Metodi Analitici e Numerici per l'Ingegneria	I prova parziale
Compito A	**24 Novembre 2015**

DOMANDA 1

Si consideri il seguente sistema di equazioni lineari $Ax = b$ con

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 5 & 3 \\ 7 & 11 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 13 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

e $\mathbf{b} = [1,\ 3,\ 5,\ 7]^T$.

1. (T) si enunci una condizione necessaria e sufficiente per fattorizzare una matrice A in due matrici L ed U triangolare inferiore (con coefficienti unitari sulla diagonale) e triangolare superiore, rispettivamente.
2. (T) Si illustri quale relazione c' è tra il metodo di eliminazione di Gauss e le matrici U ed L.
3. (T) Si descriva un metodo per utilizzare la fattorizzazione LU al fine di risolvere il sistema lineare $Ax = b$ cioè note le matrici L ed U, quali algoritmi vengono utilizzati.
4. (E) Si calcoli quale è il costo computazionale degli algoritmi al punto precedente.
5. (M) Si verifichi che la matrice dei coefficienti del sistema sopra soddisfa una condizione enunciata al punto 1.
6. (M) Si calcoli la fattorizzazione LU mediante opportuno comando Matlab.
7. (M) Si risolva il sistema, avendo prima implementato gli algoritmi di cui al punto 3.

DOMANDA 2 Si consideri la funzione:

$$f(x) = \cos^2 x + \sin x - 1\,,$$

per $x \in [-1, 3]$.

1. (T) Si illustri il metodo di Newton per la ricerca di zeri di una funzione, spiegando da dove deriva il metodo.
2. (T) Si riporti la formula modificata per la ricerca di zeri multipli.
3. (E) Si calcoli la derivata $f'(x)$ della funzione data.
4. (E) Si scriva la prima iterata del metodo con $x_0 = \pi/4$.
5. (M) Si traccino i grafici della funzione $f(x)$ e della derivata $f'(x)$ nella stessa figura.
6. (M) Dopo aver stimato dal grafico gli zeri di $f(x)$, si implementi con Matlab il metodo di Newton scegliendo opportunamente il punto di partenza e la tolleranza.
7. (M) Sapendo che le radici sono $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = \pi/2$, osservando l'andamento di $e_n = |x_n - \alpha|$, si stimi l'ordine di convergenza dell'algoritmo nei due casi e lo si confronti con un risultato teorico. (Suggerimento: si tracci un grafico in scala semilogartmica.)
8. (M) Se valutato conveniente (anche dall'osservazione del grafico di $f(x)$) si utilizzi il metodo modificato per una delle radici e in questo caso si illustri con un grafico migliora l'ordine di convergenza.

DOMANDA 3

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(0) = y_0 \,. \end{cases}$$

1. (T) Si ricavi il metodo di Eulero all'indietro per la soluzione del problema.

2. (T) Si spieghi cosa significa che un metodo numerico di risoluzione di un problema di Cauchy è *consistente* e cosa significa che è *convergente*.

3. (E) Si consideri ora il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = 2t^3 y(t) + \sin t \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

   e si scriva il metodo di Eulero all'indietro in questo caso osservando che è possibile esprimerlo con una formula esplicita.

4. (E) (FACOLTATIVO: da fare solo se si è terminato tutto il resto del compito) Provare a scrivere una formula chiusa per l'espressione della soluzione numerica del punto precedente.

Metodi Analitici e Numerici per l'Ingegneria **Compito B**	**I prova parziale** **24 Novembre 2015**

DOMANDA 1
Si consideri il seguente sistema di equazioni lineari $Ax = b$ con

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 8 & 6 & 4 \\ 8 & 12 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 14 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

e $\mathbf{b} = [2,\ 4,\ 6,\ 8]^T$.

1. (T) si enunci una condizione necessaria e sufficiente per fattorizzare una matrice A in due matrici L ed U triangolare inferiore (con coefficienti unitari sulla diagonale) e triangolare superiore, rispettivamente.
2. (T) Si illustri quale relazione c' è tra il metodo di eliminazione di Gauss e le matrici U ed L.
3. (T) Si descriva un metodo per utilizzare la fattorizzazione LU al fine di risolvere il sistema lineare $Ax = b$ cioè note le matrici L ed U, quali algoritmi vengono utilizzati.
4. (E) Si calcoli quale è il costo computazionale degli algoritmi al punto precedente.
5. (M) Si verifichi che la matrice dei coefficienti del sistema sopra soddisfa una condizione enunciata al punto 1.
6. (M) Si calcoli la fattorizzazione LU mediante opportuno comando Matlab.
7. (M) Si risolva il sistema, avendo prima implementato gli algoritmi di cui al punto 3.

DOMANDA 2 Si consideri la funzione:

$$f(x) = -\cos^2 x + \sin x + 1\,,$$

per $x \in [-3, 1]$.

1. (T) Si illustri il metodo di Newton per la ricerca di zeri di una funzione, spiegando da dove deriva il metodo.
2. (T) Si riporti la formula modificata per la ricerca di zeri multipli.
3. (E) Si calcoli la derivata $f'(x)$ della funzione data.
4. (E) Si scriva la prima iterata del metodo con $x_0 = -\pi/4$.
5. (M) Si traccino i grafici della funzione $f(x)$ e della derivata $f'(x)$ nella stessa figura.
6. (M) Dopo aver stimato dal grafico gli zeri di $f(x)$, si implementi con Matlab il metodo di Newton scegliendo opportunamente il punto di partenza e la tolleranza.
7. (M) Sapendo che le radici sono $\alpha_1 = -\pi/2$ e $\alpha_2 = 0$, osservando l'andamento di $e_n = |x_n - \alpha|$, si stimi l'ordine di convergenza dell'algoritmo nei due casi e lo si confronti con un risultato teorico. (Suggerimento: si tracci un grafico in scala semilogartmica.)
8. (M) Se valutato conveniente (anche dall'osservazione del grafico di $f(x)$) si utilizzi il metodo modificato per una delle radici e in questo caso si illustri con un grafico migliora l'ordine di convergenza.

DOMANDA 3

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(0) = y_0 \,. \end{cases}$$

1. (T) Si ricavi il metodo di Crank-Nicolson per la soluzione del problema.
2. (T) Si spieghi cosa significa che un metodo numerico di risoluzione di un problema di Cauchy è *consistente* e cosa significa che è *convergente*.
3. (E) Si consideri ora il problema di Cauchy

   $$\begin{cases} y'(t) = 3t^2 y(t) + \sin t \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

   e si scriva il metodo di Crank-Nicolson in questo caso osservando che è possibile esprimerlo con una formula esplicita.
4. (E) (FACOLTATIVO: da fare solo se si è terminato tutto il resto del compito) Provare a scrivere una formula chiusa per l'espressione della soluzione numerica del punto precedente.