})$ $\quad Se \ a_n>0 \ \ e \ \ 0<a_{n+1}\big/a_n<\alpha<1 \ \ definitivamente \ per \ n\geq\nu \ \ allora \ \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

$(\boldsymbol{xi})$ $\quad Se \ a_n>0 \ \ e \ \ \left(a_n\right)^{1/n}<\alpha<1 \ \ defintivamente \ per \ n\geq\nu \ \ allora \ \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

$(\boldsymbol{xii})$ $\quad Se \ \alpha>0 \ \ allora \ \lim_{n\to+\infty} n^{\alpha} = +\infty$

$(\boldsymbol{xiii})$ $\quad Se \ \alpha>0 \ \ allora \ \lim_{n\to+\infty} n^{-\alpha} = 0$

$(\boldsymbol{xiv})$ $\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$

Limiti notevoli e "gerarchie" degli infiniti

Nella tabella che segue:

$\left\{x_n\right\}$ è una successione tale che $\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$ (solo $+\infty$ in ⑫ e ⑬);

$\left\{a_n\right\}$ è una successione tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ con $a_n\neq 0$ definitivamente per $n\to\infty$;

$a>1$, $\alpha>0$ e $\beta>0$;

$\lambda\in\mathbb{R}$;

$\left\{t_n\right\}$ è una successione tale che $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ con $t_n\neq 0$ definitivamente per $n\to\infty$;

$\left\{s_n\right\}$ è una successione tale che $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$ con $s_n\neq 0$ definitivamente per $n\to\infty$.

① $\exists \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$ ② $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}=e$ ③ $\lim_{n\to\infty}\left(1+\alpha\, a_n\right)^{1/a_n}=e^{\alpha}$ ④ $\lim_{n\to\infty}\frac{\lg\,(1+\alpha\, a_n)}{a_n}=\alpha$

⑤ $\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{a_n}-1}{a_n}=\lg\alpha$ ⑥ $\lim_{n\to\infty}\frac{(1+a_n)^{\alpha}-1}{a_n}=\alpha$ ⑦ $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin a_n}{a_n}=1$ ⑧ $\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{tg} a_n}{a_n}=1$

⑨ $\lim_{n\to\infty}\frac{\arcsin s_n}{s_n}=1$ ⑩ $\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{ar\,ctg} t_n}{t_n}=1$ ⑪ $\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos a_n}{a_n^{2}}=\frac{1}{2}$ ⑫ $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^{\beta}}{a^{x_n}}=0$

⑬ $\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\log_a x_n\right)^{\alpha}}{x_n^{\beta}}=0$

TEOREMA: *data* $f: I\to\mathbb{R}$ *con* $I\subseteq\mathbb{R}^*$ *e* a *punto d'accumulazione di* I *abbiamo:* $f(x)\to\ell$ *per* $x\to a$ *se e solo se* $\forall\,\{x_n\}\subset I-\{a\}$ *convergente ad* a $f(x_n)\to\ell$ *per* $n\to\infty$. *Per* I *aperto possiamo anche dire*: *se e solo se* $\forall\,\{x_n\}\subset(I-\{a\})\cap\mathbb{Q}$ *convergente ad* a $f(x_n)\to\ell$ *per* $n\to\infty$.

Ciò consente di importare i limiti precedenti alle funzioni reali di variabile reale (per $a>1$, $\alpha>0$ e $\beta>0$):

① $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$ ② $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$ ③ $\lim_{x\to 0}\left(1+\alpha x\right)^{1/x}=e^{\alpha}$ ④ $\lim_{x\to 0}\frac{\lg\,(1+\alpha x)}{x}=\alpha$

⑤ $\lim_{x\to 0}\frac{\alpha^{x}-1}{x}=\lg\alpha$ ⑥ $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha$ ⑦ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ ⑧ $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1$

⑨ $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$ ⑩ $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{artg} x}{x}=1$ ⑪ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^{2}}=\frac{1}{2}$ ⑫ $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\beta}}{a^{x}}=0$

⑬ $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\log_a x)^{\alpha}}{x^{\beta}}=0$

In termini di asintoticità possiamo anche scrivere:

$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\sim e$ per $x\to\pm\infty$ $\left(1+\alpha x\right)^{1/x}\sim e^{\alpha}$ per $x\to 0$ $\lg\,(1+\alpha x)\sim\alpha x$ per $x\to 0$

$\alpha^{x}-1\sim x\lg\alpha$ per $x\to 0$ $(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x$ per $x\to 0$ $\sin x\sim x$ per $x\to 0$

$\arcsin x\sim x$ per $x\to 0$ $\operatorname{arctg} x\sim x$ per $x\to 0$ $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^{2}$ per $x\to 0$

Calcolare i seguenti limiti (sempre che esistano)

(*i*) $\lim_{x\to 0}\frac{A^{x}-B^{x}}{x}=\lg\frac{A}{B}$

<u>*Traccia*</u> $\frac{A^{x}-B^{x}}{x}=\frac{A^{x}-1}{x}-\frac{B^{x}-1}{x}$ etc. (vedi limite notevole 5)

$(\boldsymbol{ii})$ $\quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\pi+4x)}{x}=-4$

Traccia $\quad \dfrac{\sin(\pi+4x)}{x}=\dfrac{-\sin(4x)}{4x}4$ etc (vedi limite notevole 7)

$(\boldsymbol{iii})$ $\quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\frac{\pi(1-x)}{2}}{x}=\dfrac{\pi}{2}$

Traccia $\quad \cos\dfrac{\pi(1-x)}{2}=\cos\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi x}{2}+\sin\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi x}{2}=\sin\dfrac{\pi x}{2}$ etc (vedi limite notevole 7)

$(\boldsymbol{iv})$ $\quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\lg(2-\cos x)}{\sin^2 x}=\dfrac{1}{2}$

Traccia $\quad \lg(2-\cos x)=\lg[1+(1-\cos x)]\sim 1-\cos x$ etc (vedi limite notevole 4)

$(\boldsymbol{v})$ $\quad \lim\limits_{x\to +\infty} x-\sin^2 x\cdot\lg x=+\infty$

Traccia $\quad x-\sin^2 x\cdot\lg x=x\left(1-\sin^2 x\dfrac{\lg x}{x}\right)\sim x$ (vedi limite notevole 13) , etc.

$(\boldsymbol{vi})$ $\quad \lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x\,\mathrm{tg}x}-\dfrac{1}{x\sin x}\right]=-\dfrac{1}{2}$

Traccia $\quad \dfrac{1}{x\,\mathrm{tg}x}-\dfrac{1}{x\sin x}=\dfrac{\cos x-1}{x\sin x}=\dfrac{\cos x-1}{x^2}\dfrac{x}{\sin x}$ etc. (vedi limiti notevoli 11 e 7)

$(\boldsymbol{vii})$ $\quad \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{5+\cos x}}{x^2+1}=0$

Traccia $\quad \sqrt{5+\cos x}\le 6$, il resto è banale…

$(\boldsymbol{viii})$ $\quad \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x+\cos x}{4x-\sin x}=\dfrac{1}{4}$

Traccia $\quad$ Dividere numeratore e denominatore per x, etc.

$(\boldsymbol{ix})$ $\quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{\mathrm{arctg}^3 x}-1}{\mathrm{tg}^3 x}=\lg 2$

Traccia $\quad \dfrac{2^{\mathrm{arctg}^3 x}-1}{\mathrm{tg}^3 x}\sim\dfrac{x^3}{x^3}\lg 2=\lg 2$

$(\boldsymbol{x})$ $\quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\lg(\mathrm{tg}^4 x+1)}{e^{2\sin^4 x}-1}=\dfrac{1}{2}$

Traccia $\quad \mathrm{tg}^4 x\to 0$ per $x\to 0$ e $\sin^4 x\to 0$ per $x\to 0$ quindi $\lg(\mathrm{tg}^4 x+1)\sim\mathrm{tg}^4 x\sim x^4$ e

$e^{2\sin^4 x}-1\sim 2\sin^4 x\sim 2x^4$ donde $\dfrac{\lg(\mathrm{tg}^4 x+1)}{e^{2\sin^4 x}-1}\sim\dfrac{x^4}{2x^4}=\dfrac{1}{2}$.

$(\boldsymbol{xi})$ $\quad \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{[1-\cos(1/x)]^2}{\lg[1+\sin^4(1/x)]}=\dfrac{1}{4}$

Traccia $\quad [1-\cos(1/x)]^2\sim 2^{-2}x^{-4}$ e $\lg[1+\sin^4(1/x)]\sim x^{-4}$

$(\boldsymbol{xii})\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{n^n}{n!2^n} = 0$

Traccia Conviene applicare il limite fondamentale (x) o criterio del rapporto osservando che

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!2^{n+1}}\frac{n!2^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{2} \to \frac{\mathrm{e}}{2} < 1\,.$$

$(\boldsymbol{xiii})\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{n+2}{\sqrt{2^n n^4+1}} = 0$

Traccia Conviene applicare il limite fondamentale (xi) o criterio della radice, osservando che

$$\left(\frac{n+2}{\sqrt{2^n n^4+1}}\right)^{1/n} \sim \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt{\left(2^n n^4+1\right)^{1/n}}} \sim \frac{1}{\sqrt{\left(2^n n^4\right)^{1/n}}} = \frac{2^{-1/2}}{\sqrt{\left(n^4\right)^{1/n}}} \to 2^{-1/2} < 1\,.$$

$(\boldsymbol{xiv})\quad \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3n^3+1}{1+4n^3}\right)^{n/2} = 0$

Traccia Conviene applicare il limite fondamentale (xi) o criterio della radice, osservando che

$$\left(\frac{3n^3+1}{1+4n^3}\right)^{1/2} \to \sqrt{\frac{3}{4}} < 1\,.$$

$(\boldsymbol{xiv})\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{n!\sqrt{\mathrm{e}^n}}{n^n} = 0$

Traccia Conviene applicare il limite fondamentale (x) o criterio del rapporto osservando che

$$\frac{(n+1)!\sqrt{\mathrm{e}^{n+1}}}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{n!\sqrt{\mathrm{e}^n}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \sqrt{\mathrm{e}} \to \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} < 1\,.$$