Metodi Analitici e Numerici per l'Ingegneria	I appello 18 Febbraio 2015

DOMANDA 1
Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} -u''(x) - u'(x) = -x, \quad 0 < x < 1 \\ u'(0) = -1 \\ u(1) = 1\,. \end{cases}$$

1. (T) Si ricavi la formulazione debole del problema giustificando i passaggi e motivando la scelta degli spazi funzionali.
2. (T) Si dimostri che la forma bilineare ottenuta al punto precedente è continua e coerciva.
3. (T) Si enunci il lemma (o teorema) di Lax-Milgram.
4. (E) Si disegnino le funzioni di base dello spazio di elementi finiti lineari definiti su una partizione unifome dell'intervallo $[0, 1]$ di passo $h = 1/4$, che approssimano lo spazio funzionale scelto per la formulazione debole.
5. (E) Si scriva il sistema lineare corrispondente all'approssimazione ad elementi finiti.
6. (M) Si implementi in MATLAB il sistema, lo si risolva e si disegni il grafico della soluzione.

DOMANDA 2 Si consideri la funzione $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = e^{3x}$ e l'integrale

$$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx\,.$$

1. (T) Si definisca l'ordine di convergenza e il grado di esattezza di un metodo di approssimazione di integrali.
2. (T) Si scriva la formula del punto medio per il calcolo dell'integrale e si ricavi il grado di esattezza del metodo.
3. (T) Si ricavi la formula di quadratura del punto medio composita con nodi equispaziati e si precisi qual è l'ordine di convergenza.
4. (E) Si calcoli analiticamente l'integrale.
5. (M) Si programmi in Matlab l'algoritmo del punto medio suddividendo l'intervallo in N parti uguali.
6. (M) Si calcoli numericamente l'integrale e l'errore per $N = 8, 16, 32, 64$.
7. (M) Si deduca l'ordine di convergenza del metodo, e lo si confronti con il risultato teorico.

DOMANDA 3 Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(t) - y'(t) - 2y(t) = e^t, \quad t > 0 \\ y(0) = y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

1. (E) Sia $Y(s)$ la trasformata di Laplace della soluzione. Si calcoli la trasformata di Laplace dell'equazione.
2. (E) Si calcoli $Y(s)$ risolvendo l'equazione ottenuta al punto 1.

3. (E) Utilizzando il risultato al punto 2, si determini, motivando ogni passaggio, la soluzione $y(t)$ per $t \geq 0$.

4. (T) Si scriva l'equazione come un sistema di primo ordine.

5. (T) Si ricavi il metodo di Eulero in avanti per la soluzione di un problema di Cauchy per un sistema di 2 equazioni differenziali.

6. (M) Si risolva il problema di Cauchy nell'intervallo di tempo $[0, 1]$ usando il metodo di eulero in avanti con passi di discretizzazione $h = 1/5, 1/10, 1/20, 1/40$. Si riporti il grafico della soluzione numerica ottenuta con $h = 1/40$.

7. (M) Conoscendo il valore esatto $y(1) = \frac{1}{6e} + \frac{e^2}{3} - \frac{e}{2}$, si valuti l'andamento dell'errore $e_h = |y(1) - y_h(1)|$ al diminuire del passo di discretizzazione temporale, calcolandolo per i valori di h del punto precedente. Si confronti quanto ottenuto con il risultato teorico (si scriva commento).