

Metodi Analitici e Numerici CdL Ingegneria Meccanica 14 settembre 2017	Prof. M.C. Cerutti Prof. P. Zunino	Firma leggibile dello studente
Cognome:	Nome:	Matricola:

ISTRUZIONI

- Riportare le risposte nello spazio indicato.
- Gli esercizi richiedono l'uso di Matlab. Riportare sul foglio esclusivamente gli output richiesti.
- Tempo a disposizione: 2 h.

SPAZIO RISERVATO ALLA COMMISSIONE

Esercizio 1	
Esercizio 2	
Esercizio 3	
Matlab	
Totale	

ESERCIZIO 1. Si consideri un sistema lineare

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

10 punti

dove A è una matrice $n \times n$ e $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

- (a) (2 punti) Si dica sotto quali condizioni sulla matrice A è possibile utilizzare il metodo del gradiente per la soluzione del sistema.

- (b) (2 punti) A quale problema di minimizzazione è equivalente la soluzione del sistema?

(c) (2 punti) Dimostrare che la soluzione del sistema è un punto stazionario del problema di minimizzazione definito al punto (b).

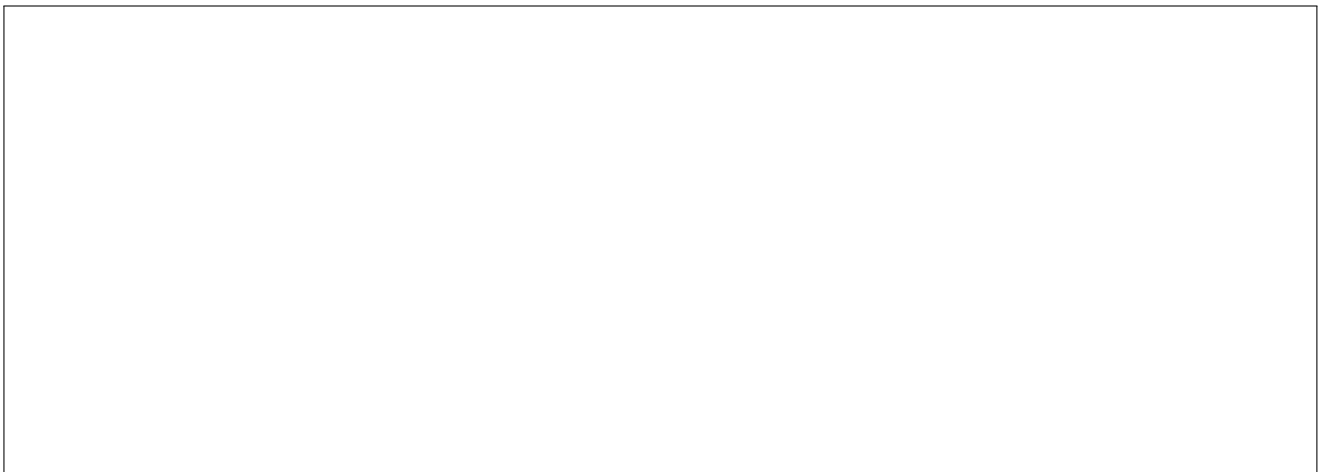
(d) (2 punti) Si scriva il metodo del gradiente.



(e) (2 punti) Si consideri la matrice A di dimensione $n = 12$ tale che

$$a_{ij} = \begin{cases} 8 & \text{se } i = j \\ -1 & \text{se } i = j + 1 \\ -1 & \text{se } j = i + 1 \\ 2 & \text{se } i = j + 2 \\ 2 & \text{se } j = i + 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Usando Matlab, giustificare se A soddisfa le condizioni del metodo del gradiente. Riportare sul foglio il risultato della verifica.



ESERCIZIO 2. Sia $Q = (0, \pi) \times (0, T)$ con $T > 0$ e si consideri il seguente problema:

$$u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0 \quad \text{in } Q,$$

$$u(x, 0) = \pi - 2 \sin x - \frac{3}{2} \sin(2x) - 4x \quad \text{in } [0, \pi],$$

$$u(0, t) = \pi \text{ e } u(\pi, t) = -2\pi, \quad \text{in } (0, T).$$

10 punti

(a) (4 punti) Si determini la soluzione $u = u(x, t)$ del problema in esame.

(N.B. Non è necessario riportare tutta la separazione di variabili ma solo i passaggi principali. È necessario però indicare come si calcolano i coefficienti e riportarne il valore finale.)

(b) (2 punti) La soluzione u è continua su \overline{Q} ? Si giustifichi la risposta.

(c) (2 punti) Si enunci il principio del massimo per le soluzioni dell'equazione in esame.

(d) (2 punti) Quanto vale il massimo di u su \bar{Q} ?

(Se si utilizza un risultato teorico, verificare che ne siano soddisfatte le ipotesi)

ESERCIZIO 3. Si consideri la funzione $f : [1/2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = -\sin^2(\pi x) + \sin(\pi x)$$

10 punti

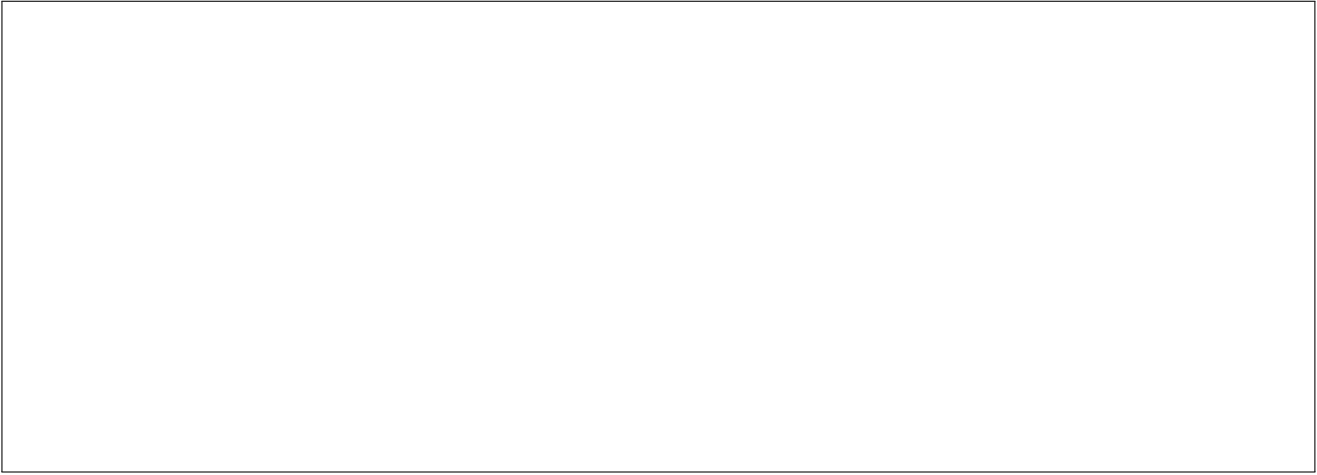
e l'integrale

$$\int_{1/2}^2 f(x) dx.$$

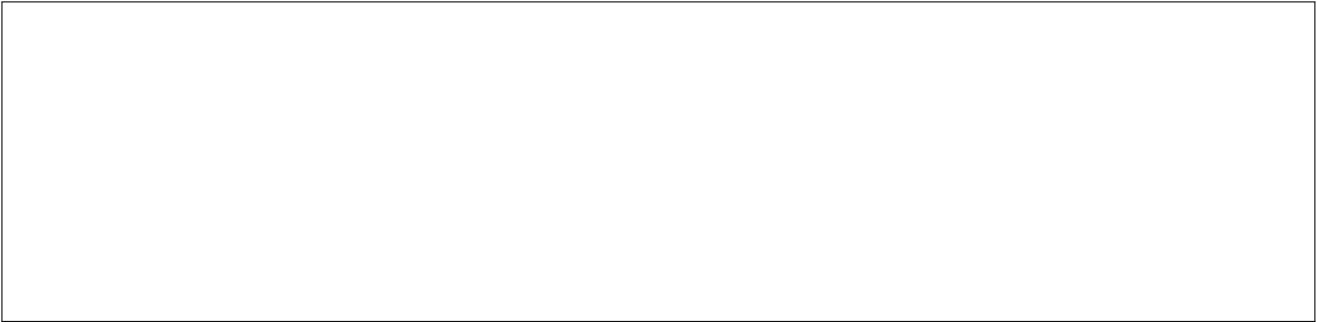
(a) (2 punti) Si definisca l'ordine di convergenza e il grado di esattezza di una formula di quadratura.

(b) (2 punti) Si scriva la formula del punto medio per il calcolo dell'integrale e si dica qual è il grado di esattezza del metodo.

- (c) (2 punti) Si ricavi la formula di quadratura del punto medio composta con nodi equispaziati e si precisi qual è l'ordine di convergenza.



- (d) (2 punti) Si programmi in Matlab la formula del punto medio composta suddividendo l'intervallo in N parti uguali e si calcoli numericamente l'integrale per $N = 5, 10, 20$. Riportare i valori ottenuti.



- (e) (2 punti) Sapendo che l'integrale esatto vale $-\frac{1}{\pi} - \frac{3}{4}$, si verifichi che l'ordine di convergenza è quello precisato al punto (c). Si riporti un commento su quello che è stato fatto.

