Metodi Analitici e Numerici per l'Ingegneria **CdL Ingegneria Meccanica** **<u>I Prova in Itinere</u>** **15 novembre 2017**	**Prof. M.C. Cerutti** **Prof. L. Dedè**	**Firma leggibile dello studente**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

ISTRUZIONI

- Riportare le risposte nello spazio indicato.
- Alcuni esercizi richiedono di utilizzare MATLAB; per tali esercizi riportare sul foglio esclusivamente gli output richiesti.
- Utilizzare esclusivamente una penna nera o blu.
- Tempo a disposizione: 1h 45m.

SPAZIO RISERVATO AL DOCENTE

Pre Test	
Esercizio 1	
Esercizio 2	
Totale	

Pre Test

10 punti

1. *(1 punto)* Sia $A = \begin{bmatrix} 1 & \beta & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ una matrice dipendente da un parametro $\beta \in \mathbb{R}$. Per quali valori di $\beta \in \mathbb{R}$ la matrice A ammette un'unica fattorizzazione LU (senza pivoting)?

2. *(1 punto)* Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 17 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$. Quale o quali dei suoi autovalori $\{\lambda_i(A)\}_{i=1}^3$ possono essere approssimati mediante il metodo delle iterazioni QR?

3. *(1 punto)* Si consideri la funzione $f(x) = e^{3x-7} - 1$ e il metodo di Newton per l'approssimazione dello zero $\alpha = \frac{7}{3}$. Si riporti il valore della prima iterata $x^{(1)}$ del metodo assumendo l'iterata iniziale $x^{(0)} = \frac{8}{3}$.

4. *(1 punto)* Assegnati i nodi $x_i = (2+i)$ per $i = 0,1,\ldots,4$ e i corrispondenti valori $y_i = \sqrt{x_i + 1}$, qual è il grado n del polinomio $\Pi_n(x)$ interpolante tali dati?

5. *(1 punto)* Si consideri la formula di quadratura di Simpson per l'approssimazione dell'integrale $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$, dove $f(x) = 6\,x^3 - x^2 + 1$, $a = 2$ e $b = 4$; si riporti il valore dell'errore $E_s(f)$ associato all'applicazione di tale formula di quadratura.

6. *(1 punto)* Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = 7\,t + 4\,y(t) & t \in (0,10), \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Utilizzando il metodo di Eulero all'indietro (Eulero Implicito) con passo $h = 1/10$ e $u_0 = y_0 = 2$, si riporti il valore calcolato di u_1, ovvero l'approssimazione di $y(t_1)$.

7. *(2 punti)* Dato il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) \\ y'(t) = \ 6\,x(t) - 5\,y(t) & \qquad t \in (0,+\infty), \\ z'(t) = \ 9\,x(t) - 3\,y(t) - 2\,z(t) \\ x(0) = y(0) = z(0) = 6, \end{cases}$$

si consideri il metodo di Eulero in avanti (Eulero Esplicito) per la sua approssimazione. Si determini la condizione sul passo h tale da garantire l'assoluta stabilità del metodo.

8. *(2 punti)* Si consideri il seguente problema di Cauchy–Dirichlet:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) & x \in (0,\pi),\ t \in (0,+\infty), \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t \in (0,+\infty), \\ u(x,0) = 2\,\sin(3\,x) & x \in (0,\pi). \end{cases}$$

Si riportino l'espressione della soluzione $u(x,t)$ e il suo valore massimo u_{max} in $[0,\pi]\times[0,+\infty)$.

Esercizi

Esercizio 1. Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matrice simmetrica e definita positiva, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, e $n \geq 1$.

11 punti

(a) *(2 punti)* Si riporti l'algoritmo (*non* in stretto linguaggio Matlab®) del metodo del *gradiente* per la soluzione del *sistema lineare* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$; si definisca tutta la notazione utilizzata.

(b) *(3 punti)* Si riporti il problema di minimo associato alla funzione $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (energia del sistema) equivalente alla risoluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Si dimostri l'equivalenza dei due problemi.

(c) *(4 punti)* Si implementi il metodo del gradiente in Matlab® nella funzione `gradiente.m`. Si utilizzi il criterio d'arresto basato sul residuo relativo (detto anche residuo normalizzato). La struttura della funzione è:

```
function [x,Nit] = gradiente(A,b,x0,nmax,tol).
```

Si considerino come *input*: `A`, la matrice assegnata; `b`, il termine noto assegnato; `x0`, l'iterata iniziale; `nmax`, il numero massimo di iterazioni consentite; `tol`, la tolleranza sul criterio d'arresto. Si considerino come *output*: `x`, la soluzione approssimata; `Nit`, il numero di iterazioni effettuate.

Si utilizzi la funzione `gradiente.m` per approssimare la soluzione del sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = (12, 12, \ldots, 12)^T \in \mathbb{R}^{700}$ e $A \in \mathbb{R}^{700\times700}$ definita come

$$A = \mathrm{tridiag}\,(-14, 29, -14)\,;$$

si consideri l'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (1,1,\ldots,1)^T$, la tolleranza `tol`$= 10^{-3}$ e `nmax`$= 1000$.

Si riportino: il numero N di iterazioni effettuate, la terza componente della soluzione approssimata $\mathbf{x}^{(N)}$, ossia $x_3^{(N)}$, e il valore del corrispondente residuo relativo $r_{rel}^{(N)}$ (in formato esponenziale con almeno 4 cifre decimali).

$N =$ ____________ $\quad x_3^{(N)} =$ ________________________ $\quad r_{rel}^{(N)} =$ ________________________

Infine, utilizzando opportunamente la funzione `gradiente.m`, si riportino i valori della terza componente delle iterate $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$, ossia $x_3^{(1)}$ e $x_3^{(2)}$.

$x_3^{(1)} =$ ________________________ $\quad x_3^{(2)} =$ ________________________

(d) *(2 punti)* Si riporti il risultato (teorema) di convergenza del metodo del gradiente definendo tutta la notazione utilizzata. Inoltre, senza applicare esplicitamente il metodo del gradiente, si utilizzi il risultato precedente per *stimare* l'errore $\|\mathbf{e}^{(k)}\|_A = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}\|_A$ associato all'applicazione di $k = 350$ iterazioni del metodo per la soluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ indicato al punto (c) dove però $\mathbf{x}^{(0)}$ è tale per cui $\|\mathbf{e}^{(0)}\|_A = 1$ (si riporti il risultato in formato esponenziale).

$\|\mathbf{e}^{(k)}\|_A \leq$ ________________________

ESERCIZIO 2. Si consideri l'equazione di Laplace con condizioni al contorno di Dirichlet

12 punti

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = 0 & (x,y) \in \Omega, \\ u(x,y) = g(x,y) & (x,y) \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

definita nel cerchio centrato nell'origine e raggio $R > 0$, ossia $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 < R^2\}$, con g il dato di Dirichlet.

(a) *(4 punti)* Si enunci e si dimostri il teorema di unicità per il problema di Laplace–Dirichlet (1).

(b) *(1 punto)* Si scriva il problema (1) in coordinate polari (r,θ).

(c) *(1 punto)* Si scrivano le due equazioni differenziali ordinarie che si ottengono rispettivamente per $\Lambda(r)$ e $\Theta(\theta)$ cercando funzioni armoniche nel cerchio nella forma $U(r,\theta) = \Lambda(r)\,\Theta(\theta)$.

(d) *(1 punto)* Quale condizione bisogna imporre sulla funzione $\Theta(\theta)$ affinchè siano ammesse soluzioni nel cerchio nella forma $U(r,\theta) = \Lambda(r)\,\Theta(\theta)$?

(e) *(2 punti)* Si riporti la forma generale della soluzione $U(r,\theta)$ ottenuta per separazione delle variabili in coordinate polari riferita al problema (1) nel cerchio Ω.

$U(r,\theta) =$ ______________________________

Posti ora $R = 5$ e $g(x,y) = 50 - x^2$, si scrivano la soluzione del problema (1) in coordinate polari, ossia $U(r,\theta)$, e la corrispondente soluzione in coordinate cartesiane, ossia $u(x,y)$.
(*Suggerimento*: $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$)

$U(r,\theta) =$ ______________________________ $u(x,y) =$ ______________________________

(f) *(1 punto)* Si enunci la proprietà della media per funzioni armoniche riferita al bordo ∂B_R di un cerchio $B_R \subset \Omega \subset \mathbb{R}^2$.

(g) *(2 punti)* Si consideri ora il problema (1) con un dato di Dirichlet generale $g(\theta)$ riportato in coordinate polari. Si utilizzi il risultato enunciato al punto (f) per la valutazione della soluzione u nell'origine del cerchio, ossia $u(0,0)$, e se ne riporti l'espressione in funzione di $g(\theta)$.

$u(0,0) =$ ______________________________

Posto ora $g(\theta) = e^{\sin\theta}\left(\frac{5}{2} + \sin\theta\right)$, si applichi opportunamente la formula di quadratura dei trapezi composita per determinare l'*approssimazione* di $u(0,0)$, indicata come U_h, su $M = 8$ intervalli equispaziati. Si calcoli U_h usando Matlab® e se ne riporti il valore con almeno 4 cifre decimali.

$U_h =$ ____________________