

Metodi Analitici e Numerici per l'Ingegneria Docente:			27 Settembre 2016	
Cognome:		Nome:		Matricola:
D 1	D 2	D 3	Matlab	Totale

• Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.

### DOMANDA 1

Si consideri il seguente sistema di equazioni lineari  $Ax = b$  con

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 5 & 3 \\ 7 & 11 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 13 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

e  $\mathbf{b} = [1, 3, 5, 7]^T$ .

1. (T) si enunci una condizione necessaria e sufficiente per fattorizzare una matrice  $A$  in due matrici  $L$  ed  $U$  triangolare inferiore (con coefficienti unitari sulla diagonale) e triangolare superiore, rispettivamente.
2. (T) Quale relazione c'è tra il metodo di eliminazione di Gauss (MEG) e le matrici  $U$  ed  $L$ ? In particolare, illustrare come i coefficienti della matrice  $L$  vengano calcolati attraverso il MEG.
3. (T) Si descriva un metodo per utilizzare la fattorizzazione  $LU$  al fine di risolvere il sistema lineare  $Ax = b$ . Note le matrici  $L$  ed  $U$ , quali algoritmi vengono utilizzati per risolvere i sistemi ad esse relativi? Riportare esplicitamente le espressioni di questi algoritmi.
4. (M) Si verifichi che la matrice dei coefficienti del sistema sopra soddisfa una condizione enunciata al punto 1.
5. (M) Si calcoli la fattorizzazione  $LU$  mediante opportuno comando Matlab.
6. (M) Si risolva il sistema, avendo prima implementato gli algoritmi di cui al punto 3.

## DOMANDA 2

1. (T) Sia  $Q = (0, \pi) \times (0, +\infty)$ . Si enunci il principio del massimo per soluzioni dell'equazione:

$$u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0 \quad (x, t) \in Q.$$

2. (E) Si determini la soluzione  $u = u(x, t)$  del problema

$$\begin{cases} u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0 & \text{in } Q, \\ u(x, 0) = \pi - \sin x - \frac{1}{2} \sin(2x) - 3x & \text{in } [0, \pi], \\ u(0, t) = \pi \text{ e } u(\pi, t) = -2\pi, & \text{in } (0, +\infty). \end{cases}$$

3. (E) La soluzione  $u$  è continua su  $\overline{Q}$ ? Si giustifichi la risposta.
4. (E) Quanto vale il massimo di  $u$  su  $\overline{Q}$ ? (Se si utilizza un risultato teorico, verificare che ne siano soddisfatte le ipotesi)

(N.B. Non è necessario riportare tutta la separazione di variabili ma solo i passaggi principali. E' necessario però indicare come si calcolano i coefficienti e riportarne il valore finale.)

**DOMANDA 3** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} -2u''(x) + 3u(x) = x^2, & 0 < x < 1 \\ u(0) = 1 \\ u'(1) = -1. \end{cases}$$

1. (T) Si ricavi la formulazione debole del problema giustificando i passaggi e motivando la scelta degli spazi funzionali.
2. (T) Si enunci il lemma (o teorema) di Lax-Milgram.
3. (T) Si dimostri che la forma bilineare ottenuta al punto 1 è coerciva.
4. (E) Si disegnino le funzioni di base dello spazio di elementi finiti lineari definiti su una partizione uniforme dell'intervallo  $[0, 1]$  di passo  $h = 1/5$ , che approssimano lo spazio funzionale scelto per la formulazione debole nel punto 1.
5. (M) Si implementi in MATLAB il sistema che si ottiene discretizzando il problema dato con lo spazio di elementi finiti di cui al punto precedente e si disegni il grafico della soluzione approssimata.