DOMANDA 1

1. (T) Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un insieme aperto e limitato. Sia $\partial\Omega$ il bordo di ω. Si enunci principio del massimo per soluzioni del problema:
$$\Delta u = 0 \qquad x \in \Omega\,.$$

2. (T) Si enunci una proprietà del valor medio per soluzioni del problema:
$$\Delta u = 0 \qquad x \in \Omega\,.$$

3. (E) Sia $B_1 \subset \mathbb{R}^2$ il cerchio di centro nell'origine e raggio 1 e ∂B_1 la circonferenza. Si consideri il problema di Dirichlet
$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in} \quad B_1, \\ u(x,y) = 2x^2 + y^2 + \sqrt{3}xy & \text{on} \quad \partial B_1. \end{cases}$$
Si calcoli il valore della soluzione $u(0,0)$.

4. (E) Sempre relativamente all'esercizio al punto precedente, di trovino massimo e minimo assoluti della soluzione $u(x,y)$ su $\bar{B}_1$.

5. (E) Si trovi la soluzione del problema al punto 2) con il metodo di separazione delle variabili, senza riportare tutto il procedimento e indicando solo come calcolare i coefficienti.

6. (Facoltativo, da svolgersi solo dopo aver completato tutto il resto) Calcolare anche i coefficienti e scrivere la soluzione in coordinate cartesiane.

(N.B. E' utile ricordare le formule $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ e $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$.)

DOMANDA 2 Si consideri la funzione $f : [-1,\pi] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \cos(3x)$ e l'integrale
$$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx\,.$$

1. (T) Si definisca con precisione l'ordine di convergenza e il grado di esattezza di un metodo di approssimazione di integrali.
2. (T) Si ricavi la formula di quadratura del trapezio composita per il calcolo dell'integrale con nodi equispaziati e si precisi qual è l'ordine di convergenza e il grado di esattezza.
3. (E) Si calcoli analiticamente l'integrale.
4. (M) Si programmi in Matlab l'algoritmo del trapezio suddividendo l'intervallo in N parti uguali.
5. (M) Si calcoli numericamente l'integrale e l'errore per $N = 4, 8, 16, 32$.
6. (M) Si deduca l'ordine di convergenza del metodo, e lo si confronti con il risultato teorico.

DOMANDA 3 Si consideri il problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y'(t) = 2y(t) + \exp(-t), \quad t > 0 \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

1. (E) Si risolva il problema utilizzando la trasformata di Laplace, riportando i passaggi.

   Si ricorda che la trasformata di Laplace $\mathcal{L}$ della funzione esponenziale è $\mathcal{L}\exp(-at) = \frac{1}{a+s}$.

2. (T) Si ricavi l'algoritmo di Eulero all'indietro applicato a questo problema.

3. (T) Cosa prevede la teoria sull'abbattimento del massimo modulo dell'errore e_h compiuto approssimando la soluzione esatta $y(t_n)$ con la soluzione numerica u_n?

4. (M) Si risolva il problema in oggetto implementando l'algoritmo di Eulero all'indietro per il problema in esame sull'intervallo $[0, 4]$ con $h = 0.4$ riportando accuratamente su un grafico la soluzione ottenuta.

5. (M) Sapendo che la soluzione esatta del problema è $y(t) = \frac{1}{3}\left(\exp(2t) - \exp(-t)\right)$, si determini il massimo modulo dell'errore e_h compiuto approssimando la soluzione esatta $y(t_n)$ con la soluzione numerica u_n al variare di $h = [0.4, 0.2, 0.1, 0.05, 0.025]$.