Alcune parametrizzazioni di superfici

- (*Superficie di rotazione*) Se C è una curva regolare posta sul piano $0xz$ parametrizzata da $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, $t \in [a, b]$, facendola ruotare attorno all'asse z ottengo una superficie di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \gamma_1(t)\cos\theta \\ y = \gamma_1(t)\sin\theta \\ z = \gamma_2(t). \end{cases} \qquad t \in [a, b], \theta \in [0, 2\pi].$$

- (*Cilindro retto*) Se C è una curva regolare semplice e chiusa posta sul piano $0xy$ parametrizzata da $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, $t \in [a, b]$, la parametrizzazione (della superficie laterale) di un cilindro di direttrice C e generatrice parallela all'asse z è

$$\begin{cases} x = \gamma_1(t) \\ y = \gamma_2(t) \\ z = u, \end{cases}$$

con $(t, u) \in [a, b] \times \mathbb{R}$.

- (*Cono circolare retto*) Se C è una retta per l'origine nel piano $0xy$, non parallela agli assi x o z di equazioni $x = au$, $z = bu$, ruotandola attorno all'asse z si ottiene un cono circolare retto di vertice l'origine di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = au\cos\theta \\ y = au\sin\theta \\ z = bu, \end{cases}$$

con $(u, \theta) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi]$.

- (*Toro*) Se C è una circonferenza contenuta nel piano $0xz$ di centro $(a, 0, 0)$ e raggio b, con $a > b > 0$, e la si ruota attorno all'asse z si ottiene un *toro* di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = (a + b\cos\theta)\cos\varphi \\ y = (a + b\cos\theta)\sin\varphi \\ z = b\sin\theta, \end{cases}$$

con $(\theta, \varphi) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

- (*Sfera.*) Se S è la sfera di centro (x_0, y_0, z_0) e raggio r, essa ha

$$\text{equazione cartesiana:} \qquad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2,$$

$$\text{equazione parametrica:} \quad \begin{cases} x = (x_0 + r\cos\theta)\sin\varphi \\ y = (y_0 + r\sin\theta)\sin\varphi \\ z = z_0 + r\cos\varphi, \end{cases}$$

con $(\theta, \varphi) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$.

- (*Ellissoide*) Sia E l'ellissoide con

$$\text{equazione cartesiana:} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

allora ha

$$\text{equazione parametrica:} \quad \begin{cases} x = a\cos\theta\sin\varphi \\ y = b\sin\theta\sin\varphi \\ z = c\cos\varphi, \end{cases} \qquad (\theta, \varphi) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi].$$

- (*Iperboloide a una falda*) Se E è l'iperboloide a una falda di

$$\text{equazione cartesiana:} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

allora ha

$$\text{equazione parametrica:} \qquad \begin{cases} x = a\cosh u \sin\theta \\ y = b\cosh u \sin\theta \\ z = c\sinh u, \end{cases} \qquad (u,\theta) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi].$$

- (*Iperboloide a due falde*) Se E è l'iperboloide a due falde di

$$\text{equazione cartesiana:} \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

allora ha (per la falda nel semispazio $x > 0$)

$$\text{equazione parametrica:} \qquad \begin{cases} x = a\cosh u \cosh v \\ y = b\cosh u \sinh v \\ z = c\sinh u, \end{cases} \qquad (u,v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

- (*Paraboloide ellittico*) Se E è il paraboloide ellittico di

$$\text{equazione cartesiana:} \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

allora ha

$$\text{equazione parametrica:} \qquad \begin{cases} x = a\cosh u \cosh v \\ y = b\cosh u \sinh v \\ z = c\sinh u, \end{cases} \qquad (u,v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

- (*Paraboloide iperbolico*) Se E è il paraboloide iperbolico di

$$\text{equazione cartesiana:} \qquad z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2},$$

allora ha

$$\text{equazione parametrica:} \qquad \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \dfrac{u^2}{a^2} - \dfrac{v^2}{b^2}, \end{cases} \qquad (u,v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$