Metodi Analitici e Numerici per l'Ingegneria **CdL Ingegneria Meccanica** **Appello** **08 febbraio 2018**	**Prof. M.C. Cerutti** **Prof. L. Dedè**	**Firma leggibile dello studente**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

ISTRUZIONI

- Riportare le risposte nello spazio indicato.
- Alcuni esercizi richiedono di utilizzare MATLAB; per tali esercizi riportare sul foglio esclusivamente gli output richiesti.
- Utilizzare esclusivamente una penna nera o blu.
- Tempo a disposizione: 2h 45m.

SPAZIO RISERVATO AL DOCENTE

Pre Test	
Esercizio 1	
Esercizio 2	
Esercizio 3	
Totale	

Pre Test

15 punti

1. *(2 punti)* Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 8 \\ 5 & 1 & 5 \\ 10 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ e si determini la sua fattorizzazione LU *senza pivoting*. Riportare il valore dell'elemento $u_{33} = (U)_{33}$ della matrice triangolare *superiore* U.

$$\boxed{u_{33} = -12}$$

2. *(2 punti)* Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b} = (10{,}10{,}10)^T$, e il metodo del gradiente per l'approssimazione della soluzione $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Si calcolino e si riportino: il valore del parametro dinamico ottimale α_0 associato all'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$ usato per determinare l'iterata $\mathbf{x}^{(1)}$ e l'iterata $\mathbf{x}^{(1)} \in \mathbb{R}^3$.

$$\boxed{\alpha_0 = 0{,}126\,866 \qquad \mathbf{x}^{(1)} = (2{,}388\,06, 2{,}3881, -0{,}1493)^T}$$

3. *(1 punto)* Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 17 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$. Quale o quali dei suoi autovalori $\{\lambda_i(A)\}_{i=1}^3$ possono essere approssimati mediante il metodo delle potenze inverse?

$$\boxed{\textbf{solo } \lambda_3(A) = 4}$$

4. *(1 punto)* Assegnati i nodi $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ e $x_4 = 4$ e i dati corrispondenti $y_0 = 6$, $y_1 = 0$, $y_2 = 6$, $y_3 = 6$ e $y_4 = 18$, si determini l'espressione della retta di regressione $r(x)$ approssimante tali dati nel senso dei minimi quadrati.

$$\boxed{r(x) = 1{,}2 + 3\,x}$$

5. *(1 punto)* Si consideri l'approssimazione dell'integrale $\int_0^2 x^{1/4}\,dx$ mediante il metodo di Simpson. Si riporti il valore dell'integrale approssimato I_s.

$$\boxed{I_s = 1{,}729\,736}$$

6. *(1 punto)* Si consideri la funzione $f(x) = 1 - 3^{2x}$. Si riporti il valore approssimato di $f'(\overline{x})$ in $\overline{x} = 0$ ottenuto mediate le differenze finite in avanti, ovvero $\delta_+ f(\overline{x})$, usando il passo $h = \frac{1}{2}$.

$$\boxed{\delta_c f(\overline{x}) = -4}$$

7. *(1 punto)* Si consideri il seguente problema di Neumann per l'equazione di Laplace:

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = 0 & & \text{in } (0,1)^2 \\ -\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0, & \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,1) = 3 & 0 < x < 1, \\ -\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = \alpha, & \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,y) = -5 & 0 < y < 1, \end{cases}$$

Per quale valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ tale problema ammette soluzione?

$$\boxed{\alpha = 2}$$

8. *(1 punto)* Si consideri il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace definito nella regione $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R} \ : \ x^2 + y^2 < 7\}$:

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = 0 & (x,y) \in \Omega, \\ u(x,y) = x & (x,y) \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Si riporti il massimo della soluzione del problema in $\overline{\Omega}$.

$$\boxed{\max_{\overline{\Omega}} u(x,y) = \sqrt{7}}$$

9. *(2 punti)* Si consideri il problema diffusione–reazione con condizioni al contorno di Neumann:

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{6}\, u''(x) + u(x) = 4 & x \in (0,1), \\ -u'(0) = 1, \quad u'(1) = 3. \end{cases}$$

Si consideri la formulazione debole di tale problema che coinvolge la forma bilineare $a : V \times V \to \mathbb{R}$, con V un opportuno spazio funzionale. Si riportino: l'espressione della forma bilineare $a(\cdot,\cdot)$, lo spazio funzionale V scelto e la costante di coercività α associata alla forma.

$$\boxed{a(u,v) = \tfrac{1}{6} \int_0^1 u'\, v'\, dx + \int_0^1 u\, v\, dx, \qquad V = H^1(0,1), \qquad \alpha = \tfrac{1}{6}}$$

10. *(2 punti)* Dato il problema diffusione–trasporto con condizioni al contorno di Dirichlet:

$$\begin{cases} -u''(x) + 2\, u'(x) = 3 & x \in (0,1), \\ u(0) = 1, \quad u(1) = 0, \end{cases}$$

si consideri la sua approssimazione mediate il metodo di Galerkin–Elementi Finiti di grado 1 su una griglia con due elementi equispaziati, ovvero di dimensione $h = \frac{1}{2}$. Si calcoli il valore della soluzione approssimata corrispondente al nodo di griglia $x_1 = \frac{1}{2}$, ovvero u_1.

$$\boxed{u_1 = \tfrac{9}{8}}$$

11. *(1 punto)* Si considerino due funzioni $g(x)$ e $h(x)$ le cui trasformate di Fourier siano rispettivamente $\widehat{g}(\omega) = \mathcal{F}[g(x)](\omega) = \dfrac{12}{\omega^2 + 36}$ e $\widehat{h}(\omega) = \mathcal{F}[h(x)](\omega) = 2\,\pi\,\delta_0(\omega)$, essendo $\delta_0(\omega)$ la delta di Dirac. Indicata con $z(x) = (g * h)(x)$ la convoluzione delle due funzioni, si riporti l'espressione della trasformata di Fourier di $z(x)$, ovvero $\widehat{z}(\omega) = \mathcal{F}[z(x)](\omega)$.

$$\boxed{\widehat{z}(\omega) = \tfrac{24\,\pi}{\omega^2+36}\, \delta_0(\omega)}$$

Esercizi

Esercizio 1. Si consideri una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, definita nell'intervallo $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, dotata dello zero $\alpha \in [a,b]$.

10 punti

(a) *(2 punti)* Si riporti con precisione l'algoritmo del metodo di Newton per la ricerca dello zero α di $f(x)$.

(b) *(4 punti)* Si implementi il metodo di Newton nella funzione Matlab® `newton.m` utilizzando il criterio d'arresto basato sulla differenza tra due iterate successive. La struttura della funzione è:

```
function [xvect,N] = newton(x0,nmax,tol,fun,dfun)
```

Si considerino come *input*: il valore dell'iterata iniziale `x0`; il numero massimo di iterazioni consentite `nmax`; la tolleranza sul criterio d'arresto `tol`; la funzione di cui si vuole calcolare lo zero `fun`; la sua funzione derivata `dfun`. Si considerino come *output*: un vettore `xvect` contenente tutte le iterate del metodo; il numero di iterazioni effettuate `N`.

Si utilizzi la funzione Matlab® `newton.m` implementata precedentemente per approssimare lo zero $\alpha \in \mathbb{R}$ della funzione

$$f(x) = e^{(x-\pi/2)} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2.$$

Si considerino l'iterata iniziale $x^{(0)} = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\right)$, la tolleranza `tol`$= 10^{-3}$ e il numero massimo di iterazioni `nmax`$= 100$. Si riportino: il numero N di iterazioni effettuate, il valore approssimato $x^{(N)}$ dello zero, il residuo corrispondente $r^{(N)} = |f(x^{(N)})|$ e i valori delle iterate $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ (si utilizzino almeno 4 cifre decimali e il formato esponenziale per riportare i risultati).

$N =$ 11 $\quad x^{(N)} =$ 1,5714 $\quad r^{(N)} =$ $3{,}646\,283 \cdot 10^{-7}$

$x^{(1)} =$ 1,987 463 $\quad x^{(2)} =$ 1,815 049

(c) *(2 punti)* Si consideri la funzione $f(x)$ di cui al punto (b) per cui lo zero è $\alpha = \pi/2$. Qual'è l'ordine di convergenza p atteso dal metodo di Newton per la ricerca di α? Si giustifichi la risposta sulla base delle proprietà di convergenza del metodo; si enunci con precisione il risultato teorico corrispondente.

$p =$ 1

(d) *(2 punti)* Si considerino ora $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_n(\mathbf{x}))^T$ tale per cui $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, per $n > 1$; sia $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ un sistema di n equazioni non lineari in n incognite. Si descriva con precisione l'algoritmo del metodo di Newton per la ricerca dello zero $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ di tale sistema di equazioni non lineari.

Esercizio 2. Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y(t)) & t \in (0,+\infty), \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{1}$$

10 punti

con $f(t,y) : (0,+\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y_0 \in \mathbb{R}$.

(a) *(2 punti)* Si pongano $f(t,y) = -2\,y - 2\,\pi\, \sin\left(\frac{\pi}{6}\,t\right)\, e^{-2\,t} + 24\,H(t-12)$ e $y_0 = 12$ nel problema (1), dove $H(t)$ è la funzione Heaviside. Si trasformi secondo Laplace il problema di Cauchy (1) con i dati precedenti e, indicata con $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$ la trasformata della soluzione $y(t)$, si ricavi e si riporti l'espressione di $Y(s)$; si motivino i passaggi svolti.

$Y(s) = 12\,(s+2)/\left[(s+2)^2 + (\frac{\pi}{6})^2\right] + 24\,e^{-12\,s}/\left[s\,(s+2)\right], \qquad s > 0$

(b) *(2 punti)* Si ricavi e si riporti l'espressione della soluzione $y(t)$ del problema di Cauchy di cui al punto (a) tramite l'antitrasformata di Laplace, ovvero a partire da $Y(s)$ come $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)](t)$.

$y(t) = 12\,\cos(\frac{\pi}{6}\,t)\,e^{-2\,t} + 12\,\left[1 - e^{-2\,(t-12)}\right]\,H(t-12), \qquad t \geq 0$

(c) *(2 punti)* Si riporti l'algoritmo (non in stretto linguaggio Matlab®) del metodo di Crank-Nicolson per l'approssimazione del problema di Cauchy *generale* (1); si definisca tutta la notazione utilizzata.

(d) *(4 punti)* Si pongano ora $f(t,y) = -2\,y + 12\,[1 - \cos(3\,t)]$ e $y_0 = 12$ nel problema di Cauchy (1) definito nell'intervallo temporale $(0,\pi)$.

Si utilizzi opportunamente Matlab® per risolvere tale problema mediante il metodo di Crank-Nicolson utilizzando il passo di discretizzazione $h = \pi/20$ per l'intervallo temporale $(0,\pi)$; h partiziona tale intervallo in tempi discreti $t_n = n\,h$ per $n = 0,1,\ldots,N_h$, dove $N_h = \pi/h$. [*Suggerimento*: si osservi che tale problema discretizzato è lineare nelle incognite]

Si riportino: il valore u_1 dell'approssimazione di $y(t_1)$ e il valore u_{N_h} dell'approssimazione di $y(\pi)$ (si indichino i risultati con almeno 4 cifre decimali).

$u_1 =$ 8,830 653 $\qquad\qquad u_{N_h} =$ 7,812 395

Si tracci infine un grafico qualitativo della soluzione approssimata ottenuta.

Esercizio 3. Si consideri il seguente problema di Cauchy-Neumann per l'equazione di diffusione

13 punti

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} - \mu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (x,t) \in (0,\pi) \times (0,+\infty), \\
-\mu \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \mu \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0 & t > 0, \\
u(x,0) = g(x) & x \in (0,\pi),
\end{cases} \tag{2}
$$

dove $g : L^2(0,\pi) \to \mathbb{R}$ è il dato iniziale.

(a) *(3 punti)* Si enunci e si dimostri il teorema di unicità per il generico problema di Cauchy-Neumann (2).

(b) *(2 punti)* Si consideri il metodo di separazione delle variabili per la soluzione del problema (2) e si riporti l'espressione della forma generale di tale soluzione $U(x,t)$ in termini dei coefficienti $\{B_n\}_{n=0}^{n}$ della serie di Fourier e dei dati del problema.

$$U(x,t) = B_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \cos(n\,x)\, e^{-\mu\, n^2\, t}$$

Posto ora il dato iniziale $g(x) = 4\,H\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$, dove $H(x)$ è la funzione Heaviside, si calcolino e si riportino i coefficienti B_0, B_1, B_2, B_3, B_4 e B_5 della serie.

$B_0 = 2$ $\quad$ $B_1 = 8\,\frac{1}{\pi}$ $\quad$ $B_2 = 0$

$B_3 = -\frac{8}{3}\,\frac{1}{\pi}$ $\quad$ $B_4 = 0$ $\quad$ $B_5 = \frac{8}{5}\,\frac{1}{\pi}$

(c) *(2 punti)* Per la soluzione $U(x,t)$ in separazione delle variabili di cui al punto (b), si verifichi che $U(\frac{\pi}{2},t) = K$ è costante per $t > 0$ e che inoltre $\lim_{t\to+\infty} U(x,t) = K$ per ogni $x \in (0,\pi)$. Se ne fornisca un'interpretazione fisica e si riporti il valore di K.

$K =$ 2

(d) *(2 punti)* Si scriva la formulazione debole del problema (2) definendo con precisione tutta la notazione utilizzata e giustificando la scelta dello spazio funzionale.

(e) *(4 punti)* Si considerino ora i seguenti dati per il problema (2): $g(x) = 4\,(1 + \cos(x))$ e $\mu = 1$.

Si consideri il metodo degli Elementi Finiti di grado $r = 1$ definiti su una partizione uniforme di $[0,\pi]$ con passo $h = \pi/10$ per l'approssimazione spaziale del problema (2) nella formulazione debole di cui al punto (d). Sia $u_h(x,t) = \sum_{j=1}^{N_h} u_j(t)\,\psi_j(x)$ la soluzione del problema, essendo N_h la dimensione dello spazio Elementi Finiti e $\{\psi_j(x)\}_{j=1}^{N_h}$ la sua base. Il problema semi-discretizzato in spazio si riscrive nel sistema di equazioni differenziali ordinarie del prim'ordine

$$\begin{cases} M\,\dfrac{d\mathbf{u}}{dt}(t) + A\mathbf{u}(t) = \mathbf{0} & t \in (0,+\infty), \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{g}, \end{cases} \tag{3}$$

dove $A, M \in \mathbb{R}^{N_h\times N_h}$, $\mathbf{u}(t) = (u_1(t),\ldots,u_{N_h}(t))^T \in \mathbb{R}^{N_h}$ e $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^{N_h}$; $\mathbf{g}$ è il vettore associato al dato iniziale $g(x)$.

Si riportino: i valori delle componenti A_{11}, A_{12} e A_{22} della matrice A; i valori delle componenti M_{11}, M_{12} e M_{22} della matrice M; i valori delle componenti g_1 e g_2 del vettore $\mathbf{g}$ (si indichino i risultati con almeno 4 cifre decimali).

$A_{11} =$ 3,183 099 $\quad$ $A_{12} =$ −3,183 099 $\quad$ $A_{22} =$ 6,366 198

$M_{11} =$ 0,104 72 $\quad$ $M_{12} =$ 0,052 36 $\quad$ $M_{22} =$ 0,209 44

$g_1 =$ 8 $\quad$ $g_2 =$ 7,804 226

Si consideri ora la discretizzazione in tempo del problema semi-discreto (3) per $t \in (0,1]$ mediante il metodo di Eulero Implicito con passo di avanzamento temporale $\Delta t = 10^{-1}$. Si indichi con $\mathbf{u}^k = (u_1^k, u_2^k, \ldots, u_{N_h}^k)^T \in \mathbb{R}^{N_h}$ il vettore dei valori nodali della soluzione approssimata al tempo discreto $t_k = k\,\Delta t$, per $k = 0, 1, \ldots, N_t$ con $N_t = 1/\Delta t$.

Si risolva il problema usando Matlab® e si riportino i valori delle seguenti componenti della soluzione approssimata: $u_1^1 \simeq u_1(\Delta t)$, $u_1^2 \simeq u_1(2\,\Delta t)$ e $u_1^{N_t} \simeq u_1(1) = u_1(10\,\Delta t)$ (si indichino i risultati con almeno 4 cifre decimali).

$u_1^1 =$ 7,633 638 $\quad$ $u_1^2 =$ 7,300 831 $\quad$ $u_1^{N_t} =$ 5,530 652