Metodi Analitici e Numerici CdL Ingegneria Meccanica 22 novembre 2016	Prof. M.C. Cerutti Prof. P. Zunino	Firma leggibile dello studente
Cognome:	Nome:	Matricola:

ISTRUZIONI

- Riportare le risposte nello spazio indicato.
- Gli esercizi richiedono l'uso di Matlab. Riportare sul foglio esclusivamente gli output richiesti.
- Tempo a disposizione: 2 h.

SPAZIO RISERVATO ALLA COMMISSIONE

Esercizio 1	
Esercizio 2	
Esercizio 3	
Esercizio 4	
Matlab	
Totale	

Esercizio 1. Cosiderare il seguente sistema lineare

13 punti

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

dove $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ è una matrice invertibile e $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ è un vettore colonna.

(a) *(2 punti)* Enunciare la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza e l'unicità della fattorizzazione LU di A, spiegando il significato delle eventuali proprietà citate.

(b) *(2 punti)* Enunciare due condizioni sufficienti per l'esistenza e unicità della fattorizzazione LU della matrice A (sempre spiegando il significato delle eventuali proprietà citate).

(c) *(3 punti)* Scrivere quali sistemi occorre risolvere al posto di $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ una volta effettuata la fattorizzazione LU di A e scrivere gli algoritmi per risolvere questi sistemi.

(d) *(1 punto)* Verificare, utillizzando Matlab®, che la matrice H, ($H(i,j) = \frac{1}{i+j-1}$, con $i,j = 1, \ldots 9$),

nota come *matrice di Hilbert* di dimensione $n = 9$, e richiamabile con il comando `hilb` Matlab® :

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}.$$

soddisfa una delle condizioni sufficienti per l'esistenza e unicità della fattorizzazione LU. Si riporti la condizione verificata.

(e) *(1 punto)* Calcolare le matrici L ed U mediante il comando `lu` di Matlab® . È stato effettuato pivoting?

(f) *(2 punti)* Utilizzare le matrici L e U per risolvere, tramite Matlab® , il sistema lineare con $\mathbf{b} = A[1,1,\ldots,1]^T$ e sia $\mathbf{x}$ la soluzione calcolata.

(g) *(2 punti)* Sapendo che la soluzione esatta del sistema è $\mathbf{x}_{ex} = [1,1,\ldots,1]^T$ si calcolino la norma dell'errore relativo $\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_{ex}\|}{\|\mathbf{x}_{ex}\|}$ e la norma del residuo normalizzato $\frac{\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{b}\|}$. Si riportino i risultati ottenuti e si commenti il risultato ottenuto alla luce della teoria.

Esercizio 2.

10 punti

(a) *(2 punti)* Descrivere, spiegando da dove deriva, la formula di quadratura di Cavalieri-Simpson semplice per l'approssimazione dell'integrale,

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx. \tag{1}$$

Definire il grado di esattezza di un metodo di quadratura e specificare quanto vale in questo caso.

(b) *(2 punti)* Qual è il grado di esattezza massimo che si può ottenere (con nodi e pesi scelti opportunamente) usando per il calcolo dell'integale un polinomio interpolante di grado 2?

(c) *(2 punti)* Scrivere la formula di quadratura di Cavalieri-Simpson composita per l'approssimazione dell'integrale (4) spiegando come deriva dall'analoga formula semplice e specificandone in particolare la formula dell'errore. Definire l'ordine di accuratezza (o di convergenza) di un metodo di quadratura e specificare quanto vale in questo caso.

(d) *(2 punti)* Scrivere una funzione Matlab® che implementa la formula di quadratura di Cavalieri-Simpson composita per valutare il seguente integrale:

$$I(f) = \int_0^1 \exp(5x)(5\sin(x/5) + \cos(x/5)/5)dx.$$

e calcolare l'integrale approssimato utilizzando $n = 10$ intervalli equispaziati. Riportare sul foglio il risultato.

(e) *(2 punti)* Sapendo che $I = \exp(5)\sin(1/5)$ calcolare e riportare sul foglio l'errore commesso utilizzando $n = 10$,20,30, 40 intervalli equispaziati. Commentare il risultato alla luce dei risultati teorici, producendo con Matlab® un opportuno grafico.

Esercizio 3. Si consideri il seguente problema di Cauchy: trovare $y(t) : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che

7 punti

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in (0,T] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

(a) *(3 punti)* Descrivere il metodo di Eulero esplicito, spiegando da dove deriva e specificando l'ordine di convergenza del metodo.

(b) *(3 punti)* Fornire la definizione di assoluta stabilità e ricavare la regione di assoluta stabilità per il metodo di Eulero esplicito.

(c) *(1 punto)* Sia $f(t, y(t)) = \cos(t)\exp(-t) - y(t)$ in (3). Ricavare esplicitamente l'espressione di u_1 utilizzando un passo del metodo di Eulero esplicito con $h = \frac{1}{2}$.

Esercizio 4.

(a) *(3 punti)* Si dimostri che la soluzione $u \in \mathcal{C}^{2,1}((0,\pi) \times (0,+\infty) \cap \mathcal{C}([0,\pi] \times [0,+\infty)$ del seguente problema di Cauchy-Dirichlet

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t) & \text{in} \quad (0,\pi) \times (0,+\infty), \\ u(x,0) = g(x) & \text{in} \quad (0,\pi), \\ u(0,t) = \alpha \text{ e } u(\pi,t) = \beta, & \text{in} \quad (0,+\infty). \end{cases}$$

se esite è unica

4 punti

Metodi Analitici e Numerici CdL Ingegneria Meccanica 22 novembre 2016	Prof. M.C. Cerutti Prof. P. Zunino	Firma leggibile dello studente
Cognome:	Nome:	Matricola:

ISTRUZIONI

- Riportare le risposte nello spazio indicato.
- Gli esercizi richiedono l'uso di Matlab. Riportare sul foglio esclusivamente gli output richiesti.
- Tempo a disposizione: 2 h.

SPAZIO RISERVATO ALLA COMMISSIONE

Esercizio 1	
Esercizio 2	
Esercizio 3	
Esercizio 4	
Matlab	
Totale	

Esercizio 1. Cosiderare il seguente sistema lineare

13 punti

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

dove $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ è una matrice invertibile e $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ è un vettore colonna.

(a) *(2 punti)* Enunciare la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza e l'unicità della fattorizzazione LU di A, spiegando il significato delle eventuali proprietà citate.

(b) *(2 punti)* Enunciare due condizioni sufficienti per l'esistenza e unicità della fattorizzazione LU della matrice A (sempre spiegando il significato delle eventuali proprietà citate).

(c) *(3 punti)* Scrivere quali sistemi occorre risolvere al posto di $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ una volta effettuata la fattorizzazione LU di A e scrivere gli algoritmi per risolvere questi sistemi.

(d) *(1 punto)* Verificare, utillizzando Matlab® , che la matrice H, $(H(i,j) = \frac{1}{i+j-1}$, con $i,j = 1, \ldots 9)$,

nota come *matrice di Hilbert* di dimensione $n = 9$, e richiamabile con il comando `hilb` Matlab® :

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}.$$

soddisfa una delle condizioni sufficienti per l'esistenza e unicità della fattorizzazione LU. Si riporti la condizione verificata.

(e) *(1 punto)* Calcolare le matrici L ed U mediante il comando `lu` di Matlab® . È stato effettuato pivoting?

(f) *(2 punti)* Utilizzare le matrici L e U per risolvere, tramite Matlab® , il sistema lineare con $\mathbf{b} = A[1,1,\ldots,1]^T$ e sia $\mathbf{x}$ la soluzione calcolata.

(g) *(2 punti)* Sapendo che la soluzione esatta del sistema è $\mathbf{x}_{ex} = [1,1,\ldots,1]^T$ si calcolino la norma dell'errore relativo $\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_{ex}\|}{\|\mathbf{x}_{ex}\|}$ e la norma del residuo normalizzato $\frac{\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{b}\|}$. Si riportino i risultati ottenuti e si commenti il risultato ottenuto alla luce della teoria.

Esercizio 2.

10 punti

(a) *(2 punti)* Descrivere, spiegando da dove deriva, la formula di quadratura di Cavalieri-Simpson semplice per l'approssimazione dell'integrale,

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx. \tag{2}$$

Definire il grado di esattezza di un metodo di quadratura e specificare quanto vale in questo caso.

(b) *(2 punti)* Qual è il grado di esattezza massimo che si può ottenere (con nodi e pesi scelti opportunamente) usando per il calcolo dell'integale un polinomio interpolante di grado 1?

(c) *(2 punti)* Scrivere la formula di quadratura di Cavalieri-Simpson composita per l'approssimazione dell'integrale (4) spiegando come deriva dall'analoga formula semplice e specificandone in particolare la formula dell'errore. Definire l'ordine di accuratezza (o di convergenza) di un metodo di quadratura e specificare quanto vale in questo caso.

(d) *(2 punti)* Scrivere una funzione Matlab® che implementa la formula di quadratura di Cavalieri-Simpson composita per valutare il seguente integrale:

$$I(f) = \int_0^1 \exp(4x)(4\sin(x/4) + \cos(x/4)/4)dx.$$

e calcolare l'integrale approssimato utilizzando $n = 10$ intervalli equispaziati. Riportare sul foglio il risultato.

(e) *(2 punti)* Sapendo che $I = \exp(4)\sin(1/4)$ calcolare e riportare sul foglio l'errore commesso utilizzando $n = 10{,}20{,}30, 40$ intervalli equispaziati. Commentare il risultato alla luce dei risultati teorici, producendo con Matlab® un opportuno grafico.

Esercizio 3. Si consideri il seguente problema di Cauchy: trovare $y(t) : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che

7 punti

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in (0,T] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

(a) *(3 punti)* Descrivere il metodo di Eulero esplicito, spiegando da dove deriva e specificando l'ordine di convergenza del metodo.

(b) *(3 punti)* Fornire la definizione di assoluta stabilità e ricavare la regione di assoluta stabilità per il metodo di Eulero esplicito.

(c) *(1 punto)* Sia $f(t, y(t)) = \cos(t)\exp(-t) - y(t)$ in (3). Ricavare esplicitamente l'espressione di u_1 utilizzando un passo del metodo di Eulero esplicito con $h = \frac{1}{2}$.

Esercizio 4.

(a) *(3 punti)* Si dimostri che la soluzione $u \in \mathcal{C}^{2,1}((0,\pi) \times (0,+\infty) \cap \mathcal{C}([0,\pi] \times [0,+\infty)$ del seguente problema di Cauchy-Dirichlet

4 punti

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t) & \text{in} \quad (0,\pi) \times (0,+\infty), \\ u(x,0) = g(x) & \text{in} \quad (0,\pi), \\ u(0,t) = \alpha \text{ e } u(\pi,t) = \beta, & \text{in} \quad (0,+\infty). \end{cases}$$

se esite è unica

Metodi Analitici e Numerici CdL Ingegneria Meccanica 22 novembre 2016	Prof. M.C. Cerutti Prof. P. Zunino	Firma leggibile dello studente
Cognome:	Nome:	Matricola:

ISTRUZIONI

- Riportare le risposte nello spazio indicato.
- Gli esercizi richiedono l'uso di Matlab. Riportare sul foglio esclusivamente gli output richiesti.
- Tempo a disposizione: 2 h.

SPAZIO RISERVATO ALLA COMMISSIONE

Esercizio 1	
Esercizio 2	
Esercizio 3	
Esercizio 4	
Matlab	
Totale	

Esercizio 1. Cosiderare il seguente sistema lineare

13 punti

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

dove $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ è una matrice invertibile e $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ è un vettore colonna.

(a) *(2 punti)* Enunciare la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza e l'unicità della fattorizzazione LU di A, spiegando il significato delle eventuali proprietà citate.

(b) *(2 punti)* Enunciare due condizioni sufficienti per l'esistenza e unicità della fattorizzazione LU della matrice A (sempre spiegando il significato delle eventuali proprietà citate).

(c) *(3 punti)* Scrivere quali sistemi occorre risolvere al posto di $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ una volta effettuata la fattorizzazione LU di A e scrivere gli algoritmi per risolvere questi sistemi.

(d) *(1 punto)* Verificare, utillizzando Matlab® , che la matrice H, ($H(i,j) = \frac{1}{i+j-1}$, con $i,j = 1, \ldots 9$),

nota come *matrice di Hilbert* di dimensione $n = 9$, e richiamabile con il comando `hilb` Matlab® :

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}.$$

soddisfa una delle condizioni sufficienti per l'esistenza e unicità della fattorizzazione LU. Si riporti la condizione verificata.

(e) *(1 punto)* Calcolare le matrici L ed U mediante il comando `lu` di Matlab® . È stato effettuato pivoting?

(f) *(2 punti)* Utilizzare le matrici L e U per risolvere, tramite Matlab® , il sistema lineare con $\mathbf{b} = A[1,1,\ldots,1]^T$ e sia $\mathbf{x}$ la soluzione calcolata.

(g) *(2 punti)* Sapendo che la soluzione esatta del sistema è $\mathbf{x}_{ex} = [1,1,\ldots,1]^T$ si calcolino la norma dell'errore relativo $\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_{ex}\|}{\|\mathbf{x}_{ex}\|}$ e la norma del residuo normalizzato $\frac{\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{b}\|}$. Si riportino i risultati ottenuti e si commenti il risultato ottenuto alla luce della teoria.

Esercizio 2.

10 punti

(a) *(2 punti)* Descrivere, spiegando da dove deriva, la formula di quadratura di Cavalieri-Simpson semplice per l'approssimazione dell'integrale,

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx. \tag{3}$$

Definire il grado di esattezza di un metodo di quadratura e specificare quanto vale in questo caso.

(b) *(2 punti)* Qual è il grado di esattezza massimo che si può ottenere (con nodi e pesi scelti opportunamente) usando per il calcolo dell'integale un polinomio interpolante di grado 2?

(c) *(2 punti)* Scrivere la formula di quadratura di Cavalieri-Simpson composita per l'approssimazione dell'integrale (4) spiegando come deriva dall'analoga formula semplice e specificandone in particolare la formula dell'errore. Definire l'ordine di accuratezza (o di convergenza) di un metodo di quadratura e specificare quanto vale in questo caso.

(d) *(2 punti)* Scrivere una funzione Matlab® che implementa la formula di quadratura di Cavalieri-Simpson composita per valutare il seguente integrale:

$$I(f) = \int_0^1 \exp(3x)(3\sin(x/3) + \cos(x/3)/3)dx.$$

e calcolare l'integrale approssimato utilizzando $n = 10$ intervalli equispaziati. Riportare sul foglio il risultato.

(e) *(2 punti)* Sapendo che $I = \exp(3)\sin(1/3)$ calcolare e riportare sul foglio l'errore commesso utilizzando $n = 10,20,30,40$ intervalli equispaziati. Commentare il risultato alla luce dei risultati teorici, producendo con Matlab® un opportuno grafico.

ESERCIZIO 3. Si consideri il seguente problema di Cauchy: trovare $y(t) : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che

7 punti

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in (0,T] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

(a) *(3 punti)* Descrivere il metodo di Eulero esplicito, spiegando da dove deriva e specificando l'ordine di convergenza del metodo.

(b) *(3 punti)* Fornire la definizione di assoluta stabilità e ricavare la regione di assoluta stabilità per il metodo di Eulero esplicito.

(c) *(1 punto)* Sia $f(t, y(t)) = \cos(t)\exp(-t) - y(t)$ in (3). Ricavare esplicitamente l'espressione di u_1 utilizzando un passo del metodo di Eulero esplicito con $h = \frac{1}{2}$.

Esercizio 4.

(a) *(3 punti)* Si dimostri che la soluzione $u \in \mathcal{C}^{2,1}((0,\pi) \times (0,+\infty) \cap \mathcal{C}([0,\pi] \times [0,+\infty)$ del seguente problema di Cauchy-Dirichlet

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t) & \text{in} \quad (0,\pi) \times (0,+\infty), \\ u(x,0) = g(x) & \text{in} \quad (0,\pi), \\ u(0,t) = \alpha \text{ e } u(\pi,t) = \beta, & \text{in} \quad (0,+\infty). \end{cases}$$

se esite è unica

4 punti

Metodi Analitici e Numerici CdL Ingegneria Meccanica 22 novembre 2016	Prof. M.C. Cerutti Prof. P. Zunino	Firma leggibile dello studente
Cognome:	Nome:	Matricola:

ISTRUZIONI

- Riportare le risposte nello spazio indicato.
- Gli esercizi richiedono l'uso di Matlab. Riportare sul foglio esclusivamente gli output richiesti.
- Tempo a disposizione: 2 h.

SPAZIO RISERVATO ALLA COMMISSIONE

Esercizio 1	
Esercizio 2	
Esercizio 3	
Esercizio 4	
Matlab	
Totale	

Esercizio 1. Cosiderare il seguente sistema lineare

13 punti

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

dove $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ è una matrice invertibile e $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ è un vettore colonna.

(a) *(2 punti)* Enunciare la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza e l'unicità della fattorizzazione LU di A, spiegando il significato delle eventuali proprietà citate.

(b) *(2 punti)* Enunciare due condizioni sufficienti per l'esistenza e unicità della fattorizzazione LU della matrice A (sempre spiegando il significato delle eventuali proprietà citate).

(c) *(3 punti)* Scrivere quali sistemi occorre risolvere al posto di $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ una volta effettuata la fattorizzazione LU di A e scrivere gli algoritmi per risolvere questi sistemi.

(d) *(1 punto)* Verificare, utillizzando Matlab® , che la matrice H, $(H(i,j) = \frac{1}{i+j-1}$, con $i,j = 1, \ldots 9)$,

nota come *matrice di Hilbert* di dimensione $n = 9$, e richiamabile con il comando `hilb` Matlab® :

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}.$$

soddisfa una delle condizioni sufficienti per l'esistenza e unicità della fattorizzazione LU. Si riporti la condizione verificata.

(e) *(1 punto)* Calcolare le matrici L ed U mediante il comando `lu` di Matlab® . È stato effettuato pivoting?

(f) *(2 punti)* Utilizzare le matrici L e U per risolvere, tramite Matlab® , il sistema lineare con $\mathbf{b} = A[1,1,\ldots,1]^T$ e sia $\mathbf{x}$ la soluzione calcolata.

(g) *(2 punti)* Sapendo che la soluzione esatta del sistema è $\mathbf{x}_{ex} = [1,1,\ldots,1]^T$ si calcolino la norma dell'errore relativo $\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_{ex}\|}{\|\mathbf{x}_{ex}\|}$ e la norma del residuo normalizzato $\frac{\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{b}\|}$. Si riportino i risultati ottenuti e si commenti il risultato ottenuto alla luce della teoria.

Esercizio 2.

10 punti

(a) *(2 punti)* Descrivere, spiegando da dove deriva, la formula di quadratura di Cavalieri-Simpson semplice per l'approssimazione dell'integrale,

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx. \tag{4}$$

Definire il grado di esattezza di un metodo di quadratura e specificare quanto vale in questo caso.

(b) *(2 punti)* Qual è il grado di esattezza massimo che si può ottenere (con nodi e pesi scelti opportunamente) usando per il calcolo dell'integale un polinomio interpolante di grado 2?

(c) *(2 punti)* Scrivere la formula di quadratura di Cavalieri-Simpson composita per l'approssimazione dell'integrale (4) spiegando come deriva dall'analoga formula semplice e specificandone in particolare la formula dell'errore. Definire l'ordine di accuratezza (o di convergenza) di un metodo di quadratura e specificare quanto vale in questo caso.

(d) *(2 punti)* Scrivere una funzione Matlab® che implementa la formula di quadratura di Cavalieri-Simpson composita per valutare il seguente integrale:

$$I(f) = \int_0^1 \exp(6x)(6\sin(x/6) + \cos(x/6)/6)dx.$$

e calcolare l'integrale approssimato utilizzando $n = 10$ intervalli equispaziati. Riportare sul foglio il risultato.

(e) *(2 punti)* Sapendo che $I = \exp(6)\sin(1/6)$ calcolare e riportare sul foglio l'errore commesso utilizzando $n = 10{,}20{,}30, 40$ intervalli equispaziati. Commentare il risultato alla luce dei risultati teorici, producendo con Matlab® un opportuno grafico.

Esercizio 3. Si consideri il seguente problema di Cauchy: trovare $y(t) : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che

7 punti

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in (0,T] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

(a) *(3 punti)* Descrivere il metodo di Eulero esplicito, spiegando da dove deriva e specificando l'ordine di convergenza del metodo.

(b) *(3 punti)* Fornire la definizione di assoluta stabilità e ricavare la regione di assoluta stabilità per il metodo di Eulero esplicito.

(c) *(1 punto)* Sia $f(t, y(t)) = \cos(t) \exp(-t) - y(t)$ in (3). Ricavare esplicitamente l'espressione di u_1 utilizzando un passo del metodo di Eulero esplicito con $h = \frac{1}{2}$.

Esercizio 4.

(a) *(3 punti)* Si dimostri che la soluzione $u \in \mathcal{C}^{2,1}((0,\pi) \times (0,+\infty) \cap \mathcal{C}([0,\pi] \times [0,+\infty)$ del seguente problema di Cauchy-Dirichlet

4 punti

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t) & \text{in} \quad (0,\pi) \times (0,+\infty), \\ u(x,0) = g(x) & \text{in} \quad (0,\pi), \\ u(0,t) = \alpha \text{ e } u(\pi,t) = \beta, & \text{in} \quad (0,+\infty). \end{cases}$$

se esite è unica