Oscillazioni smorzate

Equazione del moto:

$ma = -kx - \lambda v$ (l'ultimo termine rappresenta la forza d'attrito viscoso)

ossia:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (1)$$

con $\omega_0^2 = k/m$, $2\gamma = \lambda/m$

Si cercano soluzioni del tipo: $e^{\alpha t}$

Sostituendo in (1):

$$\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2 = 0$$

che ammette due soluzioni:

$$\alpha_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \qquad (2)$$

Se $\gamma > \omega_0$ le soluzioni della (2) sono reali, il moto è sovrasmorzato: $x = Ae^{-(\gamma+\omega)t} + Be^{-(\gamma-\omega)t}$
ove $\omega = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

Se $\gamma < \omega_0$, posto questa volta $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ risulta $\alpha_{1,2} = -\gamma \pm i\omega$ e la soluzione è:

$$x = e^{-\gamma t}\left[Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}\right] \qquad (3)$$

che comunque dev'essere reale, dovendo rappresentare una legge oraria. Siccome risulta (formule di Eulero):

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$$
$$e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i\sin(\omega t)$$

sostituendo in (3):

$$x = e^{-\gamma t}\left[(A+B)\cos(\omega t) + i(A-B)\sin(\omega t)\right]$$

Dalla realtà di *x* si deduce che dev'essere:

$A = a + ib \qquad B = a - ib$

e sostituendo si trova:

$$x = 2e^{-\gamma t}\left[a\cos(\omega t) - b\sin(\omega t)\right] \quad (4)$$

Posto:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\delta \quad , \quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\delta$$

sostituendo nella (4) otteniamo:

$$x = 2\sqrt{a^2+b^2}\,e^{-\gamma t}\left[\cos\delta\cos(\omega t) - \sin\delta\sin(\omega t)\right] = Ce^{-\gamma t}\cos(\omega t + \delta)$$

Oscillazioni forzate; risonanza

Equazione del moto:

$ma = -kx - \lambda v + F_0\cos(\omega t)$ (questa ω non c'entra niente con la precedente!)

ossia:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t) \quad (5)$$

La soluzione generale della (5) consiste nella soluzione generale della omogenea associata (1) a cui si aggiunge un integrale particolare della (5) (equazione completa). La soluzione generale della omogenea associata si esaurisce comunque in un transitorio; a regime sopravvive solo la soluzione particolare. Quest'ultima può essere cercata (in questo caso) di forma sinusoidale:

$$x = A\sin(\omega t - \alpha);$$

le sue derivate:

$$\frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t - \alpha); \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\sin(\omega t - \alpha)$$

Sostituendo nella (5):

$$-A\omega^2\sin(\omega t - \alpha) + 2\gamma A\omega\cos(\omega t - \alpha) + \omega_0^2 A\sin(\omega t - \alpha) = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

Riordinando:

$$A(\omega_0^2 - \omega^2)\left[\sin(\omega t)\cos\alpha - \cos(\omega t)\sin\alpha\right] + 2\gamma A\left[\cos(\omega t)\cos\alpha + \sin(\omega t)\sin\alpha\right] = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

Raccogliamo i termini in seno e coseno:

$$\left[A(\omega_0^2-\omega^2)\cos\alpha+2\gamma A\omega\sin\alpha\right]\sin(\omega t)+\left[2\gamma A\omega\cos\alpha-A(\omega_0^2-\omega^2)\sin\alpha-\frac{F_0}{m}\right]\cos(\omega t)=0 \quad (6)$$

La (6) dev'essere soddisfatta *ad ogni istante*; ciò è possibile solo se i fattori che moltiplicano il seno ed il coseno si annullano. Ossia:

$$\left[A(\omega_0^2-\omega^2)\cos\alpha+2\gamma A\omega\sin\alpha\right]=0 \quad (7)$$

$$\left[2\gamma A\omega\cos\alpha-A(\omega_0^2-\omega^2)\sin\alpha-\frac{F_0}{m}\right]=0 \quad (8)$$

La (7) consente di trovare l'angolo α:

$$\tan\alpha=\frac{\omega^2-\omega_0^2}{2\gamma\omega} \qquad (9)$$

Inoltre, tenendo presente le relazioni:

$$\sin\alpha=\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \quad ; \quad \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$$

sostituendole nella (8) si trova:

$$A\left[\frac{2\gamma\omega}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}+\frac{(\omega^2-\omega_0^2)\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}\right]=\frac{F_0}{m}$$

e dunque:

$$A=\frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}}$$

dove si è fatto uso della (9).
L'ampiezza tende a F_0/k quando $\omega\to 0$ (limite delle basse frequenze) e tende a zero nel limite di alte frequenze. Risulta massima per $\omega=\sqrt{\omega_0^2-2\gamma^2}$, condizione di risonanza di ampiezza; il valore di *A* è tanto maggiore quanto minore è l'attrito.
Calcolando la velocità troviamo:

$$v=\omega A\cos(\omega t-\alpha)=v_0\cos(\omega t-\alpha)$$

con $v_0=\dfrac{\omega F_0/m}{\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}}=\dfrac{F_0}{\sqrt{\lambda^2+\left(m\omega-k/\omega\right)^2}}$

che risulta massima quando $\omega = \omega_0$, il che implica dalla (9) che $\alpha = 0$. Si parla di risonanza di fase e in queste condizioni si ha il massimo trasferimento di energia dalla forzante al sistema.