PROPRIETA' DELLE FUNZIONI CONTINUE.

FABIO CIPRIANI

1. Proprieta' fondamentali delle funzioni continue

Dimostriamo qui di seguito tre proprieta' fondamentali delle funzioni continue.

Theorem 1.1. *(Weierstrass: esistenza di estremi globali)*
Sia $f \in C([a,b])$ una funzione continua sull'intervallo chiuso e limitato $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Esistono allora il massimo e minimo globali di f su $[a,b]$.
Piu' precisamente:

$$\exists\, x_m, x_M \in [a,b] \qquad \text{tale che} \qquad x \in [a,b] \qquad \Rightarrow \qquad f(x_m) \le f(x) \le f(x_M)\,.$$

In altre parole, $M := f(x_M)$ e' il valore massimo e $m := f(x_m)$ il valore minimo di f su $[a,b]$.

Proof. Ci limiteremo a provare l'esistenza del massimo. Iniziamo con il mostrare che la funzione e' superiormente limitata.
Se per assurdo non lo fosse, esisterebbe una successione $\{x_n\} \subset [a,b]$, composta da infiniti punti, tale che

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty\,.$$

Poiche' $[a,b]$ e' limitato, la successione $\{x_n\} \subset [a,b]$ e' limitata e, per il Teorema di Bolzano-Weierstrass, esisterebbe un suo punto di accumulazione $x_0 \in [a,b]$ ed, in particolare, una sotto-successione $\{x_{n_k}\}$ convergente a $x_0 \in [a,b]$

$$\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = x_0\,.$$

Poiche' f e' continua, si avrebbe l'assurdo

$$f(x_0) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = +\infty\,.$$

La funzione f e' allora superiormente limitata e quindi l'estremo supriore dei suoi valori su $[a,b]$ e' finito

$$M := \sup f := \sup\{f(x) : x \in [a,b]\} < +\infty\,.$$

Esiste quindi una successione $\{x_n\} \subset [a,b]$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = M\,.$$

Se $\{x_n\}$ e' un insieme finito in almeno un suo punto $x_M \in \{x_n\}$ si ha $f(x_M) = M$: M sarebbe quindi il valore massimo per la funzione e x_M un punto di massimo.
Se invece $\{x_n\}$ e' un insieme infinito, poiche' $[a,b]$ e' limitato esso e' limitato e, per il Teorema di Bolzano-Weierstrass, esiste una sotto-successione $\{x_{n_k}\}$ convergente ad un punto $x_M \in [a,b]$. Poiche' f e' continua

$$M = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_M)$$

e cosi' M e' il valore massimo assunto da f in almeno nel punto x_M di $[a,b]$. □

Theorem 1.2. *(Proprieta' degli zeri di funzioni continue)*
Sia data una funzione continua $f \in C([a,b])$ sull'intervallo chiuso e limitato $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Se

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

allora

$$\exists\, x_0 \in [a,b] \qquad \text{tale che} \qquad f(x_0) = 0\,.$$

Proof. Per comodita' di notazione poniamo $a_0 := a$ e $b_0 := b$. Sia $c := \frac{a_0+b_0}{2}$ il punto medio di $[a_0, b_0]$. Se $f(c) = 0$ abbiamo trovato il punto $x_0 := c$ dove f si annulla. Altrimenti denotiamo con $[a_1, b_1]$ il subintervallo ai cui estremi f assume segno opposto. Iterando questo procedimento (di dicotomia) otteniamo una successione decrescente di intervalli

$$\cdots \subset [a_{n+1}\,, b_{n+1}] \subset [a_n\,, b_n] \cdots \subset [a_1\,, b_1] \subset [a_0\,, b_0]$$

tali che per ogni $n \geq 1$ si ha che

$$f(a_n) \cdot f(b_n) < 0\,. \tag{1.1}$$

Poiche ' la successione $\{a_n\}$ e' crescente e superiormente limitata da b_0

$$\ldots a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots \leq b_0\,,$$

la successione $\{b_n\}$ e' decrescente e inferiormente limitata da a_0

$$a_0 \leq \ldots\ldots b_{n+1} \leq b_n \leq \ldots$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} b_n - a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_0 - a_0}{2^n} = 0\,,$$

per il Teorema 1.1, esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che

$$x_0 = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n\,.$$

Passando al limite nella (1.1), per il Teorema della permanenza del segno e poiche' f e' continua in x_0 si ha che

$$f(x_0)^2 = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \cdot \lim_{n\to\infty} f(b_n) \leq 0$$

e quindi che $f(x_0) = 0$. □

Corollary 1.3. *(Proprieta' dei valori intermedi e immagine di una funzione continua)*
Sia data una funzione continua $f \in C([a,b])$ sull'intervallo chiuso e limitato $[a,b] \subset \mathbb{R}$ e siano

$$M := \max_{[a,b]} f\,, \qquad\qquad m := \min_{[a,b]} f$$

i suoi valori massimo e minimo su $[a,b]$. Allora per ogni $\lambda \in (m, M)$

$$\exists\, x_\lambda \in [a,b] \qquad \text{tale che} \qquad f(x_\lambda) = \lambda\,.$$

In particolare l'immagine di una funzione continua f su di un intervallo chiuso $[a,b]$ e' l'intervallo chiuso $[m, M]$ compreso tra il valore minimo e massimo assoluti:

$$\mathrm{Im}\,(f) := f([a,b]) := \{f(x) \in \mathbb{R} : x \in [a,b]\} = [m, M]\,.$$

Proof. E' sufficiente applicare il Teorema degli Zeri alla funzione continua $g \in C([x_m, x_M])$ definita da $g(x) := f(x) - \lambda$ sull'intervallo chiuso $[x_m, x_M]$ compreso tra un suo punto di minimo x_m e un suo punto di massimo x_M. □

Example 1.4. Mostrare che l'equazione $e^x = 1 + 2x$ ha almeno una soluzione nell'intervallo $(1, 3)$.
Svolgimento. Consideriamo la funzione $f : [1,3] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x := e^x - 1 - 2x)$. La funzione e' continua in quanto composta di funzioni continue (esponenziale, polinomi): $f \in C([1,3])$. Poiche' $f(1) = e - 3 < 0$ e $f(3) = e^3 - 7 > 2^3 - 7 = 1 > 0$, il Teorema degli zeri implica che esiste $x_0 \in (1,3)$ tale che $f(x_0) = 0$ e quindi che $e^{x_0} = 1 + 2x_0$.

Example 1.5. Mostrare che l'equazione $x^3 + 12 = 3x^2 + 4x$ ha ha esattamente tre soluzioni in $\mathbb{R}$.
Svolgimento. Poiche' le soluzioni coincidono con gli zeri del polinomio di terzo grado $f(x) := x^3 - 3x^2 - 4x + 12$, il loro numero non puo' superare tre. Notiamo che f, in quanto polinomio, e' una funzione continua su $\mathbb{R}$. Poiche'

$$f(-3) = -30 < 0 \ , \qquad f(0) = +12 > 0 \ , \qquad f(+\frac{5}{2}) = -\frac{9}{8} < 0 \ , \qquad f(+5) = +42 > 0\,,$$

applicando ripetutamente il Teorema degli zeri alla funzione f sugli intervalli $[-3, 0], [0, +\frac{5}{2}], [+\frac{5}{2}, +5]$ otteniamo l'esistenza di tre zeri $x_1 \in [-3, 0]$, $x_2 \in [0, +\frac{5}{2}]$, $x_3 \in [+\frac{5}{2}, 5]$.