Metodi Analitici e Numerici per l'Ingegneria	Quinto appello 16 Settembre 2015

DOMANDA 1 Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} -u''(x) + 2u(x) = \sin x \qquad x \in (0, \pi) \\ u(0) = 0 \\ u'(\pi) = 0\,. \end{cases}$$

1. (T) Si scriva la formulazione debole del problema, indicando chiaramente quali sono gli spazi funzionali e con quale motivazione vengono scelti.
2. (E) Si dimostri la coercività della forma bilineare.
3. (T) Si disegnino le funzioni di base dello spazio di elementi finiti lineari definiti su una partizione unifome dell'intervallo $[0, \pi]$ di passo $h = 1/3$, che approssimano lo spazio funzionale scelto per la formulazione debole.
4. (T) Si scriva l'approssimazione di Galerkin del problema, $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$ ottenuta utilizzando lo spazio degli elementi finiti lineari descritto al punto 3, indicando come gli elementi della matrice A e del vettore $\mathbf{f}$ dipendono dagli elementi della base a elementi finiti.

DOMANDA 2

Si consideri il seguente sistema di equazioni lineari $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

e $b = [1, 5, 3, -1]^T$.

1. (E) Si verifichi una condizione sufficiente per la fattorizzazione LU (senza pivoting).
2. (M) Si calcoli la fattorizzazione LU mediante opportuno comando Matlab.
3. (M) Si implementino gli algoritmi di sostituzione in avanti e indietro.
4. (M) Si risolva il sistema.

DOMANDA 3

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = 3y(t) + \sin t \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. (E) Si risolva il problema utilizzando la trasformata di Laplace.
2. (T) Si ricavi l'algoritmo di Eulero all'indietro (ossia si scriva esplicitamente quale approssimazione si utilizza) prima nel caso generale di un problema di Cauchy del primo ordine, poi applicato a questo problema (giustificando i passaggi). In particolare, si sfrutti la linearità del problema per ricavare una formula esplicita per u_{n+1} in funzione di u_n. Cosa prevede la teoria sull'abbattimento di massimo modulo dell'errore e_h compiuto approssimando la soluzione esatta $y(t_n)$ con la soluzione numerica u_n?

3. (M) Si risolva il problema in oggetto implementando l'algoritmo di Eulero all'indietro ottenuto al punto precedente e sull'intervallo $[0, 4]$ con $h = 0.4$ riportando accuratamente su un grafico la soluzione ottenuta.

4. (M) Sapendo che la soluzione esatta del problema è $y(t) = \frac{1}{10}(11e^{3t} - \cos t - 3\sin t)$, si determini il massimo modulo dell'errore e_h compiuto approssimando la soluzione esatta $y(t_n)$ con la soluzione numerica u_n al variare di $h = [0.4, 0.2, 0.1, 0.05, 0.025]$.