

Indice

1	I circuiti e le grandezze elettriche	1
1.1	Introduzione	1
1.2	Definizioni principali	4
1.3	Definizione operativa delle grandezze elettriche	6
1.4	Circuiti in regime quasi-stazionario	8
1.5	Convenzioni di misura	11
1.6	Bipoli ideali	12
1.6.1	Generatore ideale di tensione	13
1.6.2	Generatore ideale di corrente	13
1.6.3	Resistore e conduttore ideale	15
1.6.4	Induttore ideale	16
1.6.5	Condensatore ideale	17
2	Risoluzione di circuiti elettrici	19
2.1	Topologia delle reti	19
2.2	Teorema fondamentale delle reti elettriche	24
2.3	Ulteriori proprietà topologiche	28
2.4	Principio di dualità	32
2.5	Teoremi delle reti elettriche	35
2.5.1	Teorema di sostituzione	36
2.5.2	Teorema di sovrapposizione	36
2.5.3	Teoremi di Thevenin e Norton	37
2.5.4	Teorema di Tellegen	41
3	Reti resistive	43
3.1	Introduzione	43

3.2	Resistore equivalente di una rete di resistori	43
3.2.1	Connessione in serie di resistori	43
3.2.2	Connessione in parallelo di resistori	45
3.2.3	Trasformazione triangolo-stella	46
3.2.4	Trasformazione stella-triangolo	48
3.3	Metodi semplificati per la soluzione di reti	48
3.3.1	Partitore di corrente	48
3.3.2	Partitore di tensione	49
3.3.3	Formula di Millman per reti binodali	50
4	Reti in regime alternato sinusoidale	53
4.1	Proprietà delle funzioni sinusoidali	53
4.2	Rappresentazione fasoriale	55
4.3	Le operazioni con le funzioni sinusoidali	56
4.4	Impedenza, ammettenza e circuiti simbolici	59
4.5	Energetica delle reti	62
4.5.1	Resistore	66
4.5.2	Induttore	67
4.5.3	Condensatore	68
4.6	Corollario di Boucherot	69
4.7	Rifasamento	70
5	Sistemi trifase	73
5.1	Generalità	73
5.2	Misure sui sistemi trifase a tre e quattro fili	75
5.3	Energetica delle linee trifase	80
5.4	Risoluzione di reti trifase	81
5.4.1	Circuito monofase equivalente	81
5.4.2	La formula di Millman per reti trifase	84
5.5	Rifasamento	86
6	Reti in regime alternato non sinusoidale	87
6.1	Introduzione	87
6.2	Lo sviluppo in serie di Fourier	87
6.3	Risposta di una rete lineare	89

6.4	Valore efficace, residuo e potenze	92
7	Equazioni di stato e transitori	95
7.1	Introduzione	95
7.2	Stato di un sistema fisico	96
7.3	Valutabilità del sistema fisico	96
7.4	Evoluzione univoca dello stato	97
7.5	Impostazione delle equazioni dinamiche	99
7.6	Sull'integrale particolare	101
7.7	Sull'integrale dell'omogenea associata	105
7.8	Esempi applicativi	107
7.8.1	Transitorio con ingressi costanti	107
7.8.2	Transitorio con ingressi sinusoidali	110
8	Legge dell'induzione elettromagnetica	111
8.1	Introduzione	111
8.2	Legge dell'induzione elettromagnetica	112
8.2.1	Esempi applicativi	117
8.3	I circuiti magnetici	120
8.3.1	Proprietà magnetiche dei materiali	120
8.3.2	Reti magnetiche	122
8.4	Auto e mutue induttanze	128
9	Sistemi elettromeccanici elementari	137
9.1	Forze e sforzi nel campo magnetico	137
9.2	Forze e sforzi nel campo elettrico	140
9.3	La conversione elettromeccanica dell'energia	141
10	Sistemi analoghi	149
10.1	Introduzione	149
10.2	Analogie meccaniche-elettriche	149
10.3	Analogie termiche-elettriche	156
11	Il trasformatore	159
11.1	La nascita del trasformatore	159
11.2	Trasformatori ideali	159

11.3	Forme costruttive	165
11.4	Modello equivalente	168
11.5	Circuiti equivalenti ridotti	172
11.6	Modi di funzionamento in regime sinusoidale	173
11.6.1	Funzionamento e prova a vuoto	173
11.6.2	Funzionamento e prova in corto circuito	175
11.7	Funzionamento in parallelo	176
11.8	Il trasformatore trifase	181
11.8.1	Le forme costruttive del nucleo e degli avvolgi- menti	181
11.8.2	Collegamenti trifasi degli avvolgimenti	186
11.8.3	Sfasamento tra primario e secondario, indice orario	193
11.9	Circuito equivalente del trasformatore trifase	196
11.10	Parallelo di trasformatori trifase	196
12	Macchine elettriche rotanti: generalità	199
12.1	Il giunto elettromagnetico	199
12.1.1	Coppia trasmessa	203
12.2	La trasformata di Park	205
12.3	Avvolgimenti trifase	208
12.4	Potenze nelle variabili di Park	211

Capitolo 1

I circuiti e le grandezze elettriche

1.1 Introduzione

L'oggetto di studio dell'elettrotecnica è il *circuito elettrico* che, nella sua più semplice realizzazione, può essere costituito da un *generatore elettrico* e da un *utilizzatore elettrico* connessi tra loro da una *linea elettrica*, si veda Figura 1.1. Funzione fondamentale del circuito elettrico è quella di *trasmettere potenza* dal generatore all'utilizzatore. Lo schema di Figura 1.1 evidenzia inoltre la proprietà comune di generatori ed utilizzatori elettrici di essere, sostanzialmente, dei *bipoli*, cioè di possedere due *poli* (morsetti) mediante i quali è possibile collegare l'apparecchio al resto del circuito.

Nella pratica, i circuiti elettrici possono essere costituiti in modo più o meno complesso e comprendere più generatori e più utilizzatori connessi tra loro da una o più linee. Configurazioni di questo tipo prendono il nome di *reti elettriche* (Figura 1.2).

Prima di procedere nell'analisi del comportamento dei circuiti e

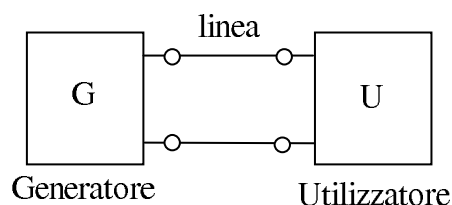


Figura 1.1: Circuito elettrico elementare

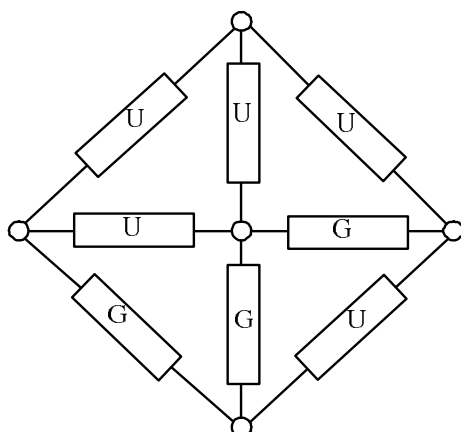


Figura 1.2: Esempio di rete elettrica

delle reti elettriche, per meglio comprendere i fenomeni e le grandezze fisiche coinvolte nel fenomeno di trasmissione della potenza elettrica, si analizzerà il comportamento del sistema rappresentato in Figura 1.3 che rappresenta una possibile realizzazione pratica del circuito elementare di Figura 1.1.

Il sistema è costituito da una vasca, divisa in due parti da un setto poroso che consente il passaggio di ioni, ma non il mescolamento meccanico, riempita con una soluzione di solfato di rame ($CuSO_4$) e di solfato di zinco ($ZnSO_4$). Nelle rispettive soluzioni sono immersi un elettrodo di rame e uno di zinco. Un dispositivo così configurato prende il nome di *Pila Daniell*.

Ai due elettrodi è collegata, mediante fili metallici, una lampadina. La lampadina è costituita (nella versione messa a punto da Edison) da un bulbo di vetro nel quale è stato praticato il vuoto e da uno zoccolo in materiale isolante che sigilla il bulbo. Sulla periferia dello zoccolo è disposta una vite di ottone che costituisce il primo polo della lampadina, mentre sulla base è disposto un bottone metallico, opportunamente isolato dalla vite, che costituisce il secondo polo della lampadina. Nel bulbo è sospeso un filamento in carbone le cui estremità sono collegate rispettivamente alla vite e al bottone.

Se si collega la lampadina alla pila con dei fili metallici, si nota che il filamento diventa incandescente e questo porta a concludere che una

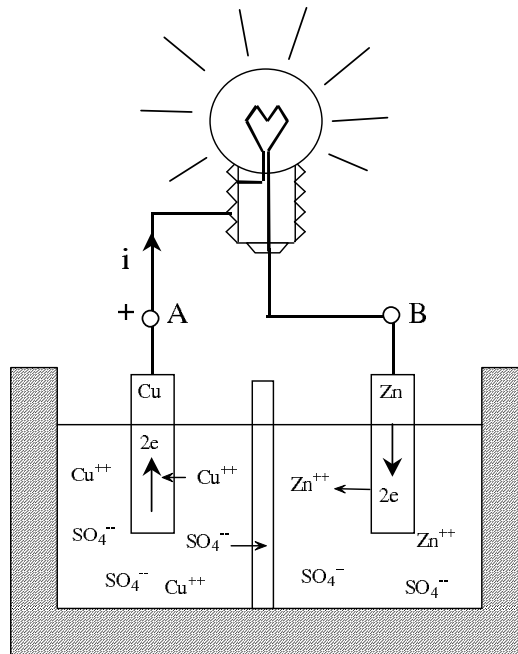
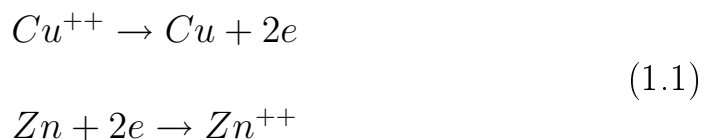


Figura 1.3: Esempio di circuito elementare

certa energia fornita dalla pila viene trasformata in luce e calore dalla lampadina stessa.

Il fenomeno si può interpretare sfruttando le reazioni riportate in (1.1).



Lo ione rame Cu^{++} si deposita sull'elettrodo di rame cedendo la carica $2e^1$ mentre il corrispondente ione SO_4^{--} migra, tramite il setto, nella seconda parte della vasca. Lo zinco del secondo elettrodo acquisisce, attraverso la connessione costituita dai fili metallici e dalla lampadina, la carica $2e$ ceduta dal rame ed entra in soluzione sotto forma di ione Zn^{++} ristabilendo l'equilibrio delle cariche.

La circolazione di carica elettrica attraverso il filo di carbone della

¹Il simbolo e indica una carica elettrica positiva di valore pari alla carica dell'elettrone ($1.602 \cdot 10^{-19}[C]$). I simboli $+$ e $-$ indicano cariche dello stesso valore di e rispettivamente positive e negative.

lampadina genera, per attrito, calore che rende incandescente il filo di carbone che non può bruciare poichè nel bulbo non vi è la presenza di ossigeno.

1.2 Definizioni principali

L'esperienza descritta nel Paragrafo 1.1 consente di evidenziare alcune grandezze che meglio si adattano a descrivere i fenomeni energetici coinvolti senza entrare nel merito delle reazioni chimiche/fisiche. In particolare, si definisce *corrente elettrica* la quantità di cariche positive dq trasferite dall'elettrodo di rame (che essendo l'elettrodo da cui escono le cariche positive prende il nome di *polo positivo*) all'elettrodo di zinco (che essendo l'elettrodo in cui entrano le cariche positive prende il nome di *polo negativo*) nel tempo dt , si veda la (1.2). È evidente dalla definizione fornita che, convenzionalmente, la corrente elettrica viene riferita al moto di cariche positive, opposto quindi al movimento effettivo degli elettroni nel conduttore.

La corrente elettrica si misura in $[A]$ (Ampère) che costituisce una unità fondamentale del Sistema Internazionale. Si assume convenzionalmente che la corrente valga $1 [A]$ quando la forza di attrazione/repulsione, per ogni tratto pari ad $1 [m]$, di due conduttori distanti $1 [m]$ percorsi da corrente (si veda Fig.2.11) è pari a $2 \cdot 10^{-7} [N]^2$. Fissata l'unità di misura della corrente si può naturalmente derivare quella della carica $[C] = [A \cdot s]$ (Coulomb).

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (1.2)$$

Si definisce *tensione elettrica* il lavoro dW erogato dalla pila per unità di carica dq movimentata dall'elettrodo positivo a quello negativo, si veda (1.3). La tensione elettrica si misura in $[V]$ (Volt) che nel Sistema Internazionale è un'unità derivata $[V] = [J/C] = [kg \cdot m^2 / (A \cdot s^3)]$.

²La legge con cui si attraggono/respingono due conduttori percorsi da corrente è dovuta ad A. M. Ampère

$$v = \frac{dW}{dq} \quad (1.3)$$

In relazione al significato fisico delle grandezze tensione e corrente, il prodotto delle due fornisce la potenza p erogata dalla pila e assorbita dalla lampadina come indicato in (1.4)

$$p = v \cdot i = \frac{dW}{dq} \cdot \frac{dq}{dt} = \frac{dW}{dt} \quad (1.4)$$

La misura di tensione e corrente nel circuito elementare può essere effettuata secondo la seguente procedura. Si supponga di registrare, in funzione del tempo t , la massa dell'elettrodo di rame m_{cu} e dell'elettrodo di zinco m_{zn} . Dal momento che per ogni atomo di rame, di massa m^* pari a $1.0552 \cdot 10^{-25}$, che si deposita sull'elettrodo di rame, questo riceve due elettroni erogando la carica positiva equivalente $2e$, ad ogni variazione dm_{cu} che si manifesta in un intervallo di tempo dt corrisponde un passaggio di carica dq calcolabile come indicato in (1.5).

$$dq = \frac{dm_{cu}}{m^*} \cdot 2e \quad (1.5)$$

La corrente può essere quindi determinata, da misure sul circuito, attraverso la relazione (1.6) dove la costante $2e/m^*$ può essere valutata sfruttando la relazione in termini finiti (1.7).

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{2e}{m^*} \frac{dm_{cu}}{dt} \quad (1.6)$$

$$\Delta q = \int_0^{\Delta t} i \cdot dt = \int_0^{\Delta t} \frac{2e}{m^*} dm_{cu} = \frac{2e}{m^*} \Delta m_{cu} \quad (1.7)$$

In particolare la (1.7) per una variazione di massa del rame Δm_{cu} pari a 31.785 [g], la carica fluita nel circuito vale $\Delta q = 96580$ [C], l'elettrodo di zinco ha perso $\Delta m_{zn} = 32.69$ [g] e la costante $2e/m^*$ vale 3038.54 [C/g].

Per valutare il lavoro eseguito dalla pila e trasformato in luce e calore dalla lampadina, si osserva che, ponendo all'interno di un calorimetro una soluzione di solfato di rame ($CuSO_4$) e versando nella

soluzione stessa 32.69 [g] di zinco, avviene la reazione esotermica indicata in (1.8). Nel calorimetro si depositano 31.785 [g] di rame e si misura (tramite la massa, il calore specifico e il salto termico della soluzione) lo sviluppo di una energia ΔW pari a 106300 [J] sotto forma di calore.



Nella pila Daniell avviene la medesima trasformazione chimica, ma l'energia ΔW , poichè non si ritrova sotto forma di calore nelle soluzioni dei due solfati, per il principio di conservazione dell'energia, non può che essere stata utilizzata per muovere le cariche elettriche dall'elettrodo positivo a quello negativo. Questa esperienza permette quindi di valutare la tensione che si manifesta ai morsetti di una pila Daniell come indicato in (1.9).

$$V = \frac{\Delta W}{\Delta q} = 1.1 [V] \quad (1.9)$$

1.3 Definizione operativa delle grandezze elettriche

L'esperienza descritta nel Paragrafo 1.1 ha consentito di fissare la nozione di circuito elettrico, presentando un esempio di *bipolo generatore* (la pila) e di *bipolo utilizzatore* (la lampadina) e di indicare un metodo operativo per realizzare attraverso una bilancia, un cronometro ed un calorimetro uno strumento per la misura della tensione (che prende il nome di *voltmetro*) e della corrente (che prende il nome di *amperometro*).

Si è messo dunque in evidenza il fatto che gli ingegneri si avvalgono della *definizione operativa* delle grandezze fisiche: vengono cioè indicate una serie di operazioni ripetibili che, in un certo contesto di condizioni al contorno (nel caso in esame, ad esempio, di temperatura, di concentrazione degli elettroliti, ecc.), portano a quantificare con un *errore stimabile* la grandezza oggetto di misura. D'altra parte

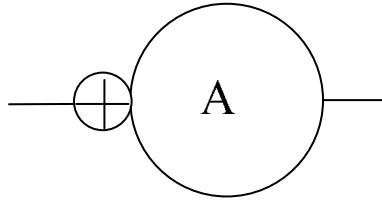


Figura 1.4: Aperometro ideale

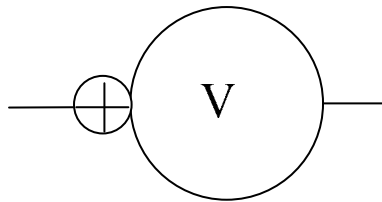


Figura 1.5: Voltmetro ideale

nessuna grandezza non definibile in modo operativo può interessare gli ingegneri in quanto, non essendo misurabile, non rientra nel campo di manipolabilità tipico del loro interesse.

Avvalendosi di queste esperienze e del continuo miglioramento delle conoscenze è stato possibile costruire voltmetri ed amperometri che sempre meglio approssimano il funzionamento ideale, tali cioè da consentire la misura del valore istantaneo di tensioni e correnti variabili nel tempo, al limite, senza alterare la grandezza oggetto della misura.

Gli *amperometri ideali* sono quindi bipoli costituiti da un quadrante di lettura della misura e da due morsetti di cui uno è contrassegnato con il simbolo +, si veda Figura 1.4. Considerato il circuito di Figura 1.6a in cui compare un bipolo generatore G (la pila), collegato ad un bipolo utilizzatore U (la lampadina), l'amperometro ideale inserito come A_1 fornisce una indicazione positiva e la corrente misurata corrisponde alla carica elettrica positiva che entra nell'unità di tempo nel morsetto contrassegnato.

I *voltmetri ideali* sono bipoli costituiti da un quadrante di lettura della misura e da due morsetti di cui uno è contrassegnato con il simbolo +; ai due morsetti sono collegati due cordoni le cui estremità vengono collegate ai punti del circuito tra i quali si desidera valutare

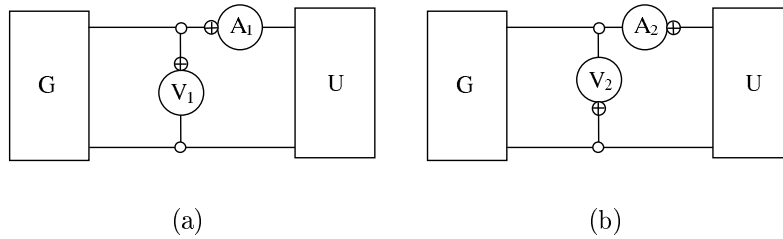


Figura 1.6: Proprietà di amperometri e voltmetri ideali

la tensione elettrica, si veda la Figura 1.5. Il voltmetro ideale fornisce istante per istante il lavoro che occorre per spostare una carica elettrica unitaria positiva lungo una linea coincidente con il percorso individuato dai cordoni orientata dal morsetto positivo a quello negativo. In base a quanto visto a proposito della pila Daniell, il voltmetro V_1 fornisce una lettura positiva corrispondente a quanto indicato nella equazione (1.9).

Proprietà autoevidenti degli amperometri e voltmetri ideali possono essere ottenute dal confronto delle Figure 1.6a-b: la lettura dell'amperometro A_2 è opposta a quella dell'amperometro A_1 e la lettura del voltmetro V_2 è opposta a quella del voltmetro V_1 .

1.4 Circuiti in regime quasi-stazionario

Si supponga di collegare al circuito elementare indicato nel Paragrafo 1.1, in luogo della pila Daniell un generatore che fornisca una tensione alternata sinusoidale del tipo $v_g(t) = V_M \cos(\omega t)$, di ampiezza V_M costante e di pulsazione ω regolabile, e di attrezzare lo spazio circostante con una serie di voltmetri ed amperometri come è indicato in Figura 1.7.

L'esperienza mostra che le indicazioni degli strumenti sono influenzate dalla pulsazione ω . In particolare se la pulsazione ω è nulla si parla di *regime stazionario*, il generatore applica al circuito un tensione costante $v_g(t) = V_M$ e si osserva che:

- l'indicazione dei voltmetri V_1 e V_2 pur essendo diversi i percorsi

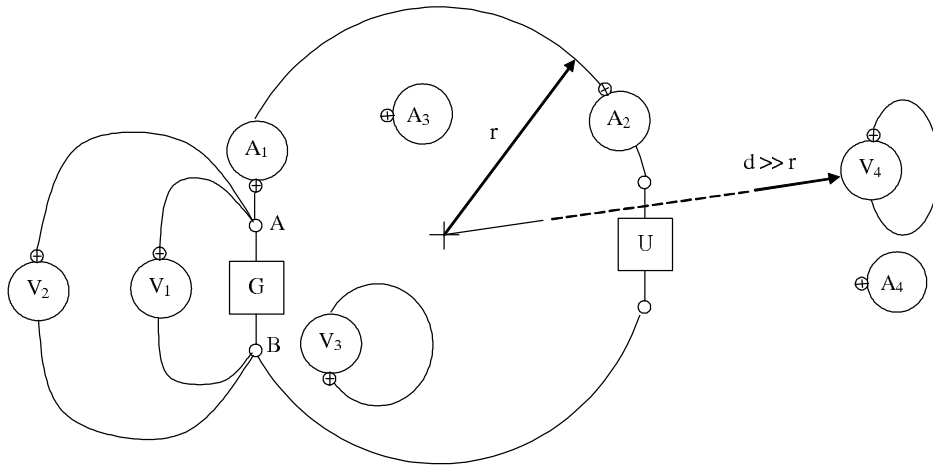


Figura 1.7: Circuito elementare in regime variabile

dei cordoni, non differiscono tra loro. L'indicazione dei voltmetri V_3 e V_4 , i cui poli sono cortocircuitati tramite cordoni che descrivono un'area non nulla, presentano in ogni caso indicazione nulla. Si può concludere che in questo caso l'indicazione dei voltmetri dipende esclusivamente dai punti di connessione dei cordoni al circuito e non dal percorso degli stessi.

- l'indicazione degli amperometri A_1 e A_2 sono identiche, pur occupando posizioni diverse all'interno del circuito. L'indicazione degli amperometri A_3 e A_4 , i cui morsetti sono aperti, presentano indicazione nulla. L'indicazione degli amperometri, quindi, non dipende dalla posizione lungo il circuito ed è diversa da zero solo se l'amperometro è inserito nel circuito.

Se la pulsazione ω è diversa da zero (si parla in questo caso di *regime variabile sinusoidale*) le cose cambiano e le differenze rispetto al caso stazionario diventano sempre più significative quanto più alta è la pulsazione stessa. In questo caso si osserva che:

- i voltmetri V_1 e V_2 , pur essendo collegati agli stessi estremi, danno indicazioni alla medesima pulsazione e fase, ma di ampiezze diverse ed altrettanto avviene per gli amperometri A_1 ed A_2

che, pur essendo inseriti nello stesso circuito, occupano posizioni diverse.

- l'amperometro A_3 ed il voltmetro V_3 forniscono indicazioni non nulle, sempre di pulsazione ω , con valori di corrente e di tensione che, se tali strumenti (insieme all'utilizzatore U) sono posizionati presso il generatore G , sono in fase con le indicazioni di V_1 e di A_1 .
- il voltmetro V_4 e l'amperometro A_4 poi forniscono indicazioni non nulle, sempre a pulsazione ω , ma le indicazioni sono sfasate in ritardo rispetto a quelle degli strumenti vicini al generatore. L'esperienza mostra che il tempo di ritardo è pari al rapporto d/c dove d è la distanza dello strumento dal generatore e $c \approx 3 \cdot 10^8$ [m/s] è la velocità della luce.

L'esperienza mostra, quindi, che nel caso di regime variabile il campo elettrico e quello magnetico, tra loro correlati³, si propagano nello spazio e le trasformazioni energetiche non si limitano al circuito che genera il campo elettromagnetico. Inoltre si ha che, se il tempo di transito $\tau = r/c$ del circuito da parte della luce è molto piccolo rispetto al periodo $T = 2\pi/\omega$ delle tensioni e delle correnti imposte dal generatore e cioè se è valida la disuguaglianza indicata in (1.10), allora si può parlare di *regime quasi-stazionario* e le misure elettriche rispondono, con buona approssimazione, alle condizioni tipiche del regime stazionario per cui ha senso parlare di *circuito* (caratterizzato da una ben precisa corrente) e di *bipoli* (caratterizzati da una ben precisa tensione e corrente ai poli).

Per il regime stazionario e per quello quasi-stazionario i circuiti si potranno studiare con le modalità descritte nei seguenti capitoli, modellando i diversi bipoli reali mediante opportuni bipoli ideali ed individuando le leggi cui rispondono le correnti e le tensioni dei circuiti.

³Il legame tra il campo elettrico e quello magnetico in condizioni di regime comunque variabile è descritto dalle equazioni di Maxwell.

$$\tau = \frac{r}{c} \ll T = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow \gamma \ll R = c \cdot T \quad (1.10)$$

Per fissare le idee di quali siano le tipologie di circuito che rientrano in questa definizione, si consideri che lo spettro significativo (e cioè il campo di frequenze in cui esistono armoniche isofrequenziali di tensioni e correnti che danno luogo a potenze significative dal punto di vista ingegneristico) delle tensioni e delle correnti in gioco nelle trasformazioni energetiche nei sistemi elettromeccanici è limitato a frequenze massime dell'ordine di 10^4 [Hz] (e quindi a periodi dell'ordine di 10^{-4} [s]). Affinchè si possa affermare che un circuito funzioni in regime quasi stazionario occorre che la sua dimensione γ sia piccola rispetto alla distanza percorsa dalla luce nel periodo più piccolo del campo significativo delle tensioni che nel caso considerato vale $R = c \cdot T = 3 \cdot 10^4$ [m]. Appare evidente da questa indicazione numerica che la condizione di funzionamento in regime quasi-stazionario sarà soddisfatta nella maggior parte delle applicazioni industriali iniziando a produrre indicazioni inattendibili per circuiti molto estesi o per frequenze dell'ordine di quelle usate nelle trasmissioni a radiofrequenza.

1.5 Convenzioni di misura

Si supponga di avere un circuito funzionante in regime quasi stazionario e di non conoscere la natura energetica di un bipolo inserito nel circuito stesso. Se si collega un voltmetro e un amperometro ideali ai suoi morsetti come indicato in Figura 1.8a ed il prodotto delle indicazioni dei due strumenti di misura è positivo allora il bipolo è un *bipolo utilizzatore*, viceversa se il prodotto è negativo allora il bipolo sarà un *bipolo generatore*. La connessione di voltmetro ed amperometro che produce tali risultati prende il nome di *convenzione di misura degli utilizzatori*.

Se, viceversa, si collegano gli strumenti come indicato in Figura 1.8b ed il prodotto delle indicazioni è positivo allora il bipolo è un *generatore*, in caso contrario sarà un *utilizzatore*. In questo caso si

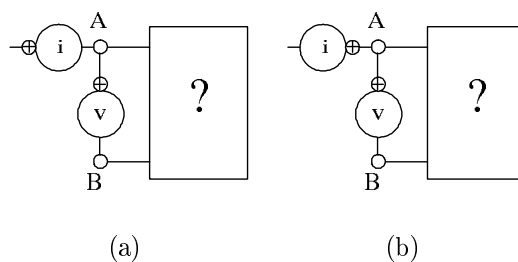


Figura 1.8: Convenzioni di misura: a) degli utilizzatori, b) dei generatori

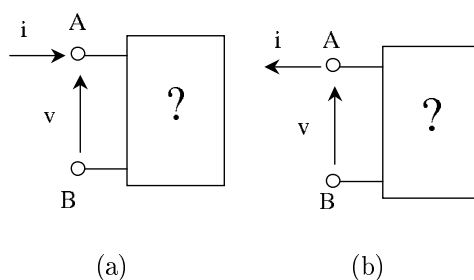


Figura 1.9: Rappresentazioni sintetiche delle convenzioni di misura: a) degli utilizzatori, b) dei generatori

indica questa inserzione di strumenti con il nome di *convenzione di misura dei generatori*.

Si tenga conto che nella risoluzione dei circuiti elettrici, l'indicazione degli strumenti di misura sarà spesso tralasciata, preferendo le rappresentazioni sintetiche evidenziate in Figura 1.9.

1.6 Bipoli ideali

Per ogni bipolo elettrico che verrà analizzato nei paragrafi successivi sarà possibile definire un legame tra la tensione e la corrente che si manifestano ai morsetti. Tale legame prende il nome di *legame costitutivo* del bipolo e può presentarsi in forma più o meno complessa, ma solitamente viene espresso nella forma $v = f(i)$ oppure $i = g(v)$.

Prendono il nome di *bipoli ideali*, i bipoli per i quali il legame costitutivo vale qualunque siano i valori assunti dalle correnti e dalle

tensioni ai morsetti e non è influenzato dalle condizioni al contorno in cui siano chiamati ad operare (temperatura, pressione, agenti inquinanti, ecc.).

I bipoli ideali sono, naturalmente, un'astrazione cui si perviene idealizzando il comportamento di componenti reali in ambiti limitati di tensioni, correnti e condizioni al contorno. Tali bipoli consentono di modellare i sistemi elettrici attraverso circuiti equivalenti agli effetti esterni che ne rappresentano le caratteristiche di funzionamento in condizioni da precisare caso per caso.

Nel seguito saranno considerati solo bipoli ideali caratterizzati da un legame costitutivo lineare e di maggior interesse per le applicazioni industriali.

1.6.1 Generatore ideale di tensione

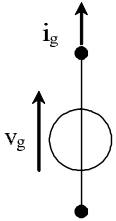
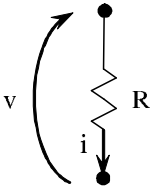
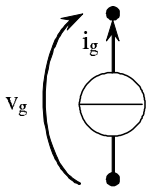
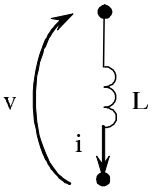
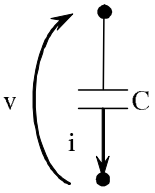
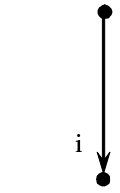
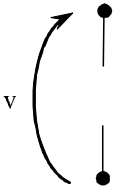
Prende il nome di *generatore ideale di tensione* il bipolo ideale che impone ai suoi morsetti una tensione ben definita qualunque sia la corrente ai morsetti (che dipenderà dalla rete connessa ai morsetti del generatore). Il simbolo circuitale è indicato nella Tabella 1.1 nella quale si è utilizzata la convenzione di misura dei generatori per indicare la corrente ai morsetti (nulla vieta naturalmente di usare quella degli utilizzatori). Un esempio di bipolo reale che può essere modellato con un generatore ideale di tensione, in opportune condizioni di funzionamento, è rappresentato dalla pila Daniell descritta nel Paragrafo 1.1.

Un generatore ideale di tensione con tensione impressa *nulla* è un *corto circuito ideale*: impone cioè che la tensione sia nulla qualunque sia la corrente ai morsetti (nei corti circuiti reali la tensione cresce al crescere della corrente). Il corto circuito ideale si indica come è specificato in Tabella 1.1.

1.6.2 Generatore ideale di corrente

Un *generatore ideale di corrente* impone ai suoi morsetti una corrente ben definita qualunque sia la tensione che si manifesta ai morsetti. Il

Tabella 1.1: Simboli circuitali di alcuni bipoli ideali

	Generatore ideale di tensione		Resistore
	Generatore ideale di corrente		Induttore
	Condensatore		Corto circuito ideale
	Circuito aperto ideale		

simbolo circuitale di tale bipolo è indicato in Tabella 1.1 nella quale si è utilizzata, per indicare la tensione, la convenzione di misura dei generatori.

Un generatore ideale di corrente nulla è un *circuito aperto ideale*: impone cioè che la corrente sia nulla qualunque sia la tensione ai morsetti (nella realtà ai morsetti di un circuito aperto la corrente cresce con la tensione fino ad assumere valori distruttivi quando si supera la tensione di scarica del sistema di isolamento). Il circuito aperto ideale si indica come è precisato in Tabella 1.1.

1.6.3 Resistore e conduttore ideale

Si definisce resistore ideale un bipolo che presenti la relazione costitutiva indicata in (1.11) quando tensione e corrente siano misurate con la convenzione degli utilizzatori. Il simbolo circuitale insieme alle convenzioni di misura sono quelli indicati in Tabella 1.1. Se viceversa si utilizza la convenzione dei generatori, la relazione costitutiva è espressa in (1.12). Il parametro R , costante, si chiama *resistenza* e si misura in $[\Omega] = [V/A]$ (Ohm).

$$v = R \cdot i \quad (1.11)$$

$$v = -R \cdot i \quad (1.12)$$

Il resistore ideale è un bipolo *utilizzatore passivo* che assorbe l'energia dai generatori presenti nel circuito dissipandola in calore. La potenza assorbita dal resistore è espressa in (1.13). Un esempio di bipolo reale che può essere modellato con un resistore ideale, in opportune condizioni di funzionamento, è rappresentato dalla lampadina presentata nel Paragrafo 1.1

$$p = v \cdot i = R \cdot i^2 \quad (1.13)$$

Nel caso particolare di $R = 0$, il resistore ideale si comporta come un *corto circuito*. Se viceversa $R \neq 0$, la relazione costitutiva è invertibile e può essere espressa nella forma indicata in (1.14). Se il bipolo

viene rappresentato attraverso questa relazione costitutiva si parla di *conduttore ideale*. Il parametro G prende il nome di *conduttanza* e si misura in $[S] = [\Omega^{-1}]$ (Siemens)⁴. Nella rappresentazione circuitale, il conduttore ideale viene indicato con il medesimo simbolo del resistore ideale.

$$i = G \cdot v \quad (1.14)$$

Nel caso particolare di $G = 0$ ($R = \infty$), il conduttore ideale si comporta come un *circuito aperto*.

1.6.4 Induttore ideale

L'*induttore ideale* è un bipolo rappresentato circuitalmente con il simbolo riportato in Tabella 1.1 (che ricorda la metodologia costruttiva degli induttori, ottenuti avvolgendo spire di materiale conduttore attorno ad un opportuno nucleo) che risponde alla relazione costitutiva indicata in (1.15).

$$v = L \frac{di}{dt} \quad (1.15)$$

Il parametro L prende il nome di *induttanza* e nel Sistema Internazionale di misura in $[H] = [V \cdot s/A] = [\Omega \cdot s]$ (Henry).

La grandezza $\psi = L \cdot i$ prende il nome di *flusso concatenato* dall'induttore e si tratta di una grandezza, la cui unità di misura è il $[Wb] = [V \cdot s]$ (Weber), a cui, nel caso di induttori reali, si darà un preciso significato fisico nei capitoli successivi.

Nel caso particolare in cui l'induttore si trovi a funzionare in condizioni di regime stazionario $i = I$ (costante), allora $v = 0$ per qualsiasi valore I : l'induttore si comporta come un *corto circuito* ideale.

La potenza entrante in un induttore ideale è indicata in (1.16) che può essere interpretata come derivata temporale dell'energia w_L accumulata nell'induttore. Per indicare questa proprietà di poter im-

⁴In alcuni casi, come unità di misura della conduttanza viene utilizzato il $[mho] = [\Omega^{-1}]$, che ha naturalmente la medesima definizione del Siemens.

magazzinare energia si riferisce all'induttore ideale con il termine di *bipolo reattivo*.

$$p = v \cdot i = L \frac{di}{dt} \cdot i = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) = \frac{dw_L}{dt} \quad w_L = \frac{1}{2} Li^2 \quad (1.16)$$

Un induttore si dirà *carico* se l'energia accumulata w_L è diversa da zero nell'istante di tempo considerato. Per l'induttore carico vale la proprietà che conserva indefinitamente l'energia accumulata se viene posto in corto circuito.

Tale proprietà può essere facilmente dimostrata avvelendosi dell'osservazione che se all'istante t^* in cui l'induttore carico viene posto in corto circuito la corrente ha valore I^* , negli istanti successivi, essendo la derivata della corrente nulla $v = 0 = L di/dt$ (per definizione di corto circuito ideale), la corrente circolante permarrà costante al valore I^* e di conseguenza l'energia accumulata si conserva.

1.6.5 Condensatore ideale

Il *condensatore ideale* è un bipolo rappresentato dal simbolo circuitale indicato in Tabella 1.1 (che in maniera analoga a quanto visto per l'induttore ideale ricorda la metodologia costruttiva dei condensatori reali ottenuti ponendo una lamina di materiale isolante tra due armature metalliche), che risponde alla relazione costitutiva indicata in (1.17).

$$i = C \frac{dv}{dt} \quad (1.17)$$

Il parametro C prende il nome di *capacità* e si misura in $[F] = [A \cdot s/V] = [\Omega^{-1} \cdot s]$ (Farad).

La grandezza $q = C \cdot v$ rappresenta la carica elettrica accumulata sulle armature di un condensatore reale di cui il condensatore ideale ne è una astrazione.

Nel caso particolare di tensione $v = V$ costante ai morsetti del condensatore, il legame costitutivo del condensatore comporta che $i = 0$ e quindi il condensatore si comporta come un *circuito aperto ideale*.

La potenza entrante in un condensatore è indicata in (1.18) che si può interpretare come derivata dell'energia accumulata w_C nel condensatore. Si può quindi osservare che anche il condensatore è un *bipolo reattivo*.

$$p = v \cdot i = v \cdot C \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C v^2 \right) = \frac{dw_C}{dt} \quad w_C = \frac{1}{2} C v^2 \quad (1.18)$$

Un condensatore si dice *carico* se l'energia accumulata è diversa da zero. Un condensatore ideale carico lasciato a vuoto (cioè con i morsetti aperti) conserva indefinitamente l'energia accumulata. La dimostrazione di questa proprietà può essere facilmente ricavata seguendo i medesimi passi già illustrati per l'induttore ideale carico.

Capitolo 2

Risoluzione di circuiti elettrici

2.1 Topologia delle reti

Come già introdotto nel Capitolo 1, un circuito elettrico reale in regime quasi-stazionario, è costituito connettendo diversi bipoli generatori ed utilizzatori con ben precisi scopi energetici.

La topologia del circuito è descritta, si veda la Figura 2.1, dal così detto *grafo* e cioè da un disegno stilizzato in cui i diversi bipoli del circuito sono rappresentati da archi che uniscono i punti di connessione (*nodi*), tra i morsetti dei diversi bipoli. Questi archi, denominati *lati* del circuito, vengono successivamente numerati assegnando 1 come primo numero, si veda la Figura 2.1. Anche i nodi vengono successivamente numerati a partire da un nodo qualsiasi (che prende il nome di *nodo di massa*) cui si assegna il numero 0 (zero), si veda ancora la Figura 2.1.

Nel seguito si considereranno solo grafi *connessi* (privi cioè di parti separate) e *non articolati* (cioè non separabili in due o più parti tra loro non interagenti).¹

Il primo passo per studiare una rete consiste nel fissare le convenzioni di misura delle correnti e delle tensioni nei lati. Nel seguito tale operazione verrà compiuta seguendo modalità normalizzate e più precisamente si fisserà per ogni lato la convenzione di misura della corrente orientando il lato stesso (e cioè indicando sul lato con una

¹Le nozioni di teoria dei grafi e delle reti vengono qui proposte in forma “intuitiva”. Per ulteriori approfondimenti si faccia riferimento a testi specifici di teoria delle reti e dei circuiti.

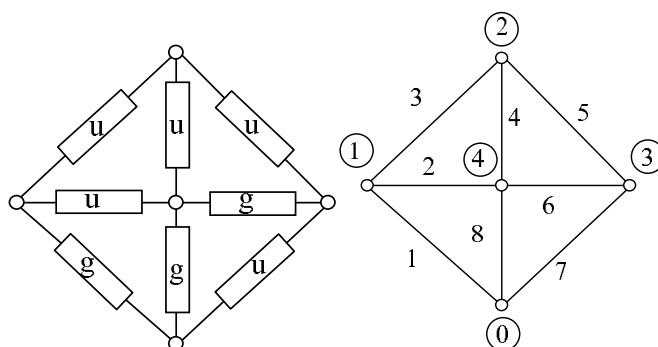


Figura 2.1: Il grafo di una rete elettrica

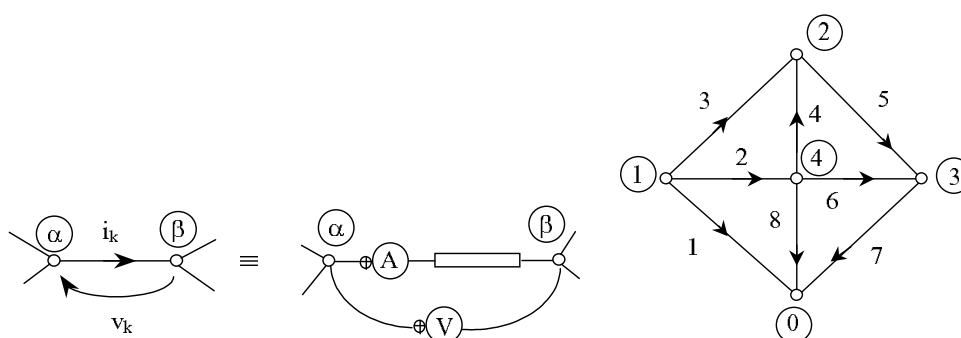


Figura 2.2: a) Convenzioni di misura; b) Grafo orientato.

freccia la modalità di inserzione dell'amperometro) e le tensioni verranno misurate sempre con la convenzione degli utilizzatori, si veda la Figura 2.2a, in modo che potrà esser sottointesa la freccia indicativa della modalità di inserzione del voltmetro. Una volta scelta la convenzione di misura della corrente per ogni lato si otterrà un *grafo orientato*, si veda la Figura 2.2b.

Risolvere una rete elettrica comporterà la valutazione delle correnti e delle tensioni di ogni lato del grafo orientato quando sia nota la natura dei bipoli che compongono la rete. Indicato con l il numero dei lati, il numero delle incognite sarà ovviamente pari a $2l$.

Per la risoluzione di una rete elettrica ci si può avvalere delle equazioni conseguenti alle seguenti leggi.

- I *legami costitutivi* (LC) dei singoli lati e cioè la legge $v = f(i)$ oppure $i = g(v)$ che, in relazione alla natura del bipolo, lega la

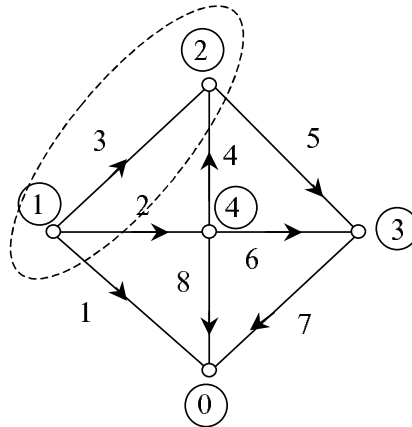


Figura 2.3: Legge di Kirchhoff delle correnti

corrente e la tensione ai morsetti di ogni lato. E' evidente che si potranno scrivere l equazioni ai legami costitutivi.

- Le *leggi di Kirchhoff delle correnti* (LKC): considerata una superficie chiusa, si veda la Figura 2.3, che intersechi il grafo della rete in corrispondenza di due o più lati, è nulla la somma delle correnti entranti (o uscenti) dalla superficie chiusa (nel seguito si considererà positiva la corrente entrante), si veda (2.1). Come caso particolare la superficie chiusa può racchiudere un nodo della rete e cioè un punto in cui convergono due o più lati ed in questo caso la LKC comporta che sia nulla la somma algebrica delle correnti entranti in ogni nodo di rete, si veda la Figura 2.4 e l'equazione (2.4).

$$-i_1 - i_2 + i_4 - i_5 = 0 \quad (2.1)$$

$$i_3 + i_4 - i_5 = 0 \quad (2.2)$$

- Le *leggi di Kirchhoff delle tensioni* (LKT): definita una *maglia* del grafo come una linea chiusa, costituita da lati del grafo, in cui ogni nodo ha solo due lati incidenti su di esso, è nulla la somma algebrica delle tensioni misurate ordinatamente tra i successivi nodi della maglia. Questo comporta che, ad esempio, per la

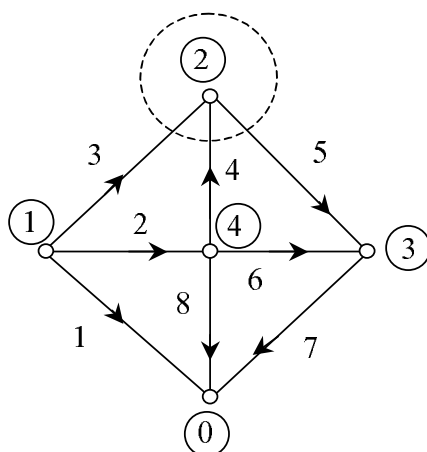


Figura 2.4: Legge di Kirchhoff delle correnti ad un nodo

maglia di Figura 2.5a sia nulla la somma delle tensioni $v_{01} + v_{12} + v_{24} + v_{40}$, dove il primo indice della tensione indica il nodo cui è collegato il morsetto + del voltmetro. Dal momento che, si veda la Figura 2.5b, $v_{01} = -v_1$, $v_{12} = v_3$, $v_{24} = -v_4$, $v_{40} = v_8$ (perché le tensioni di lato vengono sempre misurate con le convenzioni degli utilizzatori), la LKT della maglia si scrive $-v_1 + v_3 - v_4 + v_8 = 0$. La scrittura della equazione che esprime la LKT di una maglia è “automatica” se si tiene conto che abbiamo scelto per le tensioni la convenzione di misura degli utilizzatori. Si fissa infatti un senso di percorrenza della maglia (nel seguito si adopererà quello orario): la tensione di un lato verrà trascritta positiva se la corrente del lato è concorde con il senso di percorrenza della maglia, si veda la Figura 2.5, negativa in caso contrario.

Come caso particolare se la linea chiusa è tale da non lasciare al suo interno dei lati, si veda la Figura 2.6, si parla in tal caso di *anello* e la LKT afferma che è nulla la somma delle tensioni misurate ordinatamente lungo i lati di un anello, si veda (2.3).

$$v_3 - v_4 - v_2 = 0 \quad (2.3)$$

Nella applicazione delle leggi precedenti per la risoluzione di una rete elettrica si incontrano le seguenti difficoltà.

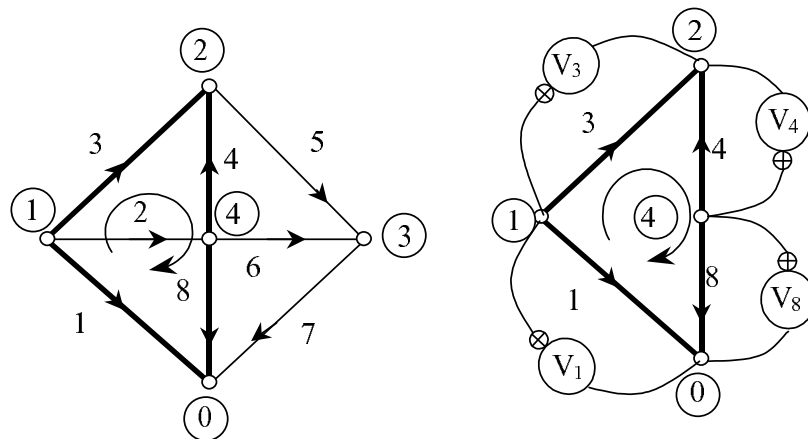


Figura 2.5: Legge di Kirchhoff delle tensioni ad una maglia

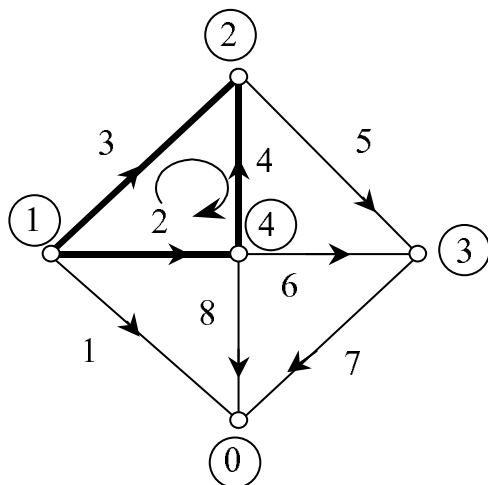


Figura 2.6: Legge di Kirchhoff delle tensioni ad un anello

- Occorre scrivere in modo “metodicamente veloce” le equazioni che si deducono dalle Leggi di Kirchhoff evitando di ripetere più volte le stesse informazioni (le equazioni devono esser linearmente indipendenti).
- Mentre le Leggi di Kirchhoff sono sempre lineari altrettanto non avviene per i legami costitutivi dei bipoli. Nel seguito tale analisi sarà comunque limitata agli elementi lineari di maggior interesse per le applicazioni industriali.
- Una volta scritte le equazioni le modalità di soluzione dipendono dalla natura degli ingressi e cioè dalla natura dei generatori che alimentano le rete. I casi di maggior interesse industriale sono quelli di generatori che imprimono: i) tensioni e/o correnti costanti nel tempo (in tal caso tutte le grandezze di rete sono costanti e si parla di regime stazionario); ii) tensioni e/o correnti alternate sinusoidali isofrequenziali (tutte le grandezze di rete rispondono allo stesso tipo di legge temporale e si parla di rete in regime alternato sinusoidale), iii) tensioni e/o correnti variabili nel tempo rispondenti ad una sinusoidale generalizzata (cissoide): si parlerà di rete in transitorio cissoideale (si veda il Capitolo 7).

2.2 Teorema fondamentale delle reti elettriche

Il teorema fondamentale delle reti elettriche afferma che una rete di l lati è risolvibile, e cioè è possibile individuare le $2l$ incognite corrispondenti alle tensioni e correnti di lato, avvalendosi delle equazioni ai legami costitutivi LC e delle equazioni linearmente indipendenti conseguenti alle LKC e LKT.

Si dimostra infatti che se n sono i nodi della rete è possibile scrivere $n - 1$ equazioni indipendenti ai nodi basate sulla LKC.

In effetti considerato l'insieme di tutte le equazioni ai nodi, si osserva che la corrente di ogni lato, essendo quest'ultimo inserito tra due nodi, compare con segni opposti nelle due equazioni di tali nodi.

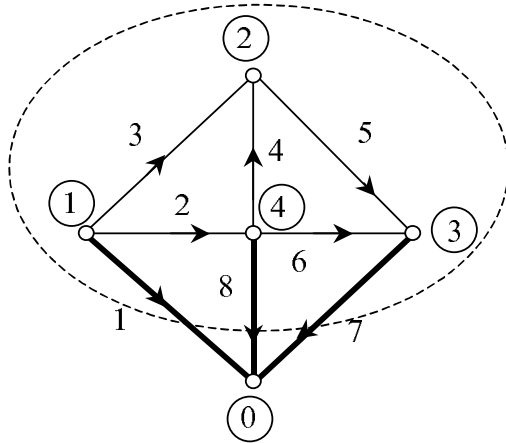


Figura 2.7: I lati del nodo di massa

Se ne conclude che la somma di tutte le equazioni ai nodi è nulla e quindi sono linearmente dipendenti.

Si escluda ora il nodo di massa dal numero dei nodi e si metta in evidenza i lati che collegano il nodo in questione con la parte restante della rete, si veda la Figura 2.7. Le $n - 1$ equazioni che si deducono dalla LKC per i nodi della parte restante non possono più dare somma nulla perché le correnti dei lati che uniscono tale parte con il nodo di massa compaiono una sola volta in tali equazioni. Se ne conclude che tali equazioni sono tra loro indipendenti.

Si dimostra ora che se a sono gli anelli di una rete planare è possibile scrivere $a - 1$ equazioni indipendenti agli anelli basate sulla LKT.

Per dimostrare quanto detto, si numerino gli anelli del grafo partendo dall'anello esterno cui sarà assegnato il numero zero (l'esistenza di questo anello esterno è evidente se si dispone la rete su una sfera, l'anello esterno ha le stesse prerogative topologiche degli altri anelli). Si orientino poi gli anelli interni in senso orario e l'anello esterno in senso antiorario, si veda, ad esempio, la Figura 2.8.

Si può osservare che ogni lato del grafo fa parte di due anelli e che, in base all'orientamento degli anelli stessi, viene percorso in senso opposto nei due anelli per modo che la tensione di tale lato compare con segni opposti nelle corrispondenti LKT dei due anelli. Se ne

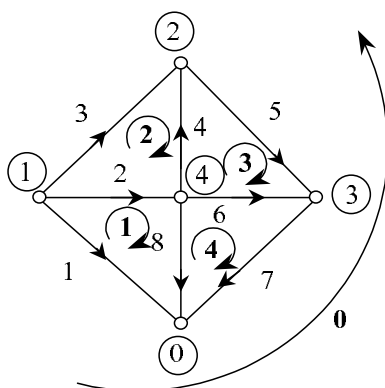


Figura 2.8: Orientamento degli anelli interni e dell'anello esterno

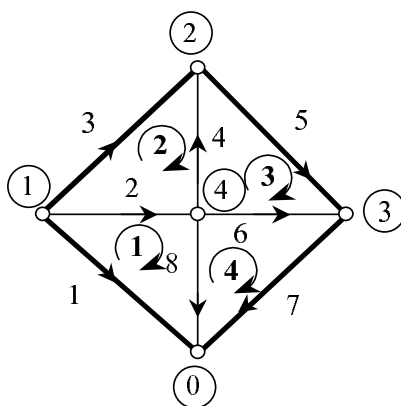


Figura 2.9: Lati in comune tra l'anello esterno e quelli interni

conclude che la somma delle tensioni che compaiono nelle LKT di tutti gli anelli è nulla e quindi che tali equazioni sono linearmente dipendenti.

Si escluda ora l'anello di massa dal numero degli anelli e si metta in evidenza i lati che fanno parte contemporaneamente degli anelli interni e di quello escluso, si veda la Figura 2.9. Le tensioni di tali lati compaiono una sola volta nelle equazioni agli anelli interni che pertanto non potranno più avere somma nulla. Se ne conclude che $a - 1$ sono le equazioni agli anelli tra loro indipendenti.

Si dimostra infine che se l sono i lati della rete allora $a - 1 = l - n + 1$. Tale proprietà può essere dimostrata per induzione. Come evidenziato in Figura 2.10a, il più semplice degli anelli soddisfa tale

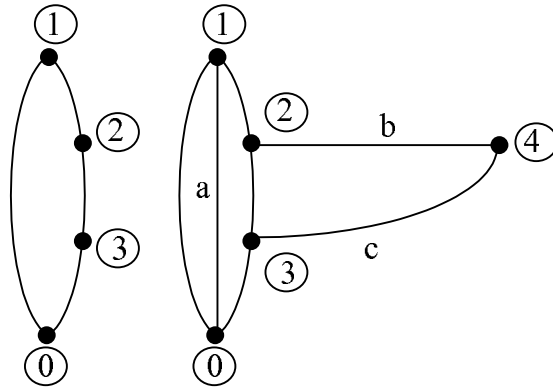


Figura 2.10: a) Anello base; b) Esempio di creazione di un nuovo anello.

regola qualunque sia il numero di lati che lo compongono. A partire da questo anello base è possibile realizzare, si veda la Figura 2.10b, un altro anello o aggiungendo un lato tra i nodi esistenti (e questo conferma la regola) oppure aggiungendo k lati con $k - 1$ nodi (e questo conferma ancora la regola).

Complessivamente per una rete ad l lati, e quindi con $2l$ incognite (la corrente e la tensione di ogni lato), si hanno a disposizione l equazioni corrispondenti ai legami costitutivi LC di ogni lato, $n - 1$ equazioni indipendenti corrispondenti alla LKC ai nodi ed $l - n + 1$ equazioni indipendenti corrispondenti alla LKT agli anelli: il numero delle equazioni indipendenti ($l + (l - n + 1) + (n - 1) = 2l$) è pari al numero delle incognite.

Il teorema fondamentale ora individuato per la soluzione di una rete propone un metodo di calcolo del tutto generale, ma piuttosto oneroso (perché richiede di valutare contemporaneamente le correnti e le tensioni) rispetto a quelli deducibili dalla teoria dei grafi (che consentono il calcolo di un numero più ridotto di incognite con una impostazione matriciale che ne facilita la soluzione, si rimanda in proposito ai testi di “teoria delle reti”, al metodo dei *potenziali ai nodi* ed a quello delle *correnti cicliche*), ma fornisce comunque le indicazioni di base per tutti i metodi successivi e consente la soluzione “a vista” delle reti più semplici.

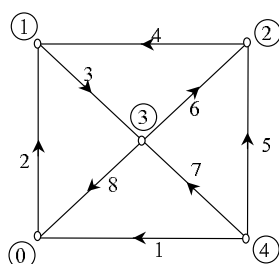


Figura 2.11: Esempio di grafo di una rete

2.3 Ulteriori proprietà topologiche

Per generalizzare la scrittura delle equazioni necessarie alla risoluzione delle reti elettriche e consentire una più rapida e sistematica scrittura delle equazioni differenziali che governeranno i transienti delle reti elettriche, saranno indicate in questo paragrafo alcune proprietà topologiche applicabili ai grafi connessi che descrivono una rete elettrica.

Si definisce *albero* un sottografo che contiene tutti i nodi di una rete ed è privo di maglie. I lati di questo sottografo si chiamano lati d'albero, la parte complementare dell'albero si chiama *coalbero* ed i lati del coalbero si chiamano *corde*. Per ogni grafo è possibile definire più alberi e coalberi, ad esempio per il grafo di Figura 2.11 sono riportati in Figura 2.12 alcuni possibili alberi. Si nota però che tutti gli alberi ed i coalberi rispondono alle proprietà generali sotto indicate (verranno illustrate con riferimento al primo degli alberi di Figura 2.12).

- In un albero esiste un unico percorso tra due nodi: in effetti se ci fossero due percorsi allora esisterebbe una maglia, la cui esistenza è esclusa dalla definizione di albero.
- Il numero dei lati dell'albero è pari al numero dei nodi indipendenti $n - 1$. In effetti nell'albero vi sono almeno 2 nodi terminali (ad esempio il nodo 0 ed il nodo 3 nell'albero di Figura 2.12a). Per ogni lato connesso ad un nodo terminale che si cancella dall'albero si libera un nodo, quando infine si elimina l'ultimo lato

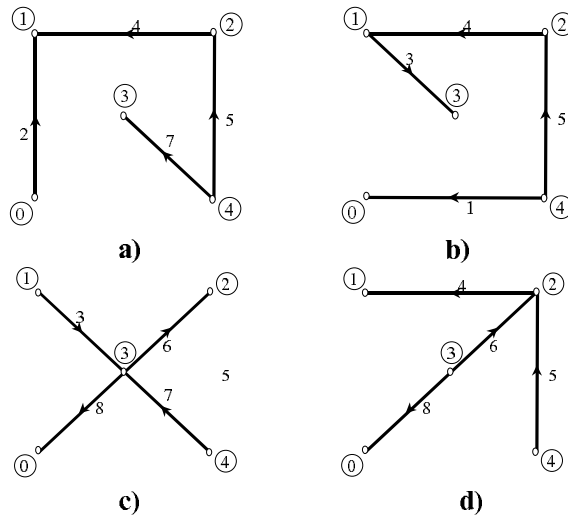


Figura 2.12: Alberi della rete di Figura 2.11

vengono liberati due nodi. Se ne conclude che il numero dei lati d'albero è $n - 1$.

- Il numero delle corde è pari al numero degli anelli indipendenti $a - 1$. Questa proprietà è conseguenza della precedente, in quanto il numero di corde è il numero totale di lati l meno il numero di lati dell'albero che è pari al numero di nodi indipendenti $n - 1$ ($n_{\text{corde}} = l - n + 1 = a - 1$).
- Aggiungendo ognuna delle corde all'albero si forma una maglia indipendente. E' evidente che l'aggiunta di una corda provoca sicuramente la formazione di una maglia (dalla definizione di albero e corda) ed ogni maglia creata contiene una tensione non comune alle altre maglie: quella della corda che viene aggiunta all'albero. Ne consegue che nessuna delle LKT delle maglie così costruite può dedursi dalle altre. Quindi le equazioni che così vengono costruite sono tra loro indipendenti. Nella Figura 2.13 sono illustrate le maglie indipendenti costruibili sul primo degli alberi di Figura 2.12.
- Adagiando sull'albero una superficie chiusa che tagli un solo lato degli lati d'albero (operazione che è sempre fattibile perché

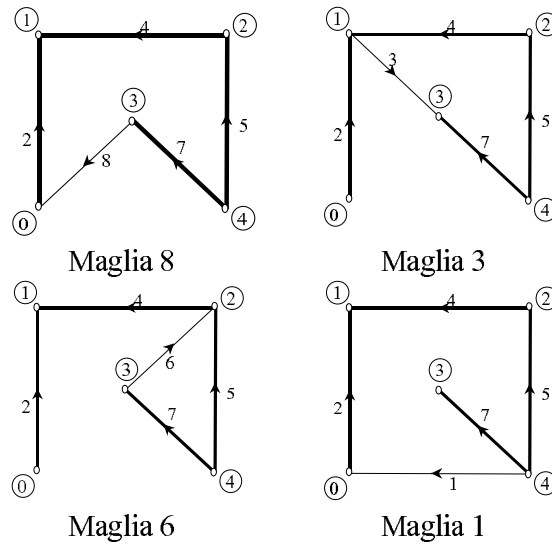


Figura 2.13: Maglie indipendenti costruite appoggiando le a corde al primo degli alberi di Figura 2.12

l'albero è una struttura senza maglie) si può formare un nodo generalizzato. Anche in questo caso ognuno di questi nodi generalizzati contiene una corrente che non compare negli altri: quella del lato d'albero che viene tagliato. Ne consegue che nessuna delle LKC dei nodi così costruiti può dedursi dalle altre e dunque le equazioni che si possono dedurre sono tra loro indipendenti. Nella Figura 2.14 sono illustrati gli nodi indipendenti costruibili con i lati del primo degli alberi di Figura 2.12.

Il teorema generale delle reti elettriche può essere, dunque, così enunciato: data una rete elettrica con lati rappresentata dal suo grafo orientato, scelto un albero, le equazioni risolutive sono le $n - 1$ LKC date dai nodi associati ai lati d'albero, le $l - n + 1$ LKT date dalle maglie associate alle corde e gli l legami costitutivi LC di ogni lato.

Come esempio applicativo si consideri la rete che presenta il grafo orientato di Figura 2.15a) e lati del tipo indicato in Figura 2.15b). Scelto come albero quello evidenziato nella Figura 2.15a), le equazioni risolutive (costruite con la metodologia sopra indicata) sono quelle indicate nelle (2.4). Si noti che nella scrittura delle LKT si è assunto come verso positivo di percorrenza della maglia quella del lato d'albero

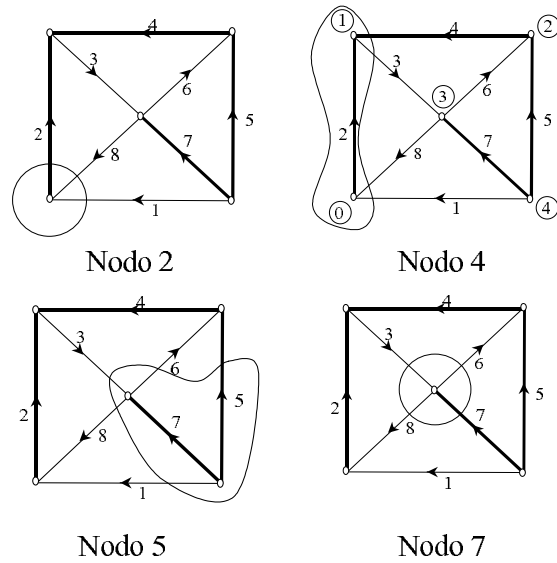


Figura 2.14: Nodi indipendenti costruiti tagliando gli n lati d'albero del primo albero di Figura 2.12

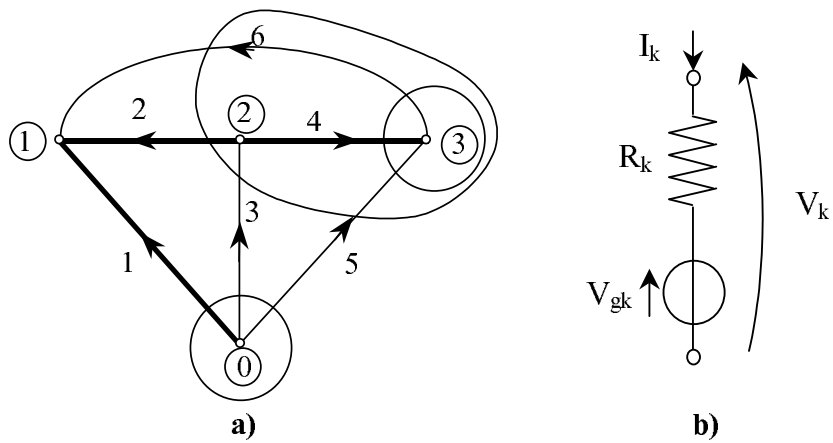


Figura 2.15: Esempio applicativo: a) Il grafo della rete; b) Lati della rete

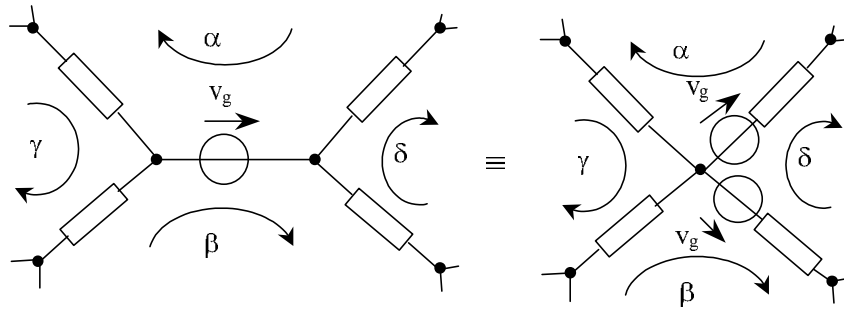


Figura 2.16: Eliminazione dei generatori di tensione senza modificare le LKT

che la definisce e nella scrittura delle LKC si è assunto come verso positivo delle correnti quello della corda che definisce il nodo.

$$\begin{array}{ll}
 V_3 + V_2 - V_1 = 0 & I_1 + I_3 + I_5 = 0 \\
 V_6 - V_2 + V_4 = 0 & (LKT) \quad I_2 - I_3 - I_5 + I_6 = 0 \quad (LKC) \\
 V_5 - V_4 + V_2 - V_1 = 0 & I_4 + I_5 - I_6 = 0
 \end{array}$$

$$V_k = V_{gk} + R_k I_k \quad (LC) \tag{2.4}$$

Rimane evidente la generalità del metodo e la possibilità di utilizzarlo per la scrittura sistematica del sistema di equazioni necessario per la risoluzione di una rete elettrica.

Al fine di ridurre il numero delle equazioni conviene, preliminarmente alla scrittura delle stesse, ridurre eventuali lati della rete costituiti da soli generatori in modo da poter ridurre ogni lato della rete a lati del tipo indicato in Figura 2.15b (o nella configurazione duale generatore di corrente in parallelo ad una conduttanza). A questo scopo si possono usare le metodologie evidenziate nelle Figure 2.16-2.17 che non modificano le LKT e le LKC.

2.4 Principio di dualità

Prima di procedere all'enunciazione di alcuni dei teoremi applicabili alle reti elettriche, conviene premettere un principio di carattere

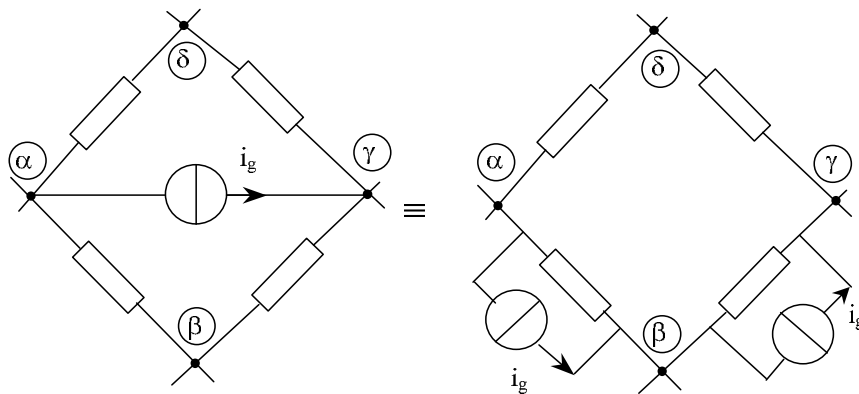


Figura 2.17: Eliminazione dei generatori di corrente senza modificare le LKC

generale che consente in molti casi di semplificare lo studio stesso dell'elettrotecnica. Il principio si basa sull'osservazione che sostituendo alcune parole in proposizioni/teoremi già noti dell'elettronica si ottengono nuove proposizioni/teoremi, detti *duali*, con la medesima validità dei precedenti². Si nota immediatamente la portata di tale principio in quanto permette di accrescere velocemente l'insieme dei teoremi noti senza dover ricorrere ad ulteriori dimostrazioni.

Tabella 2.1: Parole duali

Tensione	Corrente
Nodo	Anello
Serie	Parallelo
Resistore	Conduttore
Resistenza	Conduttanza
Induttore	Condensatore
Induttanza	Capacità
Flusso	Carica elettrica
Corto circuito	Circuito aperto

In Tabella 2.1 è riportato un breve elenco di parole duali, mentre in Tabella 2.2 sono riportati alcuni esempi di frasi duali.

²Il principio di dualità è un principio più generale che può essere applicato anche ad altre scienze oltre che all'elettrotecnica. La prima vera formalizzazione di tale principio la si può trovare negli scritti di geometria proiettiva ad opera di von Staudt (1798-1867), Poncelet (1788-

Tabella 2.2: Esempi di frasi duali

Un generatore di <i>tensione</i> nulla è un <i>corto circuito</i>	Un generatore di <i>corrente</i> nulla è un <i>circuito aperto</i>
Un <i>resistore</i> di <i>resistenza</i> nulla è un <i>corto circuito</i>	Un <i>conduttore</i> di <i>conduttanza</i> nulla è un <i>circuito aperto</i>
La <i>resistenza</i> equivalente di due <i>resistori</i> in <i>serie</i> è la somma delle <i>resistenze</i>	La <i>conduttanza</i> equivalente di due <i>conduttori</i> in <i>parallelo</i> è la somma delle <i>conduttanze</i>
Il numero di <i>nodi</i> indipendenti è $n - 1$	Il numero di <i>anelli</i> indipendenti è $a - 1$
L'energia accumulata in un <i>induttore</i> è $Li^2/2$	L'energia accumulata in un <i>condensatore</i> è $Cv^2/2$
Un <i>induttore</i> interessato da <i>corrente</i> costante è equivalente ad un <i>corto circuito</i>	Un <i>condensatore</i> interessato da <i>tensione</i> costante è equivalente ad un <i>circuito aperto</i>

Estendendo tale proprietà alla topologia delle reti elettriche, si possono definire *reti duali* quelle che rispondono a proposizioni duali. In Figura 2.18 è riportato un esempio di reti duali.

Per reti piane, cioè che possono essere stese su una superficie sferica in modo che i lati non si incrocino, si può individuare in maniera sistematica la rete duale con la seguente procedura:

- Si dispone un nodo all'interno di ciascuna maglia indipendente del circuito.
- Si dispone all'esterno del circuito il nodo corrispondente alla maglia non indipendente o di riferimento.
- Si uniscono tra di loro diversi nodi mediante delle linee tracciate in modo che ogni linea tagli un solo elemento e che ogni linea una volta penetrata in una maglia converga al nodo interno di quella maglia.

1867) e Gergonne (1771-1859).

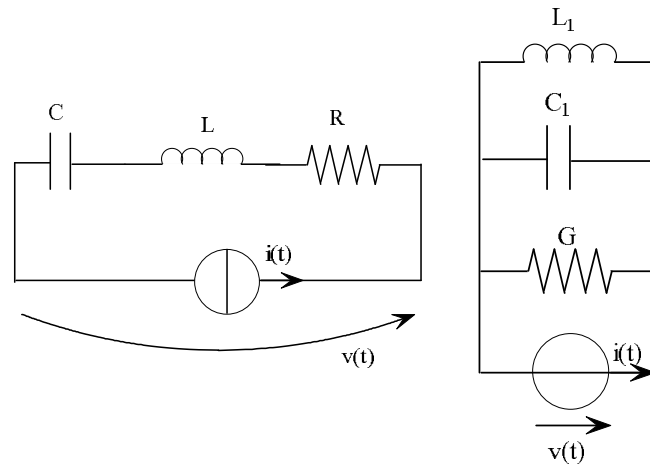


Figura 2.18: Esempio di reti duali

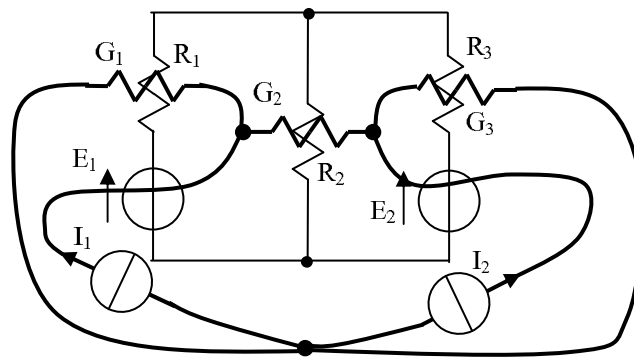


Figura 2.19: Esempio di creazione di rete duale

- Si dispone su ogni linea l'elemento duale di quello tagliato.
- Si fissano le convenzioni di misura delle correnti e delle tensioni rispettando il principio di dualità.

In Figura 2.19 è riportato un esempio di applicazione della metodologia precedente per la creazione di una rete duale.

2.5 Teoremi delle reti elettriche

Vengono di seguito presentati alcuni teoremi generali delle reti elettriche utili per lo studio e la risoluzione delle stesse.

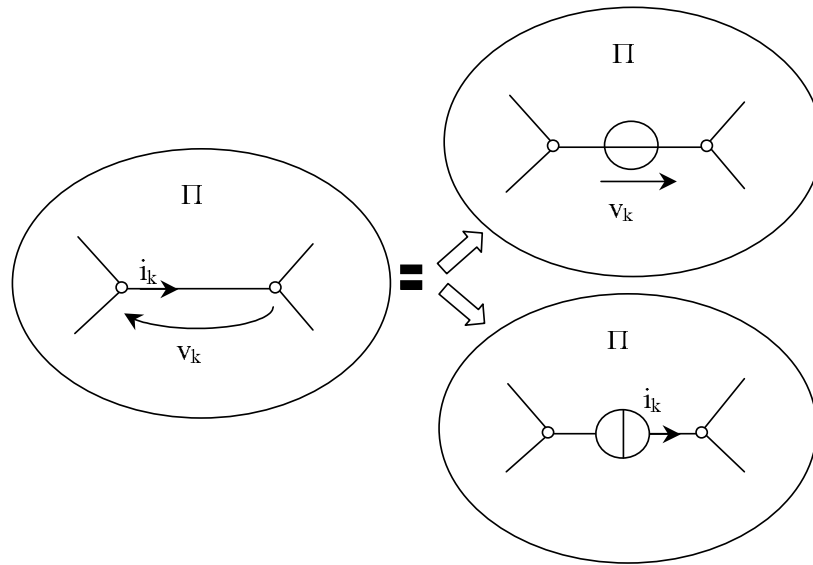


Figura 2.20: Il teorema di sostituzione

2.5.1 Teorema di sostituzione

Data una rete arbitraria Π , con un certo numero di generatori indipendenti, che ammetta un'unica soluzione, siano v_k e i_k la tensione e la corrente del lato k . La soluzione della rete non cambi se al lato k si sostituisce un generatore di tensione indipendente con tensione v_k oppure un generatore di corrente indipendente con corrente i_k , si veda Figura 9.2.

2.5.2 Teorema di sovrapposizione

La risposta di una rete R-L-C lineare, inizialmente (cioè per $t = 0$) scarica, ad un insieme di generatori di tensione e di corrente indipendenti è pari alla somma delle risposte della rete a ciascuno dei generatori, pensati agenti da soli, quando gli altri generatori di tensione siano sostituiti con un corto circuito e quelli di corrente siano sostituiti con un circuito aperto (Figura 2.21). Questo comporta che se in una rete si aggiunge un generatore indipendente la soluzione della rete sia la somma di quella precedente più quella dovuta al solo generatore aggiunto quando gli altri siano opportunamente spenti. La

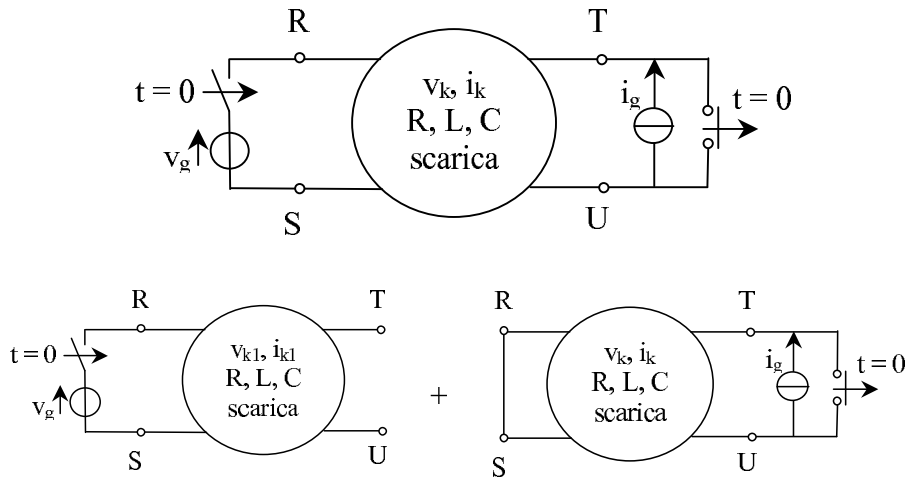


Figura 2.21: Il teorema di sovrapposizione

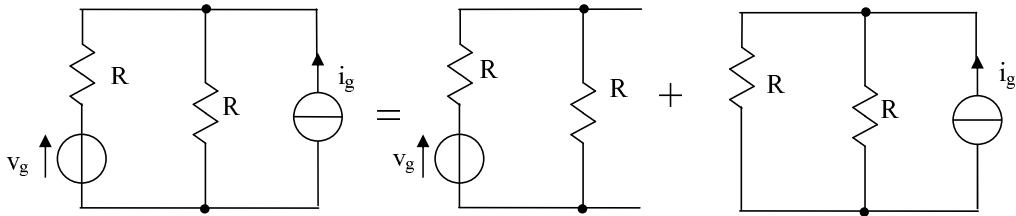


Figura 2.22: Esempio di applicazione del teorema di sovrapposizione

Figura 2.22 riporta un semplice esempio; la tensione e la corrente di un generico lato k possono essere calcolate come indicate in (2.5).

$$v_k = v_{k1}|_{i_g=0} + v_{k2}|_{v_g=0} \tag{2.5}$$

$$i_k = i_{k1}|_{i_g=0} + i_{k2}|_{v_g=0}$$

2.5.3 Teoremi di Thevenin e Norton

Si consideri un rete lineare Π connessa ai morsetti R,S ad un bipolo B arbitrario (il teorema quindi vale qualunque sia il legame costitutivo del carico connesso ai morsetti R,S), si veda la Figura 2.23a. Si supponga di staccare il carico (funzionamento a vuoto) e di misurare la tensione v_{0RS} che si manifesta ai morsetti (si veda la Figura 2.23c).

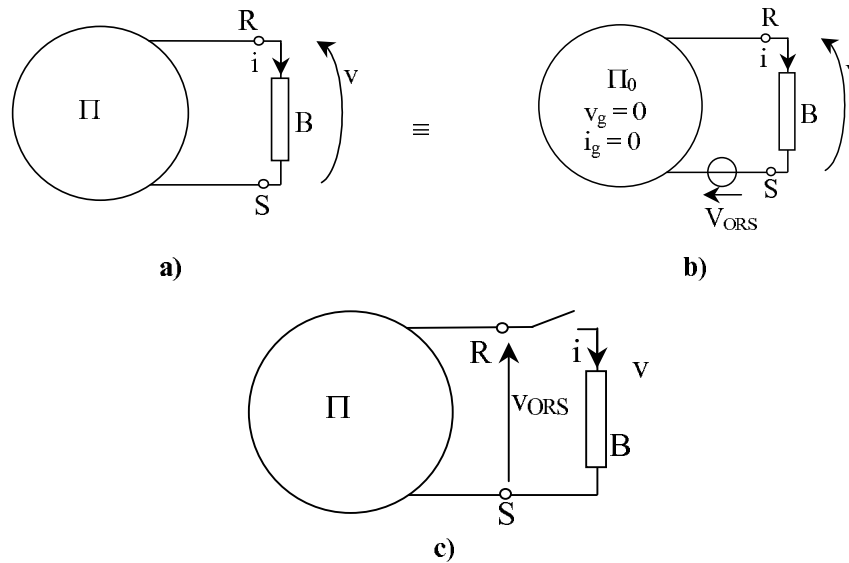


Figura 2.23: Il teorema di Thevenin: a) rete iniziale; b) rete equivalente; c) misura della tensione a vuoto.

Il teorema della rete equivalente di Thevenin, si veda la Figura 2.23b, assicura che agli effetti del calcolo della tensione e della corrente nel bipolo B si può sostituire all'intera rete Π un generatore indipendente di tensione pari a v_{0RS} (disposto come è indicato in Figura 2.23b) in serie ad una rete Π_0 ottenuta da quella iniziale azzerando tutti i generatori indipendenti (quindi sostituendo ai generatori di tensione indipendente un corto circuito ed ai generatori di corrente indipendente un circuito aperto).

In effetti, si veda la Figura 2.24a, nulla cambia nel funzionamento della rete se in serie al carico si dispongono due generatori indipendenti di tensione pari a $\pm v_{0RS}$.

In base al teorema di sostituzione si può sostituire al bipolo B un generatore di corrente pari ad i , in questo modo, la tensione nella rete di Figura 2.24a si può calcolare per sovrapposizione: i) di quelle della rete di Figura 2.24b dovute alla rete Π ed al generatore v_{0RS} che comporta corrente e tensione nulla in B per come è stata definita v_{0RS} , e ii) di quelle dovute alla rete Π_0 (con generatori nulli), al generatore $-v_{0RS}$ e al generatore i , si veda la Figura 2.24c. Poichè la rete di Figura 2.24b, presentando tensioni e correnti nulle su B , non influenza

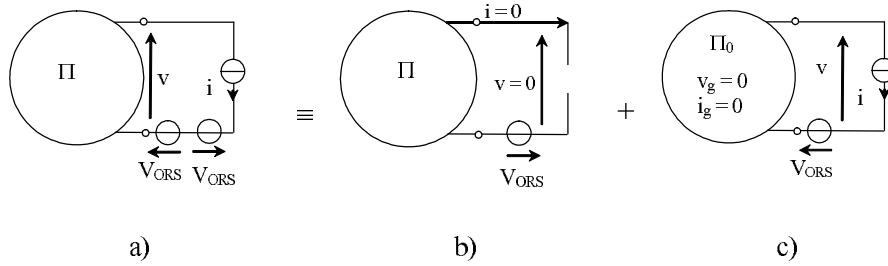


Figura 2.24: a) Rete equivalente; b) Rete con corrente e tensione nulla su B, c) rete equivalente di Thevenin per il calcolo della tensione e corrente di B

la soluzione, allora la rete di Figura 2.24c risulta equivalente a quella di partenza come si voleva dimostrare.

Il teorema della rete equivalente di Norton è duale di quello precedente e si riferisce sempre alla rete riprodotta per comodità in Figura 2.25a. Si supponga di porre in corto circuito il carico e di misurare la corrente di corto circuito i_{kRS} , si veda la Figura 2.25c.

Il teorema della rete equivalente di Norton assicura che agli effetti del calcolo della tensione e della corrente nel bipolo B si può sostituire all'intera rete Π un generatore indipendente di corrente pari alla corrente di corto circuito i_{kRS} (disposto come è indicato in Figura 2.25c) in parallelo ad una rete Π_0 ottenuta da quella iniziale azzerando tutti i generatori indipendenti, si veda la Figura 2.25c che descrive la rete equivalente di Norton.

In effetti, si veda la Figura 2.26a, nulla cambia nel funzionamento della rete Π se in parallelo al carico B si dispongono due generatori indipendenti di corrente pari a $\pm i_{kRS}$.

In base al teorema di sostituzione si può sostituire al bipolo B un generatore di tensione pari a v e la corrente di B si può calcolare per sovrapposizione: i) di quelle della rete di Figura 2.26b dovute alla rete ed al generatore i_{kRS} che comporta corrente e tensione nulla su B e ii) di quelle della rete Π_0 (con generatori nulli), al generatore $-i_{kRS}$ e al generatore v , si veda la Figura 2.26c che descrive la rete equivalente di Norton.

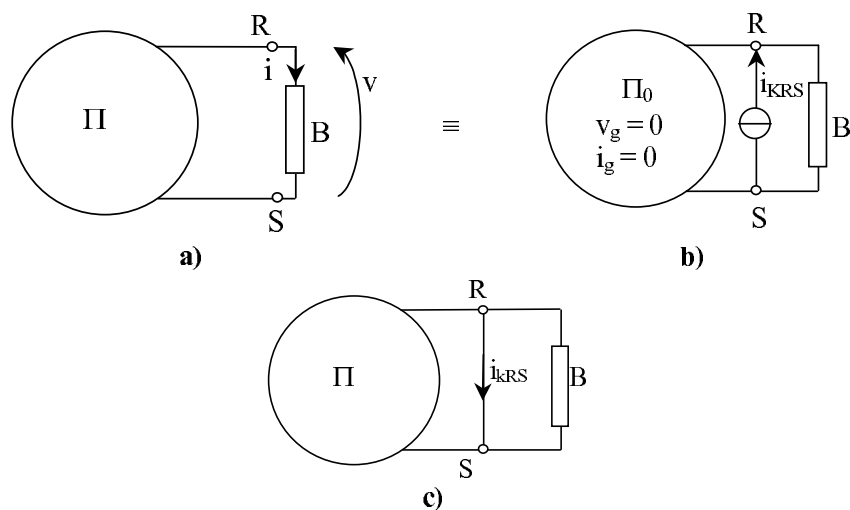


Figura 2.25: Teorema di Norton: a) rete iniziale; b) rete equivalente; c) misura della corrente di corto circuito.

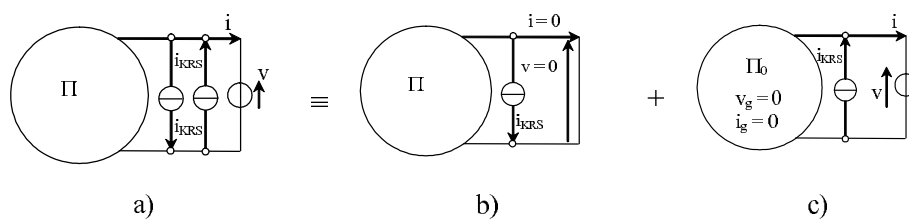


Figura 2.26: a) Rete equivalente; b) rete con corrente e tensione nulla su B; c) rete equivalente di Norton per il calcolo della tensione e corrente di B

2.5.4 Teorema di Tellegen

Si consideri un grafo orientato (non una rete elettrica) ed assegnata arbitrariamente una corrente i_j ed una tensione v_j ad ogni lato j (con tensioni e correnti misurate in modo coordinato, ad esempio con la convenzione degli utilizzatori), se tali grandezze rispettano le LKC e le LKT allora la somma dei prodotti $v_j i_j$, estesa a tutti i lati della rete, è nulla, per modo che vale la (2.6)

$$\sum_j v_j i_j = 0 \quad (2.6)$$

Si noti che il teorema di Tellegen è più generale del principio di conservazione dell'energia che si ritrova come caso particolare solo se la tensione e la corrente sono quelle fisiche, quelle cioè che si realizzano in un funzionamento particolare di una rete dotata di quel grafo dovuto alla presenza di specifici generatori.

Capitolo 3

Reti resistive

3.1 Introduzione

In questo capitolo saranno introdotte alcune proprietà e metodologie di studio che possono essere applicate per la risoluzione di reti elettriche in cui il bipolo utilizzatore è costituito esclusivamente da bipoli di tipo resistivo. Le osservazioni e le conclusioni ottenute potranno poi essere facilmente estese anche al caso di reti contenenti bipoli di natura diversa.

3.2 Resistore equivalente di una rete di resistori

In una rete elettrica, al fine di rendere più agevole la sua risoluzione, è spesso utile semplificarne parti di essa che non contengano generatori, attraverso un bipolo utilizzatore opportuno che garantisca gli stessi effetti ai morsetti esterni della parte di rete che viene semplificata. Tale semplificazione può essere semplicemente condotta attraverso l'uso iterativo delle semplificazioni elementari riportate nel seguito del paragrafo.

3.2.1 Connessione in serie di resistori

La Figura 3.1 rappresenta la connessione in serie di due resistori. La natura della connessione assicura che le correnti i_1 e i_2 che attraver-

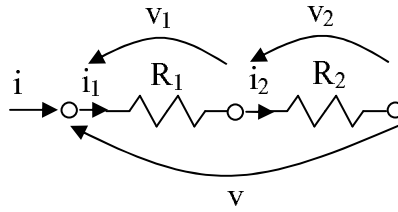


Figura 3.1: Serie di resistori

sano i due resistori siano uguali tra loro con le convenzioni di segno riportate in Figura 3.1.

Le relazioni costitutive dei resistori riportate in (3.1), consentono di calcolare, in base alla LKT, la tensione ai morsetti estremi della serie come indicato in (3.2), mentre la corrente che attraversa i due bipoli è la stessa $i = i_1 = i_2$.

$$v_1 = R_1 i_1 \quad (3.1)$$

$$v_2 = R_2 i_2$$

$$v = v_1 + v_2 = R_1 i_1 + R_2 i_2 \quad (3.2)$$

Il bipolo equivalente deve essere tale da garantire la stessa tensione e corrente ai morsetti come indicato in (3.3) da cui si ricava la relazione conclusiva (3.4).

$$v = R_{eq} i = R_1 i_1 + R_2 i_2 = (R_1 + R_2) i \quad (3.3)$$

$$R_{eq} = R_1 + R_2 \quad (3.4)$$

E' evidente che la relazione (3.4) può essere facilmente estesa al caso di più resistenze pervenendo al risultato indicato in (3.5) che indica come la resistenza equivalente della serie di più resistori sia la somma delle resistenze dei singoli resistori.

$$R_{eq} = \sum_1^n R_k \quad (3.5)$$

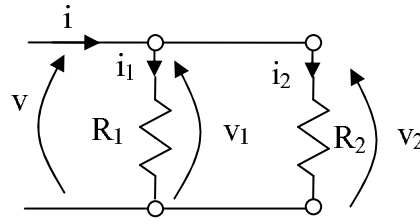


Figura 3.2: Parallelo di resistori

3.2.2 Connessione in parallelo di resistori

La Figura 3.2 rappresenta la connessione in parallelo di due resistori. Per tale connessione, secondo le convenzioni di segno indicate in Figura 3.2, le due tensioni v_1 e v_2 sono uguali. Le relazioni costitutive indicate in (3.6) (dove $G_1 = 1/R_1$ e $G_2 = 1/R_2$ sono le conduttanze dei rispettivi resistori), la LKC (3.7) e il vincolo di connessione (3.8) consentono di ottenere la relazione (3.9), da cui la relazione conclusiva (3.10).

$$i_1 = G_1 v_1 \quad (3.6)$$

$$i_2 = G_2 v_2$$

$$i = i_1 + i_2 \quad (3.7)$$

$$v = v_1 = v_2 \quad (3.8)$$

$$i = G_1 v_1 + G_2 v_2 = (G_1 + G_2)v = G_{eq}v \quad (3.9)$$

$$G_{eq} = G_1 + G_2 \quad (3.10)$$

La relazione (3.10) può essere di nuovo facilmente estesa al caso di più resistori in parallelo pervenendo al risultato indicato in (3.11) che indica come la conduttanza equivalente del parallelo di più resistori è la somma delle conduttanze dei singoli resistori.

$$G_{eq} = \sum_1^n G_k \quad (3.11)$$

Può essere interessante osservare che la relazione (3.11) avrebbe potuto essere ricavata, senza alcuna dimostrazione, sfruttando il principio di dualità enunciato nel Capitolo 1 e sostituendo le parole duali *serie* \rightarrow *parallelo* e *resistenza* \rightarrow *conduttanza*.

<p>“La <i>resistenza</i> equivalente di una <i>serie</i> di resistori è la somma delle <i>resistenze</i> dei singoli resistori”</p>	\rightarrow	<p>“La <i>conduttanza</i> equivalente di un <i>parallelo</i> di resistori è la somma delle <i>conduttanze</i> dei singoli resistori”</p>
---	---------------	--

Solitamente si preferisce esprimere la relazione (3.11) nelle resistenze come indicato in (3.12)

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_1^n \frac{1}{R_k} \quad (3.12)$$

Si può facilmente dimostrare che la resistenza equivalente di un parallelo di resistenze è sempre più piccola (o al limite uguale) della più piccola delle resistenze che compongono il parallelo.

3.2.3 Trasformazione triangolo-stella

Si supponga che in una rete sia presente la connessione a triangolo di resistori indicata in Figura 3.3a; si può dimostrare che la configurazione di Figura 3.3a è equivalente¹ alla connessione a stella indicata in Figura 3.14b purchè le resistenze r_a , r_b , r_c che compongono la stella abbiano la resistenza indicata nelle (3.13).

¹Per equivalenza si intende che in base al principio di sostituzione, tolto il triangolo dalla rete e sostituito con la stella, non cambiano i valori di tensione e corrente su tutti gli altri elementi della rete.

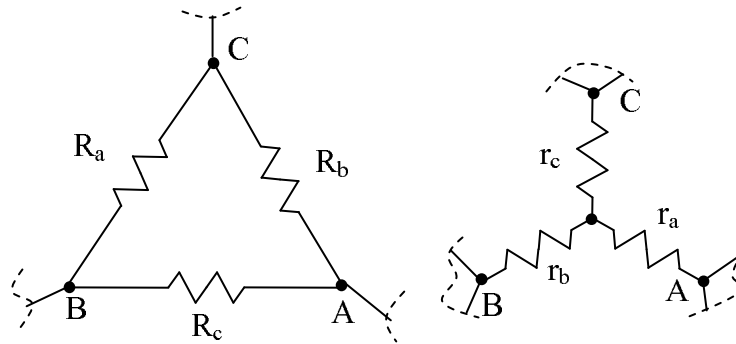


Figura 3.3: a) Triangolo di resistori. b) Stella di resistori.

$$\begin{aligned}
 r_a &= \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c} \\
 r_b &= \frac{R_a R_c}{R_a + R_b + R_c} \\
 r_c &= \frac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c}
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Si osservi che, nominando le resistenze del triangolo e della stella in maniera opportuna, la memorizzazione delle relazioni (3.13) risulta semplificata, in particolare:

- Le resistenze del triangolo sono nominate con il pedice corrispondente al nome/numero del nodo opposto al lato del triangolo.
- Le resistenze della stella sono nominate con il pedice corrispondente al nome/numero del nodo in cui incide il resistore.

In questo modo, mentre al denominatore compare sempre la somma delle resistenze, al numeratore compaiono le resistenze con i pedici diversi da quello della resistenza a stella che si vuole calcolare. Come caso particolare se le tre resistenze del triangolo sono uguali e pari a R , la resistenza equivalente della stella è pari ad $R/3$

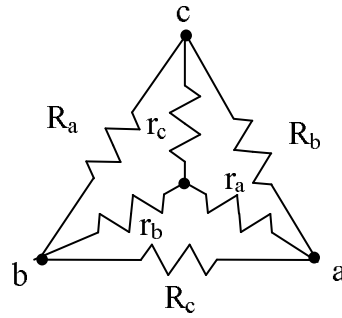


Figura 3.4: Trasformazione stella-triangolo e triangolo-stella

3.2.4 Trasformazione stella-triangolo

Le formule di trasformazione da una configurazione a stella di resistori nell'equivalente configurazione a triangolo (Figura 3.4) possono essere ricavate semplicemente per dualità dalle (3.13), ottenendo le (3.14) ($R \rightarrow G$).

$$\begin{aligned}
 G_a &= \frac{g_b g_c}{g_a + g_b + g_c} \\
 G_b &= \frac{g_a g_c}{g_a + g_b + g_c} \\
 G_c &= \frac{g_a g_b}{g_a + g_b + g_c}
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Come caso particolare se le tre conduttanze della stella sono uguali e pari a G , la conduttanza equivalente del triangolo è pari ad $G/3$ (ovviamente la resistenza equivalente del triangolo è 3 volte la resistenza della stella).

3.3 Metodi semplificati per la soluzione di reti

3.3.1 Partitore di corrente

Si consideri il circuito elementare di Figura 3.5 e si vogliano determinare i valori delle correnti i_1 ed i_2 che scorrono nei due resistori R_1 ed R_2 . Per circuiti di questo tipo è possibile determinare una formula

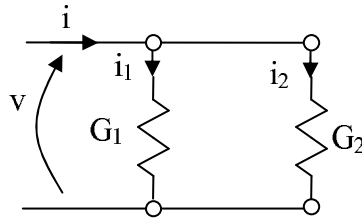


Figura 3.5: Partitore di corrente

generale che può essere utilizzata nella risoluzione “a vista” delle reti elettriche. La conduttanza equivalente ai morsetti del generatore di corrente è quella indicata in (3.15), da cui si può ricavare la tensione ai capi del generatore come indicato in (3.16).

$$G_{eq} = G_1 + G_2 \quad (3.15)$$

$$v = \frac{i}{G_{eq}} = \frac{i}{G_1 + G_2} \quad (3.16)$$

Ne consegue che le due correnti possono essere calcolate come indicato in (3.17)-(3.18).

$$i_1 = v \cdot G_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2} i = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i \quad (3.17)$$

$$i_2 = v \cdot G_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} i = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i \quad (3.18)$$

3.3.2 Partitore di tensione

Considerato il circuito elementare di Figura 3.6 (duale di quello presentato in Figura 3.5), si vogliono determinare i valori delle tensioni v_1 e v_2 ai capi dei due resistori R_1 e R_2 . Come per il caso del partitore di corrente, anche per questo circuito elementare è possibile determinare una formula generale che può essere utilizzata nella risoluzione delle reti elettriche. Procedendo in maniera duale a quanto fatto per il partitore di corrente si può ottenere la resistenza equivalente ai morsetti

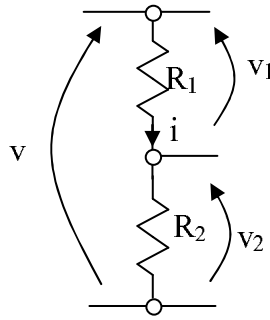


Figura 3.6: Partitore di tensione

del generatore come indicato in (3.19) da cui si ricava la corrente che scorre nel circuito (3.20) e le tensioni sui resistori (3.21)-(3.22).

$$R_{eq} = R_1 + R_2 \quad (3.19)$$

$$i = \frac{v}{R_{eq}} = \frac{v}{R_1 + R_2} \quad (3.20)$$

$$v_1 = R_1 \cdot i = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v \quad (3.21)$$

$$v_2 = R_2 \cdot i = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v \quad (3.22)$$

3.3.3 Formula di Millman per reti binodali

Si consideri una rete costituita dal parallelo di n bipoli ciascuno dei quali costituito da un generatore ideale di tensione in serie con un resistore o da un generatore di corrente e si voglia determinare la tensione che si manifesta ai morsetti O e G indicati in Figura 3.7a (si parla in questo caso di rete *binodale*).

La formula di Millman che consente di determinare questa tensione è riportata in (3.23).

$$v_{OG} = \frac{\sum_k \frac{v_k}{R_k} + \sum_j i_j}{\sum_k \frac{1}{R_k}} \quad (3.23)$$

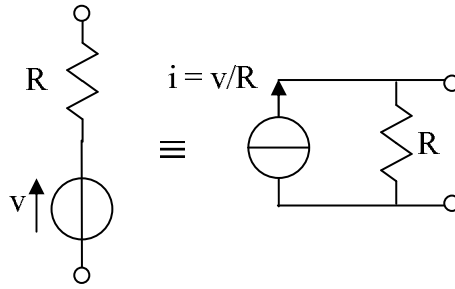


Figura 3.7: Equivalente di Norton

La formula (3.23) si dimostra semplicemente ricordando che ogni lato costituito da un generatore ideale di tensione in serie con resistore può essere modellato attraverso il suo equivalente di Norton come indicato in Figura 3.7.

Sostituendo il bibolo equivalente di Norton di ogni lato si può pervenire alla rete indicata in Figura 3.8b. E' evidente a questo punto che la rete è costituita da un certo numero di resistori in parallelo che possono essere ridotti ad un unico resistore di resistenza pari a quella indicata in (3.24). La corrente che percorre il resistore equivalente si ottiene dall'applicazione della legge di Kirchhoff ad uno dei due nodi ed è semplicemente pari alla somma delle correnti dei singoli generatori di corrente (presi con il segno opportuno) come indicato in (3.25). La (3.23), dunque, non è altro che l'applicazione della legge di Ohm alla rete semplificata indicata in Figura 3.8c.

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} = \sum_k \frac{1}{R_k} \quad (3.24)$$

$$i_{eq} = i_1 + i_2 + \dots + i_m = \sum_j i_j \quad (3.25)$$

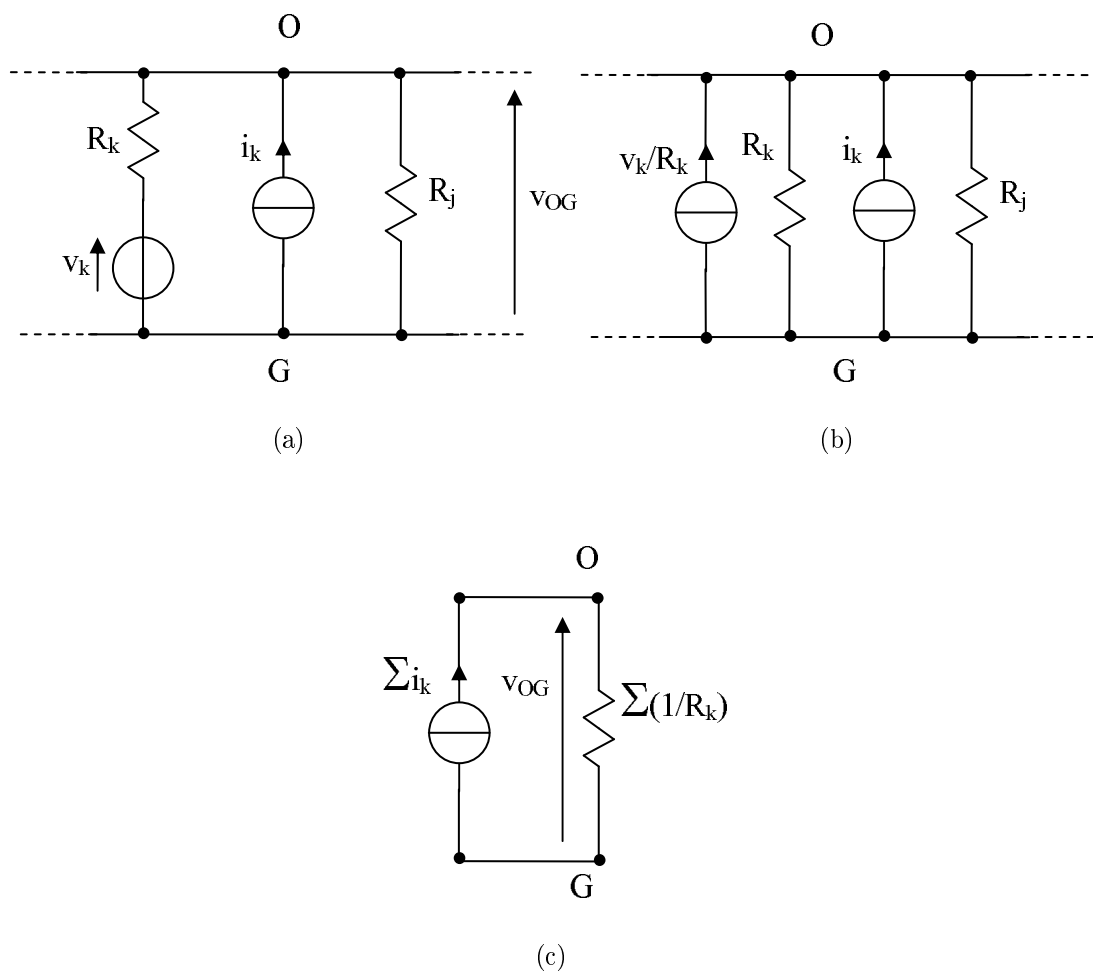


Figura 3.8: a) Rete binodale. b) Rete binodale equivalente. c) Rete binodale semplificata

Capitolo 4

Reti in regime alternato sinusoidale

4.1 Proprietà delle funzioni sinusoidali

Considerata una rete lineare che presenti i bipoli ideali introdotti nel Capitolo 1, se l'andamento nel tempo delle tensioni/correnti dei generatori inseriti nella rete è di tipo alternato sinusoidale isofrequenziale, allora nel funzionamento a regime tutte le tensioni e le correnti della rete sono tutte funzioni sinusoidali con la stessa pulsazione¹. Nel seguito del Capitolo saranno presentati alcuni metodi generali che consentono di studiare reti di questo tipo.

Per la rappresentazione delle funzioni sinusoidali, nel seguito si userà soltanto la forma coseno; questo comporta che la forma seno verrà trasformata avvalendosi della (4.1).

$$\pm \sin(\omega t + \alpha) = \cos(\omega t + \alpha \mp \pi/2) \quad (4.1)$$

Si tratteranno quindi sempre funzioni del tipo indicato nella (4.2) e con la forma precisata nella Figura 4.1, in cui F_M prende il nome di *valore massimo*, α prende il nome di *fase iniziale* (spostamento dell'origine dell'asse ωt rispetto al massimo positivo della cosinusoidale) e la pulsazione ω è legata al periodo T ed alla frequenza f come è indicato ancora nella (4.2).

$$f(t) = F_M \cos(\omega t + \alpha) \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (4.2)$$

¹Tale proprietà si dimostra facilmente osservando la forma dei legami espressi da LC, LKC e LKT

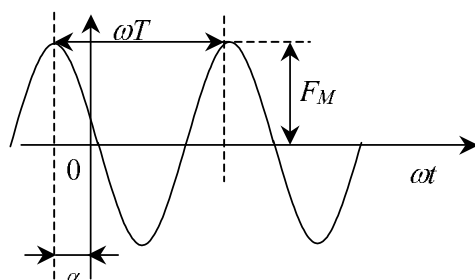


Figura 4.1: Funzione alternata sinusoidale nella forma coseno

Si definisce inoltre *valore medio* F_m della funzione, la quantità indicata nella (4.3), mentre si chiama *valore efficace* F , la quantità indicata nella (4.4) e *fattore di forma* il rapporto precisato nella (4.5) (calcolato nel caso sinusoidale).

$$F_m = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)| dt = \frac{2}{\pi} V_m = 0.636 F_M \quad (4.3)$$

$$F = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt} = \frac{F_M}{\sqrt{2}} = 0.707 F_M \quad (4.4)$$

$$K_f = \frac{F}{F_m} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1.11 \quad (4.5)$$

Il valore efficace ha un preciso significato energetico: se, ad esempio, $i = f(t)$ è una corrente, allora il valore efficace $I = F$ è quella corrente continua che circolando in un resistore dà luogo in un periodo alla medesima dissipazione di energia della corrente variabile nel tempo (come dimostra la (4.6), per la tensione vale la frase duale).

$$RI^2 \cdot T = R \int_0^T i dt \quad (4.6)$$

Il fattore di forma è invece un indice della forma d'onda della grandezza alternata nel senso messo in evidenza, per confronto, dalla Figura 4.2

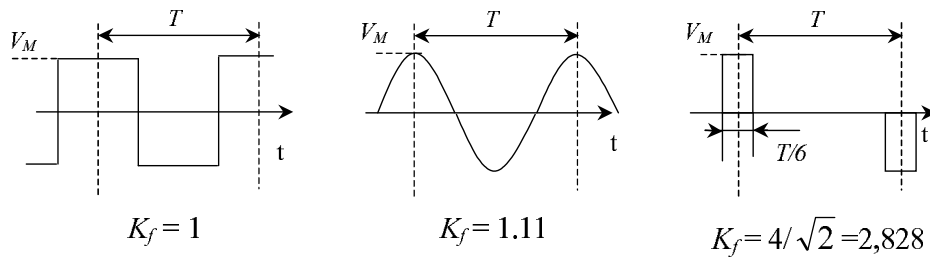
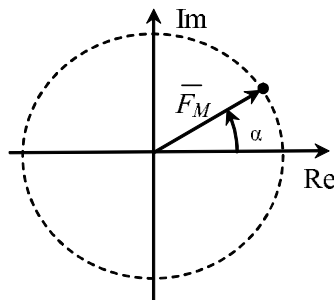


Figura 4.2: Fattori di forma per alcune funzioni alternate

Figura 4.3: Il fasore \bar{F}_M

4.2 Rappresentazione fasoriale

Si consideri nel piano dei numeri complessi, con asse reale Re ed immaginario Im, una circonferenza di raggio F_M e su di essa un punto P individuato dall'angolo al centro α , si veda la Figura 4.3.

Il numero complesso \bar{F}_M che individua P nel piano complesso è indicato nella (4.7). Se ora il punto ruota sulla circonferenza, a partire dalla posizione iniziale individuata da \bar{F}_M , con velocità angolare ω , la sua posizione è individuata dal numero complesso \bar{F}_M^* indicato nella (4.8).

$$\bar{F}_M = F_M \cos \alpha + j F_M \sin \alpha = F_M e^{j\alpha} \quad (4.7)$$

$$\bar{F}_M^* = \bar{F}_M e^{j\omega t} = F_M e^{j(\omega t + \alpha)} = F_M \cos(\omega t + \alpha) + j F_M \sin(\omega t + \alpha) \quad (4.8)$$

La (4.8) evidenzia come una funzione cosinusoidale possa essere

rappresentata, utilizzando il numero complesso \bar{F}_M , come è indicato nella (4.9).

$$F_M \cos(\omega t + \alpha) = \operatorname{Re}(\bar{F}_M e^{j\omega t}) \quad (4.9)$$

Si supponga ora di avere una classe di funzioni sinusoidali isofrequenziali tutte espresse nella forma coseno come indicato in (4.10), dove l'ampiezza F_M e la fase iniziale α sono i parametri da cui dipende ciascuna funzione appartenente alla classe, mentre ω_0 è da considerarsi come una quantità costante (è la situazione tipica che descrive il funzionamento di una rete in regime alternato sinusoidale isofrequenziale).

$$f(t) = F_M \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad (4.10)$$

Appare evidente che ogni funzione è individuata quando si fissi il valore di F_M e la fase iniziale α , parametri a cui si può associare il numero complesso indicato in (4.7) che prende il nome di *fasore* associato alla sinusoide. Segue che esiste una corrispondenza biunivoca tra le funzioni della classe e i *fasori* corrispondenti: data una qualsiasi funzione sinusoidale nella forma coseno è immediato farle corrispondere l'unico numero complesso \bar{F}_M che la rappresenta; viceversa dato un qualsiasi numero complesso \bar{F}_M si risale all'unica grandezza sinusoidale nella forma coseno della classe attraverso la relazione (4.9).

4.3 Le operazioni con le funzioni sinusoidali

Nello studio delle reti elettriche in regime alternato sinusoidale le principali operazioni da compiere sono quelle di combinazione lineare e di derivazione: entrambe queste operazioni, come viene nel seguito dimostrato, sono di semplice esecuzione avvalendosi della rappresentazione mediante i fasori introdotti nel precedente paragrafo.

La (4.11) evidenzia che la combinazione lineare di più funzioni cosinusoidali si può valutare mediante la combinazione lineare dei

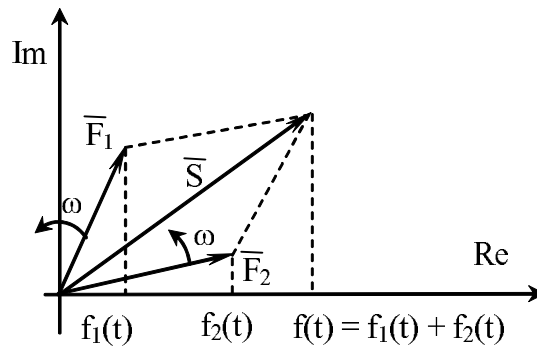


Figura 4.4: Fasore somma

rispettivi fasori rappresentativi dato che gli operatori Re di proiezione e Σ di somma godono della proprietà commutativa.

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \sum_k A_k F_{Mk} \cos(\omega t + \alpha_k) = \sum_k \text{Re}(A_k \bar{F}_{Mk} e^{j\omega t}) = \\
 &= \text{Re} \left[e^{j\omega t} \sum_k A_k \bar{F}_{Mk} \right] = \text{Re}(\bar{F}_{Mk} e^{j\omega t}) \quad (4.11)
 \end{aligned}$$

In particolare la cosinusoide somma di più cosinusoidi è rappresentata da un fasore che è la somma dei fasori rappresentativi delle singole cosinusoidi, si veda la Figura 4.4.

La (4.12) evidenzia il fatto che la derivata di una cosinusoide è ancora una cosinusoide il cui fasore rappresentativo si ottiene moltiplicando quello della cosinusoide di partenza per $j\omega$, si veda la Figura 4.5 (a questo punto è anche chiaro il risultato della derivata di una combinazione lineare di cosinusoidi). Il risultato conseguito dipende dal fatto che anche l'operatore derivata e l'operatore di proiezione sono tra loro scambiabili.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} F_M \cos(\omega t + \alpha) &= -\omega F_M \sin(\omega t + \alpha) = \\
 &= \omega F_M \cos(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}) = \quad (4.12) \\
 &= \text{Re}(j\omega \bar{F}_M e^{j\omega t}) = \text{Re}(\frac{d}{dt} \bar{F}_M e^{j\omega t})
 \end{aligned}$$

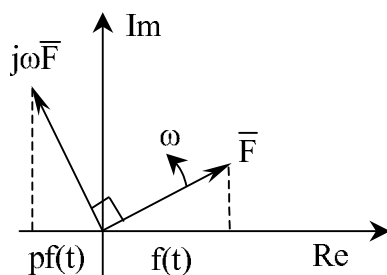


Figura 4.5: Derivata di un fasore

Risulta a questo punto particolarmente facilitata la soluzione delle reti in regime alternato sinusoidale avvalendosi del teorema generale delle reti elettriche. Le leggi di Kirchhoff delle correnti (per ognuno degli nodi indipendenti) e delle tensioni (per ognuno degli anelli indipendenti) si riducono infatti a semplici combinazioni lineari di grandezze complesse, mentre i legami costitutivi si limitano a stabilire connessioni lineari tra ingresso ed uscita di ogni bipolo di rete. Questa peculiarità è messa in evidenza nella Tabella 4.1 dove si è indicata l'operazione di derivazione attraverso l'operatore $p = d/dt$.

Naturalmente una volta risolte le $2l$ equazioni e ricavati i fasori rappresentativi delle correnti e delle tensioni di lato è possibile tornare nel dominio del tempo proiettando i fasori sull'asse reale.

Complessivamente la soluzione della rete procede nel seguente modo ciclico: si rappresentano gli ingressi (alternati cosinusoidali) mediante i corrispondenti fasori, si scrivono le equazioni di rete (LKC e LKT) ed i legami costitutivi (LC) e si risolvono le corrispondenti $2l$ equazioni algebriche nei fasori (numeri complessi) ricavando per ogni lato \bar{V}_{kM} e \bar{I}_{kM} , si torna infine nel dominio del tempo proiettando i fasori rappresentativi delle correnti e delle tensioni dei singoli lati.

Nella risoluzione delle reti elettriche in regime alternato sinusoidale conviene introdurre per le grandezze corrente e tensione, fasori che hanno modulo pari al *valore efficace* e non al valore massimo della

²L'operatore p fu introdotto per la prima volta da Heaviside tra il 1880 e il 1887 per risolvere le equazioni differenziali che scaturivano dall'analisi dei circuiti elettrici. Il calcolo operatoriale sviluppato da Heaviside fu poi formalizzato e validato nei lavori di Thomas John 1 Anson Bromwich.

Tabella 4.1: Formulazione nel dominio del tempo e della frequenza

	nel dominio del tempo		Nel dominio della frequenza
LKC	$\sum_k I_{kM} \cos(\omega t + \alpha_k)$	$n - 1$ equazioni	$\sum_k \bar{I}_{kM} = 0$
LKT	$\sum_k V_{kM} \cos(\omega t + \beta_k)$	$l - n + 1$ equazioni	$\sum_k \bar{V}_{kM} = 0$
LC	$v_R(t) = Ri_R(t)$ $v_L(t) = Lpi_L(t)$ $i_C(t) = Cpv_C(t)$	l equazioni	$\bar{V}_{RM} = R\bar{I}_{RM}$ $\bar{V}_{LM} = j\omega L\bar{I}_{LM}$ $\bar{I}_{CM} = j\omega C\bar{V}_{cM}$

sinusoide associata, dove il valore efficace di una grandezza alternata nel tempo di periodo T può essere calcolato come indicato in (4.4)

Le relazioni esistenti tra i fasori \bar{V}_M , \bar{I}_M ed i nuovi fasori sono indicate in (4.13). E' evidente che le (4.13), introducendo solo un fattore di scala per i moduli, non alterano le conclusioni riguardanti la risoluzione delle reti in regime sinusoidale precedentemente introdotte (si possono dunque scrivere le LKT, LKC e i LC sostituendo semplicemente a \bar{V}_M , \bar{I}_M i fasori \bar{V} ed \bar{I}).

$$\bar{V} = \frac{\bar{V}_M}{\sqrt{2}} \quad \bar{I} = \frac{\bar{I}_M}{\sqrt{2}} \quad (4.13)$$

Nei successivi paragrafi, salvo diversa indicazione, i fasori si intenderanno espressi nei valori efficaci.

4.4 Impedenza, ammettenza e circuiti simbolici

Si chiama *impedenza* di un bipolo ideale e si indica con \bar{Z} , il rapporto tra il fasore tensione \bar{V} ed il fasore corrente \bar{I} (oppure tra il fasore \bar{V}_M e \bar{I}_M), *ammettenza* il reciproco di tale rapporto (si indica con $\bar{Y} = 1/\bar{Z}$). In Tabella 4.2 sono esplicitati questi operatori

Tabella 4.2: Impedenza, ammettenza, reattanza e suscettanza dei bipoli ideali

Bipolo	Impedenza	Ammettenza
Resistore	$\bar{Z} = R$	$\bar{Y}_R = 1/R = G$
Induttore	$\bar{Z}_L = j\omega L = jX_L$	$\bar{Y}_L = 1/jX_L = -jB_L$
Condensatore	$\bar{Z}_C = 1/j\omega C = -jX_C$	$\bar{Y}_C = 1/(-jX_C) = jB_C$

e vengono introdotte le definizioni di *reattanza induttiva* $X_L = \omega L$ e *reattanza capacitiva* $X_C = 1/\omega C$ (misurate, come la esistenza in $[\Omega]$) e di *suscettanza induttiva* $B_L = 1/X_L$ e di *suscettanza capacitiva* $B_C = 1/X_C$ (misurate, come la conduttanza in $[S]$).

In merito ai valori asintotici dell'impedenza dei bipoli ideali (per l'ammettenza valgono proposizioni duali), si può notare che per pulsazioni molto grandi ($\omega \rightarrow \infty$) l'induttore si comporta come un *circuito aperto* (impedenza al limite infinita), mentre il condensatore si comporta come un *corto circuito* (impedenza al limite nulla), mentre per pulsazioni molto basse ($\omega \rightarrow 0$) avviene il contrario. Il resistore mantiene, invece, il suo comportamento qualunque sia il valore della pulsazione ω , nel senso che la sua impedenza ed ammettenza è indipendente dalla frequenza.

Quanto all'effetto della connessione, si nota che bipoli ideali in serie sono percorsi dalla stessa corrente e la tensione totale sulla serie dei bipoli è la somma delle tensioni sui singoli elementi. Ne consegue che l'impedenza di una serie di bipoli è la somma delle impedenze. Nel caso di connessione parallelo vale la frase duale, si vedano le relazioni (4.14).

$$\bar{Z}_{eq} = \sum_k \bar{Z}_k \quad \bar{Y}_{eq} = \sum_k \bar{Y}_k \quad (4.14)$$

Fatte queste precisazioni, è evidente che le reti R , L , C in regime

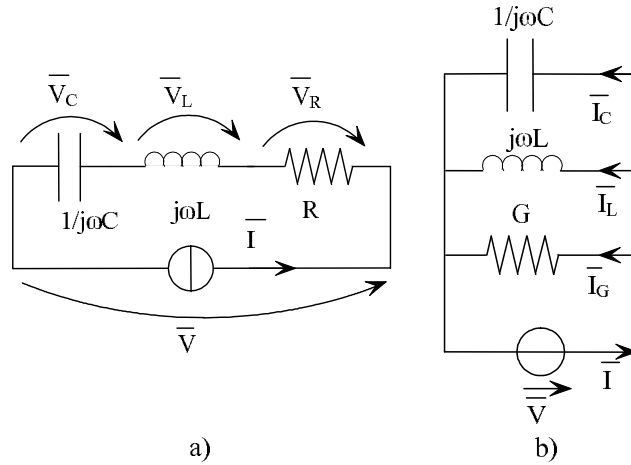


Figura 4.6: Esempio di reti simboliche

alternato sinusoidale siano rappresentabili con il *circuito simbolico* in cui, in luogo dei valori istantanei delle correnti e delle tensioni, compaiono i corrispondenti fasori ed in luogo delle resistenze, induttanze e capacità, le corrispondenti impedenze o ammettenze a seconda della comodità di calcolo.

In Figura 4.6 sono rappresentate due reti simboliche con le convenzioni di misura delle grandezze istantanee di lato rappresentate tramite i fasori. Per le due reti di Figura 4.6 l'impedenza e l'ammettenza simbolica sono rispettivamente quelle indicate nella (4.15) e (4.17), tra loro duali.

$$\bar{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = R \pm jX = Ze^{\pm j\varphi} \quad (4.15)$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} \quad \tan \varphi = \pm \frac{X}{R} \quad (4.16)$$

$$\bar{Y} = G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = G + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) = G \mp jB = Ye^{\mp j\varphi} \quad (4.17)$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} \quad Y = \frac{1}{Z} = \sqrt{G^2 + B^2} \quad \tan \varphi = \mp \frac{B}{G} \quad (4.18)$$

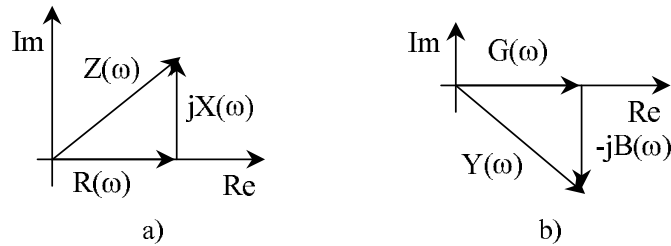


Figura 4.7: a) Triangolo dell'impedenza per reattanza positiva; b) Triangolo della ammettenza per suscettanza negativa

$$G = \frac{R}{Z^2} \quad B = \frac{X}{Z^2} \quad (4.19)$$

Si supponga di aver calcolato (o misurato), per la pulsazione ω di interesse, l'impedenza ai morsetti di ingresso di una rete nella forma indicata nella (4.15) e di averne quindi individuato la parte reale R (resistenza) ed il coefficiente X (reattanza) dell'unità immaginaria (misurate in $[\Omega]$). Quest'ultima, sarà positiva se la rete ha comportamento induttivo (cioè è equivalente ad un resistore ed un induttore in serie) e negativa se la rete ha comportamento capacitivo (cioè è equivalente ad un resistore ed un condensatore in serie). Si potrà disegnare il *triangolo dell'impedenza* che, nella ipotesi di reattanza positiva, assume l'aspetto indicato in Figura 4.7a.

Analogamente la corrispondente ammettenza è quella indicata nella (4.17) dove G è la conduttanza e B la suscettanza (misurate in $[S]$). Il relativo triangolo è precisato nella Figura 4.7b (in base a quanto evidenziato nella Tabella 4.2 ad una reattanza positiva corrisponde una suscettanza negativa e viceversa). Per quanto riguarda i legami tra Y , G e B e Z , R ed X , valgono le relazioni indicate in (4.18)-(4.19).

4.5 Energetica delle reti

In Figura 4.8 è riportato l'andamento temporale di tensione, corrente e potenza istantanea nel caso di misure operate su un bipolo di natura ohmico-induttiva. Analizzando tali andamenti temporali, si possono

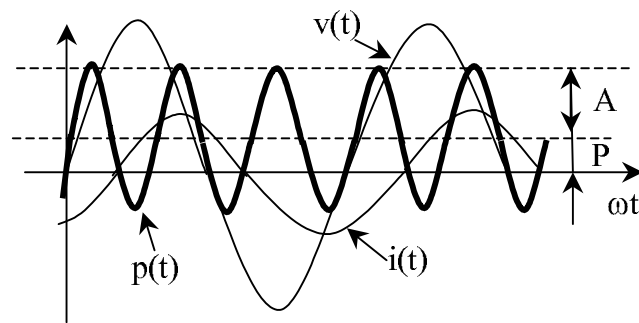


Figura 4.8: Tensione $v(t)$, corrente $i(t)$, potenza istantanea $p(t)$

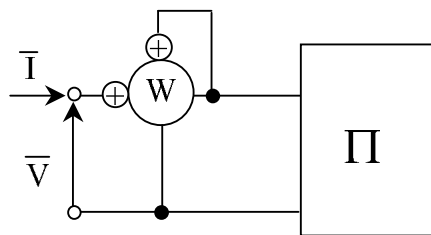


Figura 4.9: Inserzione del wattmetro

definire alcune quantità significative ed in particolare, si definisce *potenza attiva*, la si indica con P e la si misura in $[W]$ (Watt), il valore medio in un periodo della potenza istantanea, che nel caso di regime alternato sinusoidale può essere calcolata come indicato in (4.21) dove il termine φ prende il nome di *fattore di potenza*.

Lo strumento di misura della potenza attiva prende il nome di *wattmetro* ed è composto da un equipaggio voltmetrico derivato, da uno amperometrico in serie al circuito e da una logica atta a realizzare le operazioni implicite nella (4.21), si veda la Figura 4.9.

Nelle applicazioni tecniche la misura di energia può essere approssimata come indicato in (4.22) e cioè come prodotto tra la potenza attiva per il tempo di utilizzazione della rete e come unità di misura viene spesso utilizzato il $[kWh]$ (chilowattora). Lo strumento di misura dell'energia è il *contatore*: si tratta di un wattmetro (quindi con equipaggio voltmetrico ed amperometrico) integratore che opera in conformità alla (4.22).

$$\begin{aligned}
 p &= v \cdot i = V_M \cos(\omega t) \cdot I_M \cos(\omega t \mp \varphi) = \\
 &= \frac{V_M I_M}{2} \cos \varphi + \frac{V_M I_M}{2} \cos(2\omega t \mp \varphi) =
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

$$= VI \cos \varphi + VI \cos(2\omega t \mp \varphi)$$

$$= P + A \cos(2\omega t \mp \varphi)$$

$$P = \int_0^T p \cdot dt = \frac{V_M I_M}{2} \cos \varphi = VI \cos \varphi \tag{4.21}$$

$$w(\Delta t) = \int_0^{\Delta t} p(t) dt \approx P \Delta t \tag{4.22}$$

Si definisce *potenza apparente*, la si indica con A e la si misura in $[VA]$ (voltampere), la massima oscillazione della potenza istantanea attorno al valore medio, si veda la Figura 4.8 e la (4.20), dove l'espressione iniziale è stata manipolata utilizzando le formule di Werner³. Si tratta di una grandezza di notevole significato ingegneristico se si pensa ai costi di realizzazione (e di gestione durante il ciclo di vita) di una rete industriale. Infatti, il dimensionamento dell'isolamento elettrico della rete industriale deve esser commisurato al valore efficace della tensione, mentre il dimensionamento dei conduttori deve esser commisurato (per ragioni di riscaldamento) al valore efficace della corrente: se ne conclude che la potenza apparente è un indice dell'impegno necessario per la costruzione e la gestione del sistema energetico.

La (4.20) può essere poi elaborata (attraverso le formule trigonometriche di somma e sottrazione) come è indicato nella (4.23). Dal momento che, in regime alternato sinusoidale, $P = A \cos \varphi$, se si definisce *potenza reattiva* la quantità $Q = \pm A \sin \varphi$, misurata in $[VAR]$ (voltampere reattivi), con segno positivo per reti a comportamento induttivo e negativo per reti a comportamento capacitivo, la (4.23)

³Formule di Werner:

$$\begin{aligned}
 \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) \\
 \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) \\
 \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta)
 \end{aligned}$$

porta alla (4.24) ed alle (4.25), che stabiliscono il legame tra potenza attiva, reattiva ed apparente.

$$\begin{aligned} p(t) &= P + A \cos[2\omega t \mp \varphi] = \\ &= P + A \cos \varphi \cos(2\omega t) \pm A \sin \varphi \sin 2(\omega t) \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$p(t) = P + [P \cos(2\omega t) \pm Q \sin(2\omega t)] \quad (4.24)$$

$$A = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad P = A \cos \varphi \quad \pm Q = \pm A \sin \varphi \quad (4.25)$$

Le tre potenze possono essere rappresentate avvalendosi della nozione di *potenza complessa*. Siano \bar{V} , \bar{I} i fasori rappresentativi della tensione e della corrente alla porta di ingresso di una rete, si definisce *potenza complessa*, si veda la (4.26), il prodotto del fasore tensione per il coniugato del fasore corrente. Si può constatare che la potenza complessa ha per parte reale la potenza attiva della rete e per coefficiente dell'unità immaginaria la potenza reattiva (positiva per rete di tipo induttivo). La potenza complessa si rappresenta nel piano complesso con il triangolo delle potenze, si veda la Figura 4.10, particolarmente adatto ad evidenziare la natura energetica della rete tramite il segno della potenza reattiva.

Questo triangolo, inoltre, evidenzia il fatto che l'onere costruttivo (e di gestione), espresso dalla potenza apparente A , è minimo se, a pari potenza attiva P (quella utile per le trasformazioni energetiche), è nulla la potenza reattiva Q .

$$\bar{A} = \bar{V}\underline{I} = VIe^{\pm j\varphi} = P + jQ \quad (4.26)$$

Allo scopo di fissare le idee verranno presentati nel seguito gli andamenti della potenza istantanea e i valori che assumono P , Q ed A nel caso dei bipoli ideali resistore, induttore e condensatore

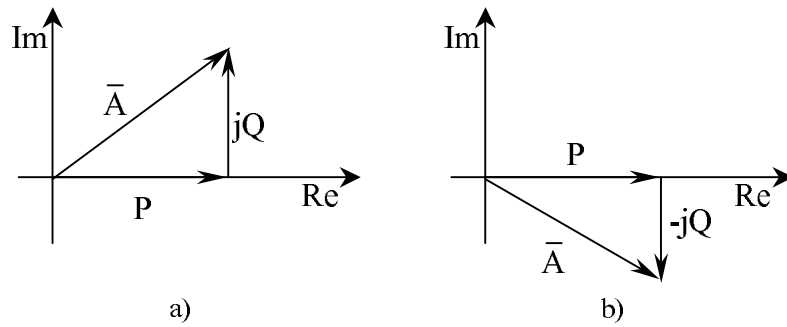
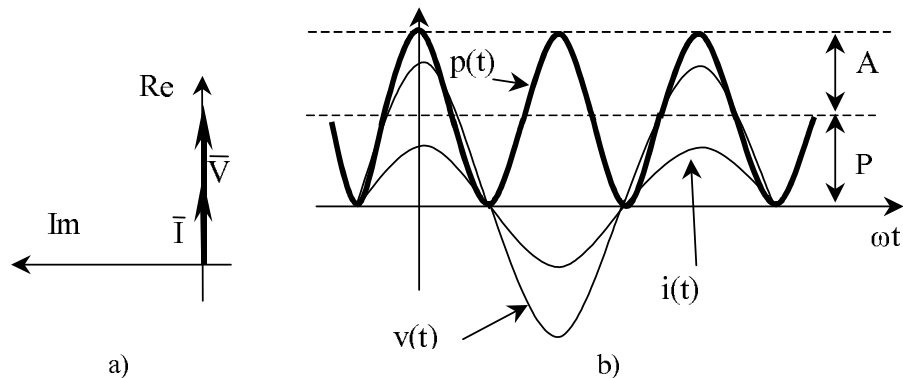


Figura 4.10: Potenza complessa

Figura 4.11: a) Diagramma di fasori di una rete resistiva. b) Andamento di v , i e p

4.5.1 Resistore

Se la rete si comporta come un resistore, i fasori rappresentativi di tensione e corrente sono del tipo indicato in Figura 4.11a. I valori istantanei di tensione corrente ai morsetti possono essere espressi come indicato in (4.27), la potenza istantanea è esprimibile come è indicato nella (4.28) e presentano l'andamento di Figura 4.11b.

$$v = \sqrt{2}V \cos(\omega t) \quad i = \sqrt{2}I \cos(\omega t) \quad \bar{V} = R\bar{I} \quad (4.27)$$

$$p = vi = 2VI \cos^2(\omega t) = VI + VI \cos(2\omega t) = P + P \cos(2\omega t) \quad (4.28)$$

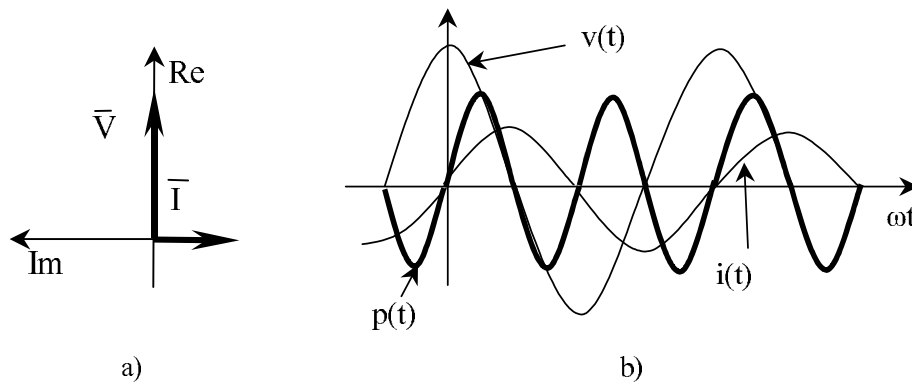


Figura 4.12: a) Diagramma dei fasori per una rete puramente induttiva. b) Andamento di v , i e p

Si nota che la potenza istantanea è una funzione che presenta due oscillazioni nel periodo mantenendo sempre un valore positivo. La potenza attiva P coincide con la potenza apparente A .

4.5.2 Induttore

Per una rete puramente induttiva, i fasori rappresentativi della tensione e della corrente sono disposti nel piano complesso come indicato in Figura 4.12a, i valori istantanei di tensione e corrente sono del tipo precisato nella (4.29) e la potenza istantanea presenta l'espressione indicata nella (4.30). La potenza istantanea, si veda la Figura 4.12b, ha valore medio nullo ed oscilla due volte per ogni periodo. Quando la potenza istantanea è positiva ($p > 0$) la rete assorbe ed accumula energia (nel campo magnetico); quando la potenza istantanea è negativa ($p < 0$) la rete restituisce energia al generatore di tensione.

$$v = \sqrt{2}V \cos(\omega t) \quad i = \sqrt{2}I \cos(\omega t - \pi/2) \quad \bar{V} = j\omega L\bar{I} \quad (4.29)$$

$$p = vi = VI \cos(2\omega t - \pi/2) = Q \cos(2\omega t - \pi/2) = Q \sin(2\omega t) \quad (4.30)$$

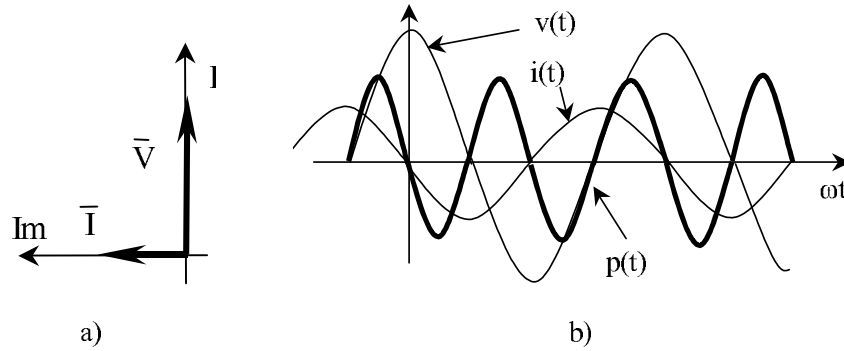


Figura 4.13: a) Diagramma dei fasori per una rete puramente capacitiva. b) Andamento di v, i e p

4.5.3 Condensatore

Per una rete puramente capacitiva, quindi i fasori tensione e corrente sono disposti come indicato nella Figura 4.13a. I valori istantanei di tensione e corrente sono del tipo precisato nella (4.31), mentre la potenza istantanea è del tipo indicato nella (4.32) e presenta l'andamento di Figura 4.13b.

La potenza istantanea p , si veda la Figura 4.13b, ha valore medio nullo e anche in questo caso presenta due oscillazioni in un periodo. Quando la potenza istantanea è positiva ($p > 0$), la rete assorbe energia dal generatore accumulandola nel campo elettrico, quando la potenza istantanea è negativa ($p < 0$) la rete restituisce al generatore l'energia prima assorbita. Quindi, a parità di tensione, quando la rete induttiva assorbe energia, la rete capacitiva la emette.

$$v = \sqrt{2}V \cos(\omega t) \quad i = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \pi/2) \quad \bar{V} = -j \frac{1}{\omega C} \bar{I} \quad (4.31)$$

$$p = vi = VI \cos(2\omega t + \pi/2) = Q \cos(2\omega t + \pi/2) = -Q \sin(2\omega t) \quad (4.32)$$

4.6 Corollario di Boucherot

Si supponga di conoscere per tutti i lati della rete (avendo impiegato convenzioni di misura coordinate per la tensione e la corrente, ad esempio la convenzione degli utilizzatori) i fasori \bar{V}_k e \bar{I}_k rappresentativi della tensione e della corrente. Per le considerazioni fatte in questo capitolo, sicuramente i fasori tensione soddisfano le LKT ed i fasori corrente le LKC. E' allora altrettanto vero che le LKC sono soddisfatte per i coniugati dei fasori corrente \underline{I}_k dato che per essi sono ordinatamente cambiate di segno tutte le parti immaginarie. In base allora al teorema di Tellegen deve valere la (4.33) dove la sommatoria è estesa a tutti i lati della rete. Ne consegue che la somma algebrica di tutte le potenze attive e di tutte le potenze reattive dei lati di rete è nulla (solo la prima di tali frasi è giustificabile con il principio di conservazione dell'energia), come è indicato nella (4.34) che prende il nome di *corollario di Boucherot*.

$$\sum_{k=0}^l \bar{V}_k \underline{I}_k = \sum_{k=0}^l \bar{A}_k = \sum_{k=0}^l (P_k \pm jQ_k) = 0 \quad (4.33)$$

$$\sum_{k=0}^l P_k = 0 \quad \sum_{k=0}^l \pm Q_k = 0 \quad (4.34)$$

Per le reti elettriche vale quindi la conservazione sia della potenza attiva che della potenza reattiva e questo consente di individuarne la soluzione per via energetica.

Si supponga infatti di conoscere, ad esempio, il senso secondo cui fluiscono le potenze e di suddividere la rete oggetto di studio in sezioni successive in cui racchiudiamo lati percorsi dalla stessa corrente o sottoposti alla stessa tensione, si veda, per fissare le idee, la Figura 4.14. Se per una sezione, ad esempio la sezione 1, si conosce la potenza complessa assorbita dal bipolo B ed il modulo del fasore tensione o del fasore corrente è possibile ricavare tutte le rimanenti grandezze di rete ed in particolare le potenze erogate dal generatore tramite la conservazione delle potenze.

Infatti se, ad esempio, sono noti P_1, Q_1, V_1 allora $I_1 = A_1/V_1$ ($A_1 =$

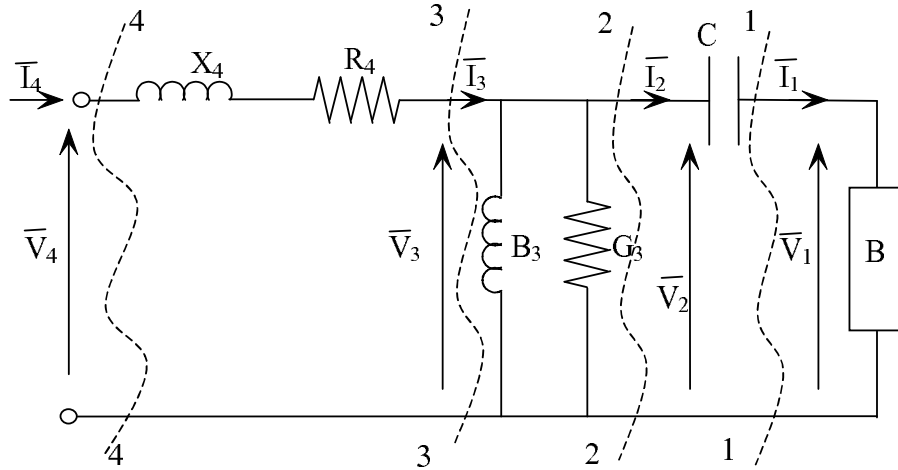


Figura 4.14: Risoluzione di una rete utilizzando il corollario di Boucherot

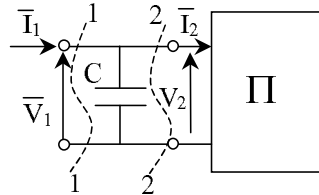


Figura 4.15: Posizionamento della batteria di condensatori per il rifasamento

$\sqrt{P_1^2 + Q_1^2}$). Nella sezione 2 si ha $I_2 = I_1$, $P_2 = P_1$, $Q_2 = Q_1 - X_C I_2^2$, allora $V_2 = A_2/I_2$. Nella sezione 3 si ha $V_3 = V_2$, $P_3 = P_2 + G V_3^2$, $Q_3 = Q_2 + B_3 V_3^2$ allora $A_3 = \sqrt{P_3^2 + Q_3^2}$ e $I_3 = A_3/V_3$. Nella sezione 4 si ha $I_4 = I_3$, $P_4 = P_3 + R_4 I_4^2$, $Q_4 = Q_3 + X_4 I_4^2$ allora $A_4 = \sqrt{P_4^2 + Q_4^2}$ e $V_4 = A_4/I_4$.

Viceversa se fossero note le condizioni alla porta 4, dove è disposto il generatore, sempre con lo stesso procedimento si sarebbero ricavate le condizioni alla porta 1 dove è disposto il bipolo utilizzatore questa volta sottraendo le potenze sezione per sezione.

4.7 Rifasamento

Il produttore di energia elettrica, allo scopo di limitare la potenza apparente (che è indice del costo di realizzazione e di gestione di una

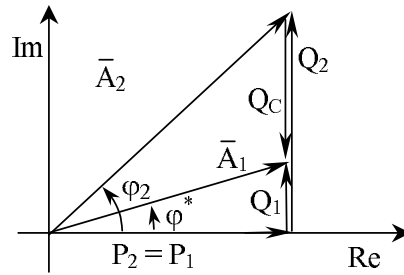


Figura 4.16: Calcolo della potenza reattiva di rifasamento con il triangolo della potenza complessa

rete di distribuzione) a parità di potenza attiva (quella utile per le trasformazioni energetiche) impone agli utenti (tramite adeguata penale sulla tariffa di fornitura) che il fattore di potenza delle reti utilizzatrici sia convenientemente alto (solitamente $\cos \varphi > 0.9$). Nel caso che l'applicazione dell'utente non rispetti naturalmente il vincolo imposto, è necessario, allo scopo di evitare la penale, introdurre a monte della propria rete una batteria di condensatori di capacità adeguata (solitamente infatti non basta un unico condensatore), si veda la Figura 4.15. Tale provvedimento, tipicamente industriale, prende il nome di *rifasamento*.

Il corollario di Boucherot rende particolarmente agevole il calcolo della batteria di condensatori da inserire. In effetti l'utente conosce lo stato energetico nella sezione 2 perché ricava la potenza attiva e quella reattiva (normalmente di tipo induttivo) che gli è necessaria come somma delle potenze attive e reattive dei carichi e conosce anche, si veda la Figura 4.16, la situazione energetica da realizzare nella sezione 1 perché è noto il fattore di potenza imposto dal fornitore dell'energia. Ne consegue allora la potenza reattiva della batteria di condensatori e la capacità della batteria come è indicato nella (4.16).

$$Q_C = Q_2 - Q_1 = \omega CV^2 \quad (4.35)$$

Capitolo 5

Sistemi trifase

5.1 Generalità

La generazione, la trasmissione, la distribuzione e la utilizzazione dell'energia elettrica avvengono in larga misura sotto forma trifase per motivi tecnici ed economici. In effetti, le macchine elettriche trifase sono, normalmente, più leggere e meno ingombranti di quelle monofase e di quelle a corrente continua, inoltre le linee trifase danno luogo a minori cadute di tensione di quelle monofase¹.

Si consideri infatti il caso di tre generatori di tensione alternata sinusoidale con tensioni rispondenti alla (5.1) e rappresentabili con la terna di fasori rappresentata in Figura 5.1b. Se la tensione della seconda fase (v_2) è in ritardo rispetto a quella della prima fase come accade nelle (5.1), si parlerà di terna *diretta* di tensioni trifase, in caso contrario (tensione della seconda fase in anticipo rispetto alla tensione della prima fase) di terna *inversa*.

$$\begin{aligned}v_1(t) &= \sqrt{2}V \cos \omega t \\v_2(t) &= \sqrt{2}V \cos(\omega t - 2\pi/3) \\v_3(t) &= \sqrt{2}V \cos(\omega t - 4\pi/3)\end{aligned}\tag{5.1}$$

Se a ciascuno di questi generatori colleghiamo un carico rappre-

¹Le considerazioni tecnico/economiche che fanno prediligere un sistema di trasmissione dell'energia elettrica piuttosto che un altro sono estremamente varie. Si rimanda a testi specifici di impianti e sistemi elettrici per un eventuale approfondimento.

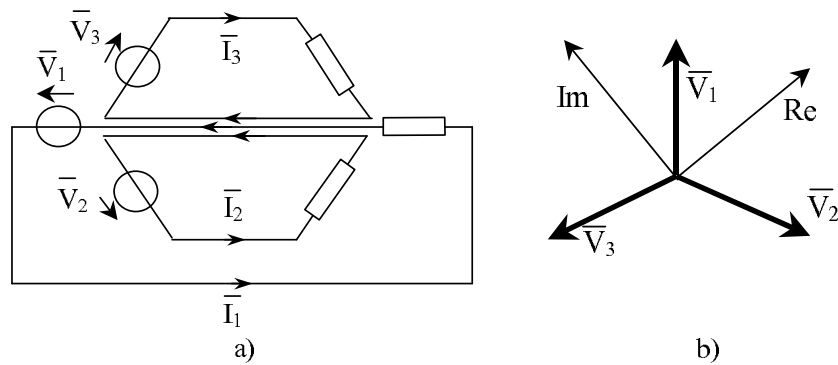


Figura 5.1: a) Sistema di trasmissione costituito da tre sistemi monofase. b) Fasori rappresentativi dei tre generatori

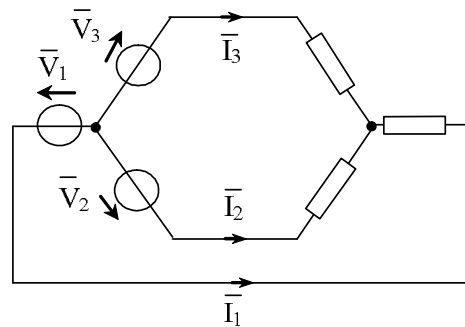


Figura 5.2: Rete trifase equivalente

sentabile con la stessa impedenza \bar{Z} , le correnti che circolano nelle tre linee monofase sono alternate sinusoidali ed i fasori rappresentativi rispondono alla (5.2).

$$\bar{I}_1 = \bar{V}_1/\bar{Z} \quad \bar{I}_2 = \bar{V}_2/\bar{Z} \quad \bar{I}_3 = \bar{V}_3/\bar{Z} \quad (5.2)$$

Il sistema delle correnti è caratterizzato dal fatto che dato che la somma dei loro fasori rappresentativi è nulla; ne consegue che se i tre conduttori di ritorno delle tre linee monofase sono messi in comune in questo conduttore circola corrente nulla per modo che il conduttore può essere eliminato. Si può allora trasmettere la potenza delle tre linee monofase con tre conduttori in luogo di sei. Un sistema di questo tipo prende il nome di sistema *trifase* a tre fili.

Ad un sistema come quello indicato in Figura 5.2 può essere ag-

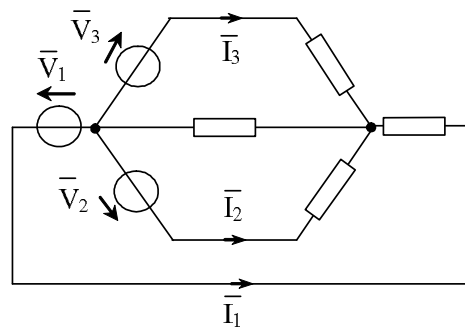


Figura 5.3: Rete trifase a quattro fili

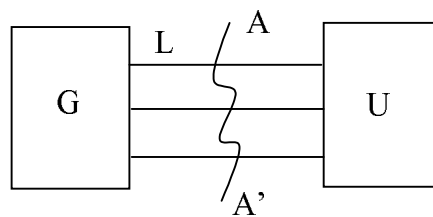


Figura 5.4: Impianto trifase e sezione AA' di misura

giunto un ulteriore conduttore connesso al centro stella dei generatori, ottenendo il sistema indicato in Figura 5.3 che prende il nome di sistema trifase a quattro fili. Le linee interessate dalla presenza a monte di un generatore equivalente prendono il nome di *fasi*, mentre il quarto conduttore prende il nome di *neutro*.

5.2 Misure sui sistemi trifase a tre e quattro fili

Si consideri un impianto elettrico caratterizzato da una stazione di generazione G trifase, da una linea di trasmissione L e da un impianto utilizzatore U , come indicato in Figura 5.4. In una generica sezione AA' della linea di trasmissione possono essere misurati i sistemi di tensione e correnti indicati in Figura 5.5.

In proposito, si possono distinguere le tre tensioni v_{12} , v_{23} , v_{31} misurate tra coppie ordinate di conduttori e le tensioni v_{1o} , v_{2o} , v_{3o} misurate tra ciascun conduttore ed un punto fisico o esterno alla li-

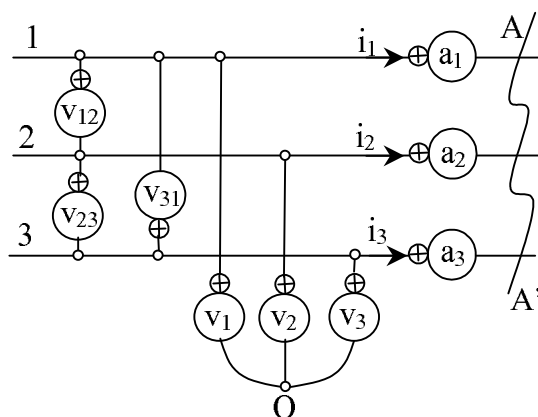


Figura 5.5: Misure di tensione e corrente nella sezione AA'

nea. Le tensioni v_{12} , v_{23} , v_{31} prendono il nome di *tensioni concatenate* mentre le tensioni v_{1o} , v_{2o} , v_{3o} vengono denominate *tensioni di fase*.

Tra queste tensioni esistono i legami dovuti alle LKT, che possono essere espressi mediante i fasori rappresentativi dalle (5.3)-(5.4). In base alla (5.4) i fasori \bar{V}_{12} , \bar{V}_{23} , \bar{V}_{31} fanno parte nel piano complesso di un triangolo delle tensioni concatenate, si veda la Figura 5.6 ed in base alla (5.3) ogni punto del piano complesso individua un possibile sistema di tensioni di fase.

$$\begin{aligned}\bar{V}_{12} &= \bar{V}_{1o} - \bar{V}_{2o} \\ \bar{V}_{23} &= \bar{V}_{2o} - \bar{V}_{3o} \\ \bar{V}_{31} &= \bar{V}_{3o} - \bar{V}_{1o}\end{aligned}\tag{5.3}$$

$$\bar{V}_{12} + \bar{V}_{23} + \bar{V}_{31} = 0\tag{5.4}$$

Tra i diversi centri del piano complesso conviene privilegiare nelle analisi successive il baricentro G del triangolo delle tensioni concatenate (punto di incontro delle mediane dei lati), si veda la Figura 5.7, detto *centro teorico* in quanto le tensioni di fase riferite a questo centro godono della proprietà (utile nei calcoli) che la loro somma è nulla.

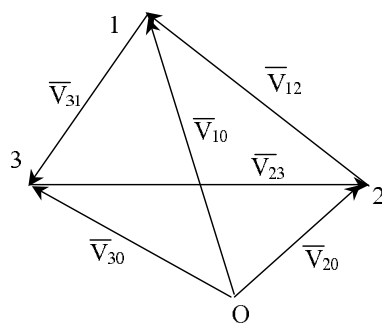


Figura 5.6: Triangolo delle tensioni concatenate e tensioni di fase

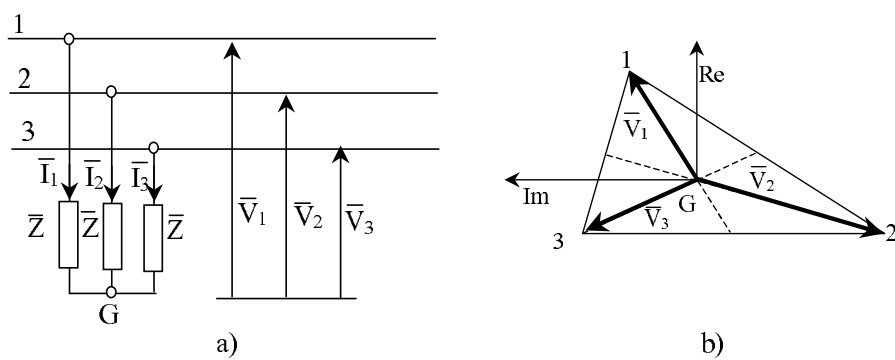


Figura 5.7: Determinazione del centro teorico G

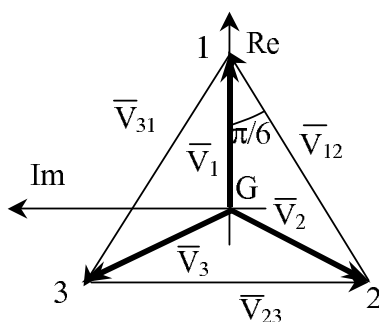


Figura 5.8: Tensioni concatenate e tensioni di fase per il caso simmetrico di tensioni

Dal punto di vista delle misure il centro teorico è facilmente identificabile: in effetti supponiamo di derivare nella sezione di misura tre impedenze uguali connesse a stella e sia G il centro della stella, si veda la Figura 5.7. Le tre correnti drenate da tali impedenze hanno somma nulla (LKC per il nodo G) per modo che le tensioni misurate tra i fili ed il centro stella rispondono alla proprietà delle tensioni di fase spiccate dal baricentro del triangolo delle tensioni concatenate, si veda (5.5). Nel seguito queste tensioni di fase verranno designate con un solo indice (v_1, v_2, v_3).

$$\frac{\bar{V}_{1G}}{\bar{Z}} + \frac{\bar{V}_{2G}}{\bar{Z}} + \frac{\bar{V}_{3G}}{\bar{Z}} = 0 \rightarrow \bar{V}_{1G} + \bar{V}_{2G} + \bar{V}_{3G} = 0 \quad (5.5)$$

Se ora il triangolo delle tensioni concatenate è equilatero, il sistema delle tensioni si definisce *simmetrico* (in caso contrario si dirà che il sistema delle tensioni è *dissimmetrico*): in questo caso, si veda la Figura 5.8, le terne delle tensioni di fase e delle tensioni concatenate sono esprimibili come indicato nella (5.6), dove l'asse reale è stato posizionato in fase con la tensione di fase \bar{V}_1 .

$$\bar{V}_1 = V \quad \bar{V}_2 = V e^{-j\frac{2}{3}\pi} \quad \bar{V}_3 = V e^{-j\frac{4}{3}\pi} \quad (5.6)$$

$$\bar{V}_{12} = V_c e^{j\frac{\pi}{6}} \quad \bar{V}_{23} = V_c e^{-j\frac{5}{6}\pi} \quad \bar{V}_{31} = V_c e^{-j\frac{9}{6}\pi} \quad V_c = \sqrt{3}V$$

Le correnti misurate nella sezione mediante l'inserzione degli amperometri indicata in Figura 5.5 si prendono il nome di *correnti di*

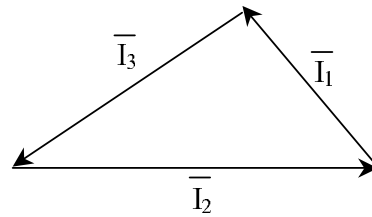


Figura 5.9: Triangolo delle correnti di linea

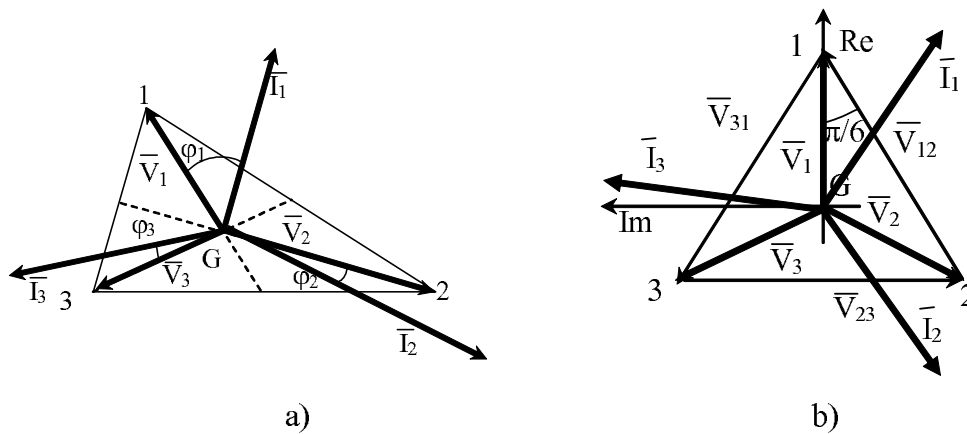


Figura 5.10: a) Sistema trifase simmetrico ed equilibrato b) Sistema trifase dissimmetrico e squilibrato

linea e godono della proprietà (LKT al nodo utilizzatore) che la loro somma è sempre nulla, si veda la (5.7). Se ne conclude che i fasori corrente di linea costituiscono i lati di un triangolo, si veda la Figura 5.9.

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0 \quad (5.7)$$

Se il triangolo è equilatero i fasori corrente hanno lo stesso modulo e sono tra loro sfasati di $2\pi/3$; in questo caso il sistema delle correnti si dice *equilibrato* (in caso contrario si parla di sistema *squilibrato*), si veda Figura 5.10b. Normalmente i tre fasori corrente vengono rappresentati spiccandoli dal centro teorico ed il complesso dei fasori di tensione e corrente assume, nel caso generale di sistemi dissimmetrici e squilibrati, l'aspetto indicato in Figura 5.10a.

5.3 Energetica delle linee trifase

Dal punto di vista energetico, per sistemi trifasi a tre fili, è utile leggere la (5.7) nel senso che la corrente in un filo qualsiasi si può interpretare come il ritorno delle correnti degli altri due fili. Tutto avviene quindi come se vi fossero due linee monofase con un filo di ritorno in comune. In base a questa interpretazione, la potenza istantanea trasmessa dalla linea trifase si può valutare in uno qualsiasi dei modi evidenziati nelle (5.8) (si noti che l'ultimo tipo di scrittura evidenzia il fatto che la linea trifase è equivalente a tre linee monofase interessate dalle correnti di linea e dalle tensioni di fase rispetto ad un qualsiasi centro O). Normalmente si preferisce limitare la misura all'uso di due wattmetri come evidenziato dall'ultimo termine delle (5.8). Una possibile inserzione, che corrisponde alla modalità di calcolo indicata nella prima delle (5.8), è rappresentata in Figura 5.11. Tale modalità prende il nome di *inserzione Aron* dei wattmetri.

$$\begin{aligned} p &= v_{1O}i_1 + v_{2O}i_2 + v_{3O}i_3 = v_{1O}i_1 + v_{2O}i_2 + v_{3O}(-i_1 - i_2) = \\ &= (v_{1O} - v_{3O})i_1 + (v_{2O} - v_{3O})i_2 = v_{13}i_1 + v_{23}i_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p &= v_{1O}i_1 + v_{2O}i_2 + v_{3O}i_3 = v_{1O}i_1 + v_{2O}(-i_1 - i_3) + v_{3O}i_3 = \\ &= (v_{1O} - v_{2O})i_1 + (v_{3O} - v_{2O})i_3 = v_{12}i_1 + v_{32}i_3 \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} p &= v_{1O}i_1 + v_{2O}i_2 + v_{3O}i_3 = v_{1O}(-i_2 - i_3) + v_{2O}i_2 + v_{3O}i_3 = \\ &= (v_{2O} - v_{1O})i_2 + (v_{3O} - v_{1O})i_3 = v_{21}i_2 + v_{31}i_3 \end{aligned}$$

In termini di potenza attiva le espressioni (5.8) assumono la forma indicata in (5.9) ed in maniera analoga si può dedurre la potenza reattiva come indicato in (5.10).

$$P = P_{13} + P_{23} = P_{12} + P_{32} = P_{21} + P_{31} = P_1 + P_2 + P_3 \quad (5.9)$$

$$Q = Q_{13} + Q_{23} = Q_{12} + Q_{32} = Q_{21} + Q_{31} = Q_1 + Q_2 + Q_3 \quad (5.10)$$

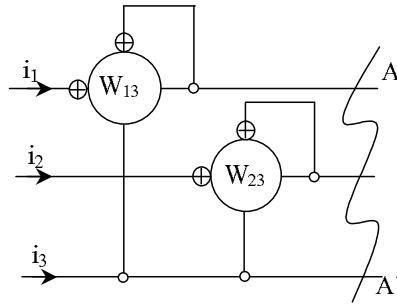


Figura 5.11: Inserzione Aron dei wattmetri

La potenza apparente e la potenza complessa trifase assumono la forma indicata in (5.11). Il rapporto $\cos \varphi = P/A$ prende il nome di *fattore di potenza convenzionale* del sistema trifase.

$$\bar{A} = P + jQ \quad A = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad \cos \varphi = \frac{P}{A} \quad (5.11)$$

Nel caso di sistema simmetrico ed equilibrato il fattore di potenza convenzionale coincide naturalmente con il fattore di potenza di ogni fase. In questo caso, inoltre, la potenza istantanea è costante nel tempo e coincide con il valore di potenza attiva.

5.4 Risoluzione di reti trifase

Se la rete trifase non è simmetrica ed equilibrata si può procedere alla sua risoluzione sfruttando tutti i teoremi delle reti elettriche evidenziati nei capitoli precedenti. Si evidenziano di seguito alcune semplificazioni notevoli che si possono ottenere nella risoluzione delle reti trifase grazie alla loro topologia.

5.4.1 Circuito monofase equivalente

Consideriamo la configurazione particolarmente significativa di Figura 5.12 in cui un generatore trifase G alimenta tramite una linea L di trasmissione dell'energia elettrica un complesso di carichi C tra loro in parallelo. Il funzionamento simmetrico ed equilibrato, che è

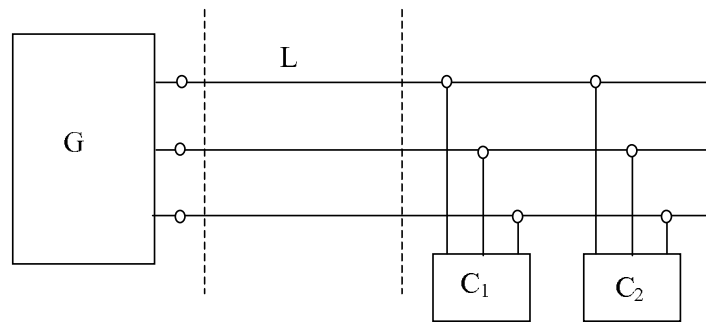


Figura 5.12: Tipico impianto di distribuzione trifase

quello di maggior rilevanza applicativa per tutti i calcoli energetici di base dei sistemi elettrici trifase, si presenta quando il sistema di tensioni fornito dal generatore è simmetrico, la linea è costituita da tre conduttori simmetricamente disposti nello spazio e tutti i carichi sono equilibrati (costituiti da tre impedenze uguali connesse a stella oppure a triangolo).

Se si rappresenta il generatore mediante tre generatori di tensione ideali connessi a stella (con tensioni pari a quella della terna delle tensioni di fase riferite al centro teorico), la linea (fase per fase) mediante una resistenza R ed una induttanza L in serie tra di loro ed i carichi sempre mediante circuiti equivalenti a stella (nel caso di connessione a triangolo si opererà trasformando il triangolo nella stella equivalente) allora l'impianto di Figura 5.12 si potrà schematizzare come è indicato in Figura 5.13.

Nel circuito di Figura 5.13, in ragione della simmetria del generatore e della linea e dell'equilibrio dei carichi, tutto avviene come se vi fossero tre reti monofase, tra loro svincolate, con un filo di ritorno in comune (percorso da corrente nulla). Lo studio della rete si può quindi limitare ad una qualsiasi delle tre reti monofase (si veda la Figura 5.14) e la soluzione delle reti monofase equivalente si potrà ottenere avvalendosi del teorema fondamentale delle reti elettriche (e delle formulazioni derivate) oppure del procedimento di Boucherot.

Una volta risolta la rete monofase equivalente i risultati conseguiti andranno opportunamente modificati per adattarli alla rete trifase

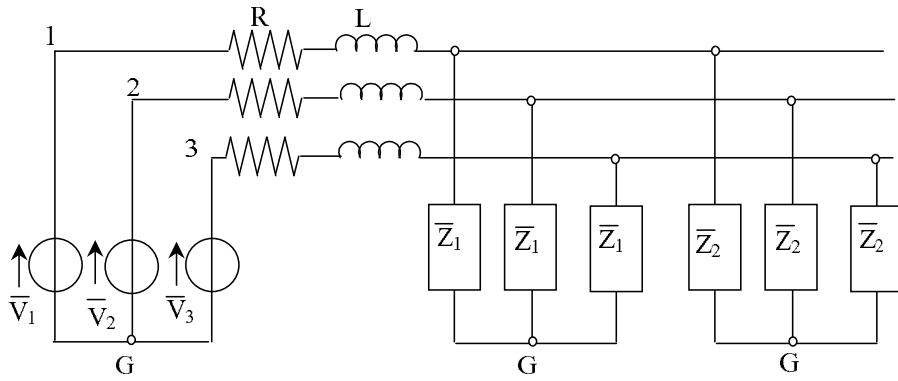


Figura 5.13: Circuito equivalente di un impianto con generatori e linea simmetrici e carichi equilibrati

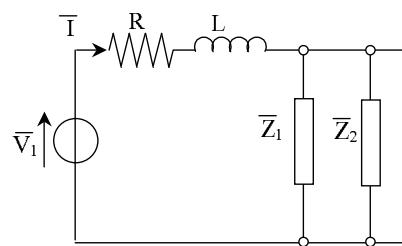


Figura 5.14: Rete monofase equivalente a quella trifase simmetrica ed equilibrata

originale. In proposito, le correnti di linea trifase coincidono con quelle del circuito monofase, le tensioni di fase del trifase coincidono con quelle del circuito monofase equivalente mentre per le tensioni concatenate e le potenze trifase valgono le (5.12) e (5.13) (dove il pedice t si riferisce al trifase, il pedice m al monofase e il pedice c alla tensione concatenata).

$$V_t = V_m = V \quad I_t = I_m = I \quad V_c = \sqrt{3}V_m = \sqrt{3}V \quad (5.12)$$

$$P_t = 3P_m = 3VI \cos \varphi$$

$$Q_t = 3Q_m = \pm 3VI \sin \varphi \quad (5.13)$$

$$\bar{A}_t = P_t + jQ_t = 3VIe^{j\pm\varphi}$$

5.4.2 La formula di Millman per reti trifase

Si consideri la rete trifase simmetrica ma squilibrata rappresentata in Figura 5.15. E si vogliano calcolare le tensioni tra il nodo G e i nodi O e O'. Sfruttando la metodologia introdotta nel Capitolo 1 che consente di eliminare lati della rete contenenti esclusivamente generatori di tensione senza modificare le LKT si può ottenere la rete equivalente rappresentata in Figura 5.16.

Rimane evidente che alla rete di Figura 5.16 si può applicare la formula di Millman per ricavare la tensione tra G ed O e tra G ed O' come indicato in (5.14).

$$\bar{V}_{OG} = \frac{\frac{\bar{V}_1}{\bar{Z}_1} + \frac{\bar{V}_2}{\bar{Z}_2} + \frac{\bar{V}_3}{\bar{Z}_3}}{\frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \frac{1}{\bar{Z}_3}} \quad \bar{V}_{O'G} = \frac{\frac{\bar{V}_1}{\bar{Z}'_1} + \frac{\bar{V}_2}{\bar{Z}'_2} + \frac{\bar{V}_3}{\bar{Z}'_3}}{\frac{1}{\bar{Z}'_1} + \frac{1}{\bar{Z}'_2} + \frac{1}{\bar{Z}'_3}} \quad (5.14)$$

Per le medesime motivazioni precedenti la tensione tra O e G non è influenzata da carichi come quello indicato in Figura 5.17 (carichi di questo tipo prendono il nome di *carichi trasversali*).

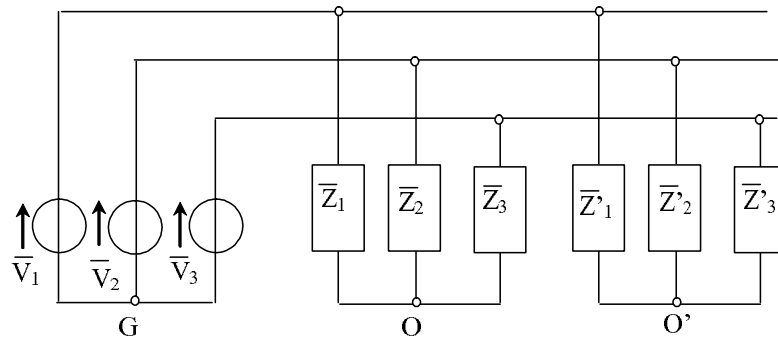


Figura 5.15: Rete trifase dissimmetrica e squilibrata

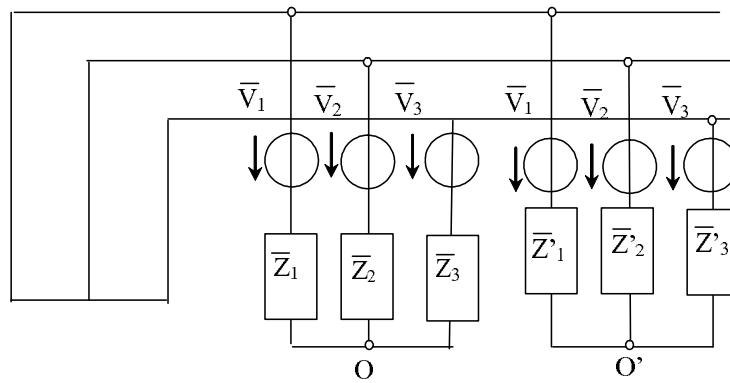


Figura 5.16: Rete trifase equivalente

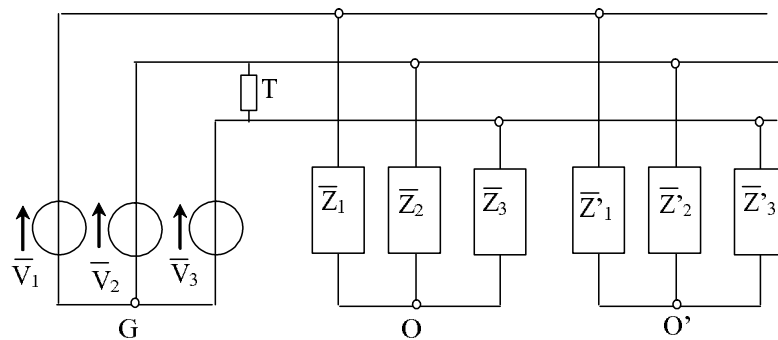


Figura 5.17: Carico trasversale

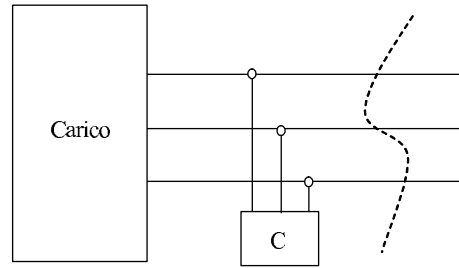


Figura 5.18: Rifasamento di carichi trifase

5.5 Rifasamento

Anche per i carichi trifase valgono le stesse considerazioni già fatte nel Capitolo 4 per cui il produttore di energia elettrica, allo scopo di limitare la potenza apparente, impone agli utenti che il fattore di potenza delle reti utilizzatrici sia convenientemente alto e solitamente $\cos \varphi > 0.9$. Se il carico non soddisfa naturalmente questa condizione bisogna introdurre delle batterie di condensatori come indicato in Figura 5.18.

Procedendo in maniera analoga a quanto già introdotto per le reti monofase, il valore della capacità della batteria di condensatori può essere determinato, nel caso di alimentazione simmetrica, come indicato nelle (5.15)-(5.16), rispettivamente per un collegamento a stella e a triangolo (si è indicato con V il valore efficace delle tensioni di fase e con V_c il valore efficace delle tensioni concatenate).

$$C_Y = \frac{Q - P \tan \varphi}{3\omega V^2} = \frac{Q - P \tan \varphi}{\omega V_c^2} \quad (5.15)$$

$$C_\Delta = \frac{Q - P \tan \varphi}{3\omega V_c^2} \quad (5.16)$$

Capitolo 6

Reti in regime alternato non sinusoidale

6.1 Introduzione

La risposta di una rete passiva lineare ad un sistema di ingressi costituito da un insieme di generatori indipendenti di tensione e di corrente alternata sinusoidale a diverse frequenze si può valutare, in base al teorema di sovrapposizione, come somma delle risposte dovute ai singoli generatori quando gli altri siano annullati.

Tale procedura si presta ad essere generalizzata per la risoluzione delle reti elettriche in quanto, le forme d'onda dei generatori di corrente e tensione, nel caso non fossero alternate sinusoidali, possono essere rappresentate, grazie allo sviluppo in serie di Fourier, come somma di grandezze alternate sinusoidali, di ampiezza opportuna. Nel seguito si analizzeranno alcuni aspetti generali utili allo studio di reti elettriche sottoposte a generatori non sinusoidali.

6.2 Lo sviluppo in serie di Fourier

Si consideri un generatore indipendente la cui forma d'onda è descrivibile con una funzione periodica del tempo caratterizzata dal fatto che (si veda la Figura 6.1):

- all'interno del periodo T compare un numero finito di massimi e di minimi;

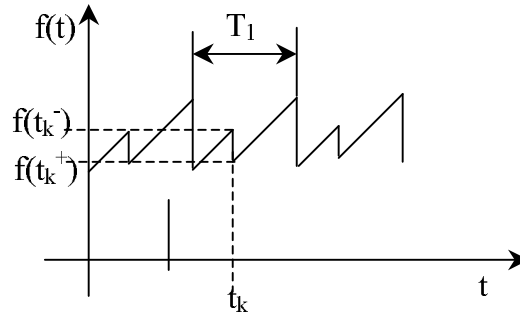


Figura 6.1: Esempio di forma d'onda sviluppabile con Fourier

- all'interno del periodo T compare al più un numero finito di discontinuità (in corrispondenza di istanti temporali t_k noti) tali però che esistano e siano finiti il limite destro $f(t_k^+)$ e sinistro $f(t_k^-)$.

L'analisi matematica assicura che le funzioni periodiche sopra indicate sono esprimibili come somma di infinite funzioni sinusoidali, con pulsazione multipla intera della *pulsazione fondamentale* $\omega_1 = 2\pi/T$ e che la serie converge ad $f(t)$ per i punti di continuità e ad $[f(t_k^+) + f(t_k^-)]/2$ per i punti di discontinuità.

La *forma trigonometrica* della serie di Fourier (la *forma esponenziale* si ricava da quella trigonometrica ricordando che $\cos k\omega t = \text{Ch}jk\omega t$ e che $\sin k\omega t = \text{Sh}(jk\omega t)/j$) è fornita dalla (6.1) dove l'espressione del valore medio F_m e delle ampiezze delle armoniche successive F'_{kM} , F''_{kM} sono indicate nella (6.2).

$$f(t) = F_m + \sum_{k=1}^{\infty} (F'_{kM} \cos k\omega_1 t + F''_{kM} \sin k\omega_1 t) \quad (6.1)$$

$$F_m = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$F'_{kM} = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega_1 t) dt \quad F''_{kM} = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega_1 t) dt \quad (6.2)$$

Si possono poi sommare le due sinusoidi presenti nella (6.2) in modo da compattare lo sviluppo come è indicato nella (6.3).

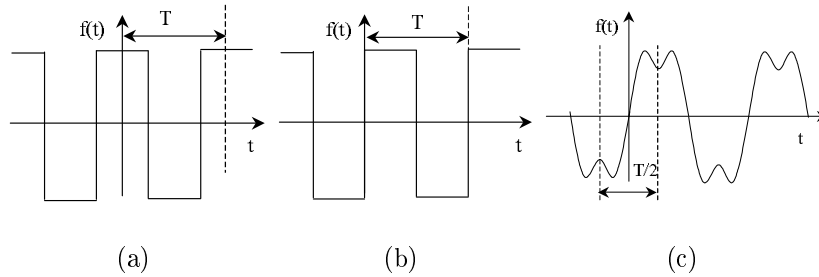


Figura 6.2: a) Funzione periodica pari; b) funzione periodica dispari; c) funzione periodica speculare

$$f(t) = F_m + \sum_1^{\infty} F_{kM} \cos(k\omega_1 t - \alpha_k) \quad (6.3)$$

Ulteriori semplificazioni dello sviluppo si possono conseguire tenendo conto delle simmetrie e precisamente:

- se $f(t)$ è una funzione periodica pari (e cioè se rispetto all'origine dei tempi risulta $f(-t) = f(t)$, si veda la Figura 6.2a) allora nello sviluppo in serie compaiono solo coseni (come si deduce intuitivamente dal fatto che le funzioni seno sono dispari);
- se $f(t)$ è una funzione periodica dispari (e cioè se rispetto all'origine dei tempi risulta $f(-t) = -f(t)$, si veda la Figura 6.2b) allora nello sviluppo in serie compaiono solo seni (come si deduce intuitivamente dal fatto che le funzioni coseno sono pari);
- se $f(t)$ presenta simmetria speculare (e cioè se rispetto all'origine dei tempi risulta $f(-t) = -f(-t + T/2)$, si veda la Figura 6.2c) per modo che la semionda positiva si ottiene da quella negativa per ribaltamento e scorrimento allora nello sviluppo sono presenti solo armoniche multiple dispari della fondamentale.

6.3 Risposta di una rete lineare

La risposta di una rete lineare ad un ingresso alternato non sinusoidale si valuta, come già detto, per sovrapposizione delle singole armoniche

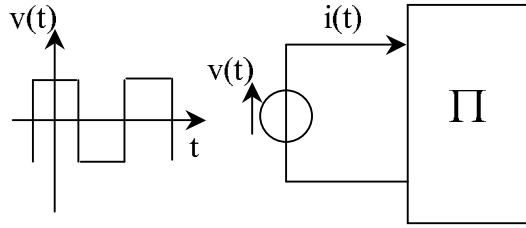


Figura 6.3: Risposta di una rete ad un generatore di tensione alternata non sinusoidale

componenti lo sviluppo in serie. Si consideri in proposito il caso tipico, si veda la Figura 6.3, di un ingresso in tensione $v(t)$. Per il calcolo della corrente $i(t)$ la funzione $v(t)$ conviene porla nella forma indicata nella (6.4). L'ampiezza e la fase delle singole armoniche di corrente si valutano tramite la (6.5) e cioè tramite il modulo e la fase della ammettenza che la rete presenta alle singole armoniche di tensione. Si esprime infine la corrente $i(t)$, funzione alternata non sinusoidale con lo stesso periodo della tensione, tramite il suo sviluppo in serie, si vedano le (6.6)-(6.7).

$$v(t) = V_m + \sum_1^{\infty} V_{kM} \cos(k\omega_1 t - \alpha_k) \quad (6.4)$$

$$\bar{I}_k = \bar{Y}(jk\omega_1) \bar{V}_k \quad \bar{Y}(jk\omega_1) = Y(k\omega_1) e^{-j\varphi_k} \quad (6.5)$$

$$i(t) = I_m + \sum_0^{\infty} I_{kM} \cos(k\omega_1 t - \alpha_k - \varphi_k) \quad (6.6)$$

$$I_{kM} = Y(k\omega_1) V_{kM} \quad I_m = Y(0) V_m \quad (6.7)$$

Resta ora il dubbio di come avvalersi della soluzione, in quanto gli sviluppi in serie pongono evidenti imbarazzi legati al fatto di: i) dover considerare infiniti termini, ii) dover valutare la possibile convenienza di altri tipi di sviluppo in serie, diversi da quello proposto da Fourier. In proposito valgono le seguenti osservazioni.

- Si può dimostrare che l'errore quadratico medio che si commette approssimando una funzione periodica mediante la somma di

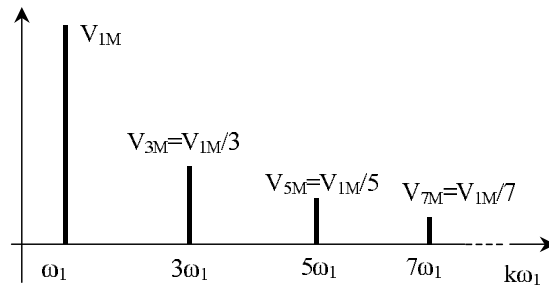


Figura 6.4: Spettro dell'ingresso in tensione (ampiezza)

funzioni armoniche è minimo se le ampiezze di tali armoniche sono quelle dello sviluppo in serie di Fourier. In altri termini il funzionale $g(n)$ di cui alla (6.8) (di evidente significato energetico) è minimo (per ogni valore di n) se $f_n(t)$ corrisponde ai primi n termini dello sviluppo in serie di Fourier. Se l'attenzione allora è rivolta alle trasformazioni energetiche (e non, ad esempio, alla riproduzione più corretta della forma d'onda) conviene usare lo sviluppo di Fourier.

$$g(n) = \frac{1}{T} \int_0^T [f(t) - f_n(t)]^2 dt \quad (6.8)$$

- Le valutazioni energetiche possono esser circoscritte a poche armoniche isofrequenziali di tensione e di corrente se la rete ha un comportamento asintotico induttivo (come avviene in gran parte delle applicazioni industriali).

In effetti lo *spettro delle ampiezze* della funzione periodica $v(t)$, cioè il diagramma delle ampiezze V_{kM} delle diverse armoniche componenti l'ingresso $v(t)$ in funzione della pulsazione, presenta ampiezze V_{kM} decrescenti al crescere di $k\omega$ quanto meno proporzionalmente ad $1/k$, si vedano come esempio le Figure 6.3-6.4.

D'altra parte lo spettro delle ampiezze della corrente si deduce da quello dell'ingresso tramite la (6.9) e cioè tramite il modulo della ammettenza che la rete presenta alle diverse armoniche di tensione.

$$\bar{I}_k = V_{kM} e^{j\alpha_k} \bar{Y}(jk\omega_1) \quad I_{kM} = V_{kM} Y(k\omega_1) \quad (6.9)$$

Se ora la rete è asintoticamente induttiva, come avviene in gran parte delle applicazioni industriali, allora il modulo della ammettenza $Y(k\omega_1)$ decresce circa proporzionalmente a $1/k$ (ad esempio per una rete R, L serie è $Z(k\omega_1) = 1/Y(k\omega_1) = \sqrt{R^2 + (k\omega_1 L)^2}$ e per k convenientemente grande è $Y(k\omega_1) \approx 1/(kL\omega_1)$) e le ampiezze delle successive armoniche della corrente I_{kM} decrescono proporzionalmente quanto meno come $1/k^2$ e la potenza apparente $A_k = V_k I_k$ associata alla armonica di ordine della tensione e della corrente decresce quanto meno come $1/k^3$. Se ne conclude che normalmente per le reti induttive bastano pochi termini dello sviluppo in serie per cogliere quasi completamente la natura delle trasformazioni energetiche.

6.4 Valore efficace, residuo e potenze

Il valore efficace della tensione applicata alla rete di Figura 6.2 si deduce dalla (6.4) come è indicato nella (6.10). Il risultato rappresentato nella (6.10) si giustifica tenendo in conto le proprietà delle funzioni armoniche evidenziate nelle (6.11): in altri termini danno un contributo non nullo all'integrale solo i quadrati delle singole armoniche e l'integrale di tali quadrati è il quadrato del valore efficace della singola armonica componente.

$$V = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2 dt} = \sqrt{V_m^2 + \sum_1^{\infty} V_k^2} \quad (6.10)$$

$$\int_0^T \cos(n\omega_1 t) \cos(m\omega_1 t) dt = \int_0^T \sin(n\omega_1 t) \sin(m\omega_1 t) dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{T}{2} & m = n \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin(m\omega_1 t) \cos(n\omega_1 t) dt = 0 \quad \forall m, n \quad (6.11)$$

Per una grandezza alternata sinusoidale a valore medio nullo si definisce *residuo* il rapporto r presentato nella (6.12) Il residuo è un

indice dello scostamento della forma d'onda dalla sinusoide pura (per la sinusoide infatti $r = 0$).

$$r = \frac{\sqrt{\sum_2^{\infty} V_k^2}}{V_1} \quad (6.12)$$

La potenza istantanea $p(t)$ assorbita dalla rete è data dal prodotto delle sommatorie di cui alle (6.4)-(6.6) e la potenza attiva, valore medio della potenza istantanea, è fornita dalla (6.13). Infatti, in base alle proprietà generali rappresentate nella (6.11), danno un contributo non nullo alla potenza attiva solo le armoniche isofrequenziali di tensione e di corrente. Naturalmente l'energia W assorbita dalla rete in un intervallo di tempo $\Delta t \gg T$ si calcola come indicato ancora nella (6.13).

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = V_m I_m + \sum_1^{\infty} V_k I_k \cos \varphi \quad W(\Delta t) = P \Delta t \quad (6.13)$$

Normalmente, però, le trasformazioni energetiche che interessano sono quelle associate alla prima armonica di tensione e di corrente. Da questo punto di vista la (6.13) evidenzia il fatto che in tal caso il regime alternato non sinusoidale comporta uno spreco energetico tanto più elevato quanto più elevato è il contenuto armonico della grandezza impressa e quanto meno la rete si presta con il suo comportamento induttivo a limitare la circolazione delle armoniche di corrente con frequenza multipla di quella della prima armonica.

Si definisce *potenza apparente* A in regime alternato non sinusoidale il prodotto dei valori efficaci di tensione e di corrente, si veda la (6.14).

$$A = VI = \sqrt{V_m^2 + \sum_k V_k^2} \sqrt{I_m^2 + \sum_k I_k^2} \quad (6.14)$$

Si noti che agli effetti della potenza attiva e della potenza apparente il sistema deformato è equivalente ad una sinusoide tensione di valore efficace V e ad una sinusoide corrente di valore efficace I tra loro sfasate con un fattore di potenza $\cos \varphi = P/A$.

Definiamo ora come potenza reattiva Q in regime deformato (senza uno specifico significato energetico) la somma delle potenze reattive associate alle singole armoniche isofrequenziali di tensione e di corrente, si veda la (6.15) (che non coincide con quella delle sinusoidi equivalenti prima definite). Potremo a questo punto constatare che in regime deformato per legare alla potenza apparente la potenza attiva e quella reattiva occorre considerare un ulteriore termine D che prende il nome di potenza deformante, si veda la (6.16). La presenza della potenza deformante testimonia che le trasformazioni energetiche nelle reti in regime deformato sono nettamente più complesse che in regime alternato sinusoidale.

$$Q = \sum_1^{\infty} V_k I_k \sin \varphi \quad (6.15)$$

$$A^2 = P^2 + Q^2 + D^2 \quad (6.16)$$

Capitolo 7

Equazioni di stato e transitori

7.1 Introduzione

L'analisi condotta nei Capitoli precedenti era volta a studiare il comportamento delle reti elettriche in una particolare condizione di regime trascurando tutti i fenomeni che coinvolgono le grandezze di rete prima del raggiungimento di tale condizione. Questa analisi non è sicuramente esaustiva del comportamento delle reti elettriche, in quanto le variazioni di regime in qualsiasi circuito reale sono molto frequenti (si pensi ad esempio al semplice gesto di premere l'interruttore per illuminare una stanza). E' quindi necessario introdurre una metodologia che permetta di analizzare questa condizione di funzionamento che verrà convenzionalmente chiamata *regime transitorio*¹.

Più precisamente si dirà che una rete si trova in *regime transitorio* quando le varie grandezze che ne caratterizzano il funzionamento stanno evolvendo dai valori tipici di un certo regime a quello di un altro regime. La transizione tra i due stati di regime può avvenire per effetto dell'intervento dei generatori oppure perchè la configurazione del circuito elettrico è in qualche modo modificata (solitamente per effetto dell'apertura e chiusura di interruttori).

Nel seguito saranno presentati alcuni metodi generali per l'analisi dei transitori nelle reti normali che verranno poi particolarizzati per

¹In questo caso si parla impropriamente di "regime" per identificare facilmente tutta la fase di evoluzione della rete tra due condizione di regime differenti.

l'analisi di reti caratterizzate da generatori stazionari e con un unico bipolo reattivo (induttore o condensatore).

7.2 Stato di un sistema fisico

Si definisce *stato* di un sistema fisico un insieme di variabili che soddisfa le seguenti condizioni.

- La conoscenza dello stato e degli ingressi (nel caso delle reti elettriche gli ingressi sono i generatori indipendenti di tensione e di corrente) in un istante di tempo t^* consente di valutare ogni altra grandezza pertinente il sistema fisico nello stesso istante di tempo.
- La conoscenza dello stato al tempo t^* e degli ingressi consente di valutare lo stato per ogni istante di tempo $t > t^*$.

Per una rete elettrica non degenera (che non contiene nodi cui concorrono soli induttori o maglie formate da soli condensatori, tali cioè da stabilire un legame algebrico tra le correnti/tensioni degli induttori/condensatori che ne fanno parte) caratterizzata da ingressi che presentino, al più, discontinuità di prima specie (discontinuità con limite destro e sinistro noti), le correnti degli induttori e le tensioni dei condensatori rappresentano lo stato della rete (si veda ad esempio la rete di Figura 7.1a). Si dimostrerà nel seguito che questo insieme di variabili soddisfa le due proprietà che definiscono lo stato.

7.3 Valutabilità del sistema fisico

Si dimostrerà in primo luogo che la conoscenza dello stato (correnti degli induttori e tensioni dei condensatori) e degli ingressi (generatori indipendenti di tensione e di corrente) all'istante t^* consente di valutare ogni altra grandezza di rete al medesimo istante.

Occorre infatti considerare che, dato il legame costitutivo dei bipoli che costituiscono lo stato ($v_L = Lpi_L$, $i_c = Cpv_c$) e data la natura

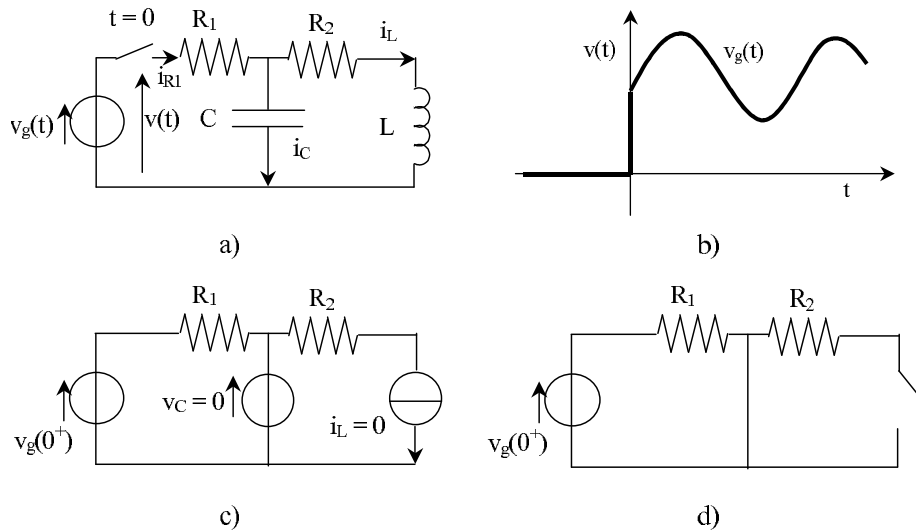


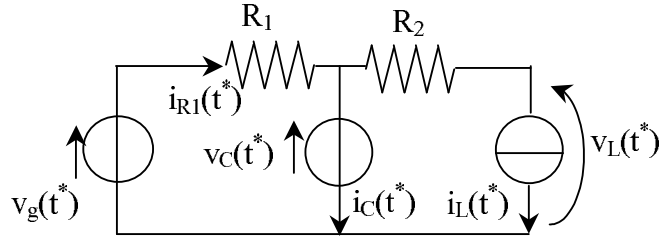
Figura 7.1: a) Rete non degenere inizialmente scarica; b) ingresso $v(t)$; c-d) rete equivalente nell'intorno di $t = 0^+$

degli ingressi (discontinuità, al più, di prima specie) la corrente degli induttori e la tensione dei condensatori devono variare senza discontinuità, infatti se la corrente di un induttore e/o la tensione ai morsetti di un condensatore presentassero discontinuità la tensione e/o la corrente ai morsetti di questi bipoli presenterebbero valori infinitamente alti non compatibili (considerate le LKC e le LKT) con le tensioni e le correnti finite dei generatori indipendenti di corrente e di tensione.

Ne consegue che nell'intorno di ogni istante di tempo t^* , per il teorema di sostituzione, agli induttori si può sostituire un generatore di corrente $i_L(t^*)$ ed ai condensatori un generatore di tensione $v_C(t^*)$. In conclusione la rete, nell'intorno di ogni istante t^* , si riduce ad una rete resistiva univocamente risolvibile in funzione dei generatori rappresentativi degli ingressi indipendenti e di quelli equivalenti agli induttori ed ai condensatori, si veda la Figura 7.2.

7.4 Evoluzione univoca dello stato

Si dimostrerà ora che la conoscenza dello stato al tempo t^* , e cioè la conoscenza di $i_L(t^*)$ e $v_C(t^*)$, e degli ingressi v_g, i_g consente di ricavare

Figura 7.2: Rete equivalente nell'intorno di t^*

univocamente lo stato $i_L(t)$, $v_C(t)$ per ogni $t > t^*$.

Infatti, per quanto mostrato nel precedente paragrafo, in ogni istante t è possibile esprimere, tramite la rete resistiva equivalente, ogni grandezza di rete attraverso lo stato e gli ingressi. D'altra parte se si individua nel grafo della rete, un albero che contiene tutti i lati che contengono i condensatori e nessun induttore (*albero proprio*, per le principali definizioni e proprietà dei grafi si riveda il Capitolo 2), si è in grado, appoggiando un induttore per volta all'albero, di scrivere per ogni induttore la sua equazione di maglia nella forma (7.1) e per ogni condensatore di esprimere la sua equazione di nodo nella forma (7.2).

$$Lp i_L = \sum (v_g + v_C + v_R) \quad (7.1)$$

$$Cp v_C = \sum (i_g + i_L + i_R) \quad (7.2)$$

Si noti che le tensioni che compaiono nella (7.1) sono, in generale, quelle degli ingressi v_g , dei condensatori v_C e dei lati resistivi v_R , mentre le correnti che compaiono nella (7.2) sono, in generale, quelle degli ingressi i_g , degli induttori i_L e dei lati resistivi i_R .

Dal momento che ogni grandezza di rete (ed in particolare v_R ed i_R) può essere espressa tramite lo stato e gli ingressi le equazioni (7.1)-(7.2) si possono riorganizzare, in forma matriciale, come è indicato nella (7.3).

$$p \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + [B] \begin{bmatrix} v_g \\ i_g \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

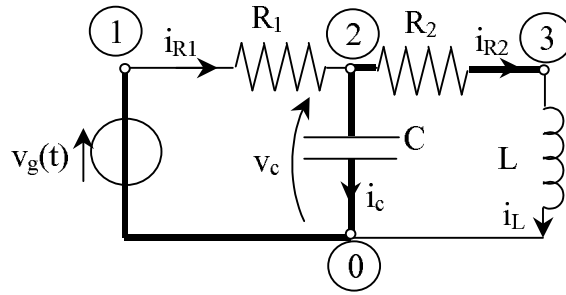


Figura 7.3: Albero proprio della rete

Lo stato quindi evolve nel tempo secondo un sistema di equazioni differenziali del primo ordine a coefficienti costanti di numero (*ordine della rete*) pari a quello degli induttori e dei condensatori presenti nella rete. L'analisi matematica assicura che si tratta di un sistema che ammette un'unica soluzione quando sia assegnato il valore dello stato al tempo iniziale.

7.5 Impostazione delle equazioni dinamiche

Si è dimostrato che per una rete normale lo stato è esprimibile tramite la corrente degli induttori e la tensione dei condensatori (per una rete con induttori e condensatori anomali si può mostrare che la metodologia messa a punto è ancora valida pur di assumere come stato il flusso concatenato degli induttori anomali e la carica elettrica dei condensatori anomali) e che la conoscenza dello stato all'istante t^* e degli ingressi consente di ricavare lo stato ed ogni altra grandezza di rete per $t > t^*$.

Nel presente paragrafo saranno presentati i metodi risolutivi delle equazioni di stato nel dominio del tempo in forma chiusa. Questi metodi consentono di rappresentare tensioni e correnti di rete sotto forma di funzioni del tempo continue e derivabili quando gli ingressi rispondano alle limitazioni nel seguito indicate. Pur ponendo alcune limitazioni, il metodo che verrà esposto ha il vantaggio (come quello basato sulla trasformata di Laplace) di evidenziare ulteriori proprietà generali delle reti. I metodi basati sulla integrazione numerica del-

le equazioni di stato, che costituiscono una valida alternativa, sono sicuramente più generali perché non pongono limitazioni sulla natura degli ingressi ma, d'altra parte, per la loro natura non forniscono indicazioni sulle proprietà intrinseche delle reti.

Il punto di partenza sono allora le equazioni di stato ed il valore dello stato al tempo, come è evidenziato nella (7.4) che per semplicità si riferisce ad una rete del secondo ordine (per le reti di ordine superiore lo stato sarà rappresentato da un vettore di correnti degli induttori e da un vettore di tensioni dei condensatori) con un solo ingresso $u(t)$ (nel caso di più ingressi vale il teorema di sovrapposizione).

$$p \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + [B]u \quad (7.4)$$

Le due equazioni differenziali della (7.4) si possono combinare fino ad ottenere un'unica equazione differenziale completa. Più in generale, per una rete di ordine n la cui dinamica è rappresentata da uno stato di n variabili costituite da correnti di induttori e tensioni di condensatori, combinando le equazioni di stato si ottiene un'equazione differenziale completa di ordine n a coefficienti costanti in una delle variabili di stato del tipo indicato nella (7.5). Questa equazione è da integrare con opportune condizioni iniziali della variabile x e delle sue derivate (che sono note in quanto x , come variabile di stato, è nota al tempo t^* con tutte le sue derivate).

L'analisi matematica insegna che tali equazioni differenziali sono univocamente risolubili e che la soluzione consta di due parti e precisamente della soluzione $x_t(t)$ della equazione omogenea associata che prende il nome di *soluzione transitoria* (e si ottiene da quella completa ponendo $f(t) = 0$) e da un *integrale particolare* $x_p(t)$ dell'equazione completa che prende il nome di *soluzione di regime*. Vale quindi la soluzione indicata nella (7.6)

$$\begin{aligned} a_n p^n x + a_{n-1} p^{n-1} x + \dots + a_0 x &= f(t) \\ p^{n-1} x(t^*) &= p^{n-1} x^* \\ x(t^*) &= x^* \end{aligned} \quad (7.5)$$

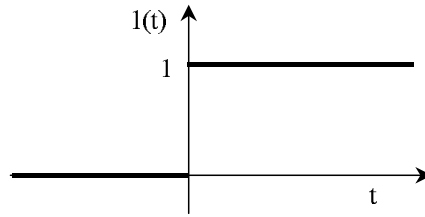


Figura 7.4: La funzione gradino unitario

$$x(t) = x_t(t) + x_p(t) \quad (7.6)$$

7.6 Sull'integrale particolare

L'integrale particolare è facilmente formulabile per la categoria di funzioni, di ampio interesse applicativo, che rispondono alla (7.7) e che sono denominate *sinusoidi generalizzate* o *cissoidi*. Il coefficiente s è un numero complesso che prende il nome di *pulsazione generalizzata* (σ è un numero reale positivo) ed il tempo è conteggiato ponendo $t^* = 0$ (gli ingegneri godono, a differenza degli studiosi di altre scienze, della opportunità di spostare l'origine del tempo all'inizio dei fenomeni oggetto di studio senza alterare per questo i risultati delle loro analisi). La funzione gradino unitario $1(t)$, che ha l'andamento temporale indicato in Figura 7.4, serve ad esprimere l'idea che l'ingresso $f(t)$ agisce per $t > 0$.

$$f(t) = \operatorname{Re}(\bar{F}e^{st}) \cdot 1(t) \quad \begin{aligned} \bar{F} &= Fe^{j\alpha} \\ s &= -\sigma + j\omega \end{aligned} \quad (7.7)$$

La sinusoida generalizzata (la cui forma d'onda si ottiene come è indicato in Figura 7.5) serve ad esprimere, in relazione ai diversi valori attribuibili alla pulsazione generalizzata, l'intervento sulla rete di un generatore con una delle forme d'onda indicate in Tabella 7.1 e rappresentate in Figura 7.5.

Per $t > 0$ le derivate successive della sinusoida generalizzata rispondono alla (7.8) in quanto sono tra loro scambiabili l'operatore p

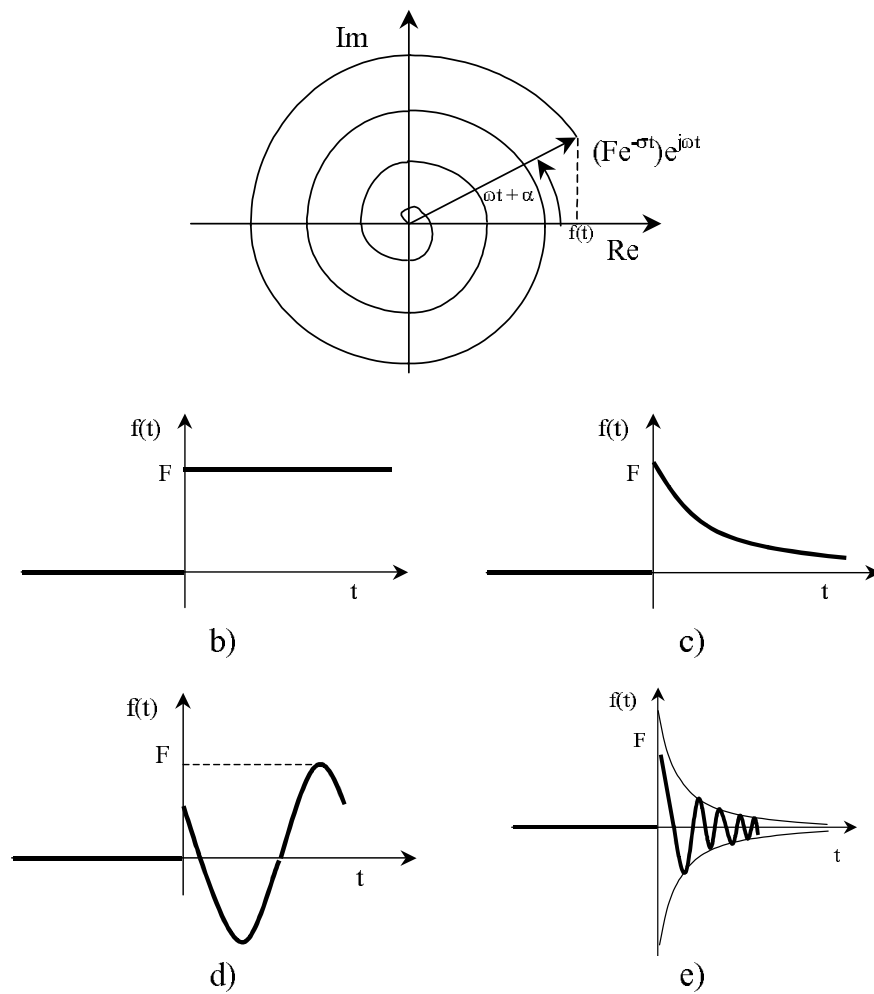


Figura 7.5: a) La cissoide come proiezione di un fasore rotante di ampiezza smorzata esponenzialmente; b) ingresso costante; c) ingresso variabile esponenzialmente; d) ingresso variabile sinusoidalmente; e) ingresso cissoide

Tabella 7.1: Forme d'onda cissoidali

Pulsazione	Espressione nel tempo	Tipo di ingresso
$s = 0$ $\bar{F} = F (\alpha = 0)$	$f(t) = F \cdot 1(t)$	Ingresso costante (Figura 7.5b)
$s = -\sigma (\omega = 0)$ $\bar{F} = F (\alpha = 0)$	$f(t) = F e^{-\sigma t} \cdot 1(t)$	Ingresso variabile esponenzialmente (Figura 7.5c)
$s = j\omega (\sigma = 0)$	$f(t) = F \cos(\omega t + \alpha) \cdot 1(t)$	Ingresso variabile sinusoidalmente (Figura 7.5d)
$s = -\sigma + j\omega$	$f(t) = F e^{-\sigma t} \cos(\omega t + \alpha) \cdot 1(t)$	Ingresso cissoidale (Figura 7.5e)

di derivazione e l'operatore Re di proiezione sull'asse reale. Questa proprietà giustifica il fatto che se l'ingresso $f(t)$ nella (7.5) è del tipo indicato nella (7.7), allora l'integrale particolare si può mettere nella forma indicata nella (7.9) (quindi l'integrale particolare è una cissoide con la stessa pulsazione generalizzata della cissoide di ingresso) dove l'espressione del fasore \bar{X}_p si può ottenere sostituendo la (7.9) nella (7.5) come indicato nelle (7.10) che consente di ottenere l'espressione (7.11) nella pulsazione generalizzata s .

$$p^n \text{Re}(\bar{F} e^{st}) \cdot 1(t) = \text{Re}(p^n \bar{F} e^{st}) \cdot 1(t) = \text{Re}(s^n \bar{F} e^{st}) \cdot 1(t) \quad (7.8)$$

$$x_p(t) = \text{Re}(\bar{X}_p e^{st}) \cdot 1(t) \quad (7.9)$$

$$a_n p^n (\text{Re}(\bar{X}_p e^{st}) \cdot 1(t)) + a_{n-1} p^{n-1} (\text{Re}(\bar{X}_p e^{st}) \cdot 1(t)) + \dots \\ \dots + a_0 (\text{Re}(\bar{X}_p e^{st}) \cdot 1(t)) = \text{Re}(\bar{F} e^{st}) \cdot 1(t)$$

$$a_n \text{Re}(s^n \bar{X}_p e^{st}) \cdot 1(t) + a_{n-1} \text{Re}(s^{n-1} \bar{X}_p e^{st}) \cdot 1(t) + \dots \\ \dots + a_0 (\text{Re}(\bar{X}_p e^{st}) \cdot 1(t)) = \text{Re}(\bar{F} e^{st}) \cdot 1(t)$$

$$\text{Re}((a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0) \bar{X}_p e^{st}) \cdot 1(t) = \text{Re}(\bar{F} e^{st}) \cdot 1(t) \quad (7.10)$$

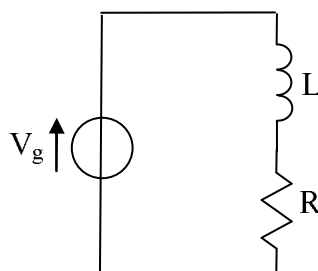


Figura 7.6: Rete elementare

$$\bar{X}_p = \frac{\bar{F}}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} \quad (7.11)$$

Per meglio comprendere il significato dell'espressione (7.11) si consideri la rete semplice di Figura 7.6 dove l'ingresso $v_g(t)$ è di tipo cissoidale $v_g(t) = \text{Re}(\bar{V}_g e^{st}) \cdot 1(t)$. L'equazione di stato risolutiva è indicata in (7.12).

$$L p i_L + R i_L = v_g \quad (7.12)$$

Se si sostituisce in (7.12) l'espressione dell'ingresso e della soluzione particolare (in questo caso essendo la soluzione una corrente si è indicato il fasore \bar{X}_p come \bar{I}_p) come indicato in (7.13) si ottiene la relazione notevole (7.14) dove il termine $\bar{Z}(s)$ prende il nome di *impedenza generalizzata*.

$$L \text{Re}(\bar{I}_p e^{st}) \cdot 1(t) + R \text{Re}(\bar{I}_p e^{st}) \cdot 1(t) = \text{Re}(\bar{V}_g e^{st}) \cdot 1(t) \quad (7.13)$$

$$\text{Re}((Ls + R)\bar{I}_p e^{st}) \cdot 1(t) = \text{Re}(\bar{V}_g e^{st}) \cdot 1(t)$$

$$\bar{I}_p = \frac{\bar{V}_g}{Ls + R} = \frac{\bar{V}_g}{\bar{Z}(s)} \quad (7.14)$$

Il risultato espresso da (7.14) può essere esteso a reti più complesse dotate di un unico ingresso di tipo cissoidale (per reti con più ingressi varrà il principio di sovrapposizione) ed in particolare è possibile

ottenere rapidamente l'integrale particolare risolvendo la rete simbolica equivalente ottenuta sostituendo agli induttori, il bipolo sL e ai condensatori, il bipolo $1/(sC)$.

7.7 Sull'integrale dell'omogenea associata

Per ricavare l'integrale dell'omogenea associata occorre risolvere l'equazione algebrica caratteristica indicata nella (7.15) nell'incognita z . Se le n radici z_1, z_2, \dots, z_n sono distinte reali o complesse coniugate, l'integrale generale dell'omogenea associata si pone nella forma indicata nella (7.16), in cui ad ogni coppia di radici complesse coniugate, del tipo $\bar{z}_k = \alpha_k \pm j\beta_k$ corrisponderà una oscillazione del tipo $e^{\alpha_k t} \cos(\beta_k t + \phi_k)$. Le costanti di integrazione A_n, ϕ_n vengono individuate imponendo alla soluzione completa le n condizioni iniziali della variabile di stato x e le sue derivate successive fino a quella di ordine $n - 1$ all'istante $t = 0^+$.

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 = 0 \quad (7.15)$$

$$x_t(t) = [A_1 e^{z_1 t} + A_2 e^{z_2 t} + A_k e^{\alpha_k} \cos(\beta_k + \phi_k) \dots + A_n e^{z_n t}] \cdot 1(t) \quad (7.16)$$

Se le radici non sono distinte ma tra di esse vi è una radice multipla di ordine m allora a questa radice corrisponde nella (7.16) un termine del tipo indicato nella (7.17) (che introduce m costanti di integrazione).

$$(B_1 + B_2 t + \dots + B_m t^{m-1}) e^{z_m t} \cdot 1(t) \quad (7.17)$$

In merito all'integrale dell'omogenea associata valgono le seguenti osservazioni.

- Un sistema fisico rappresentabile con una rete normale è intrinsecamente stabile e cioè se viene meno l'ingresso esso evolve verso lo stato di quiete con stato nullo. A questa caratteristica fisica deve corrispondere il fatto che se si pone $f(t) = 0$ (ingresso nullo

e di conseguenza è nullo l'integrale particolare), allora il limite per $t \rightarrow \infty$ di x_t deve essere nullo. La condizione ora indicata comporta che le radici z_j se sono reali devono essere negative e se sono complesse coniugate devono avere parte reale negativa. Si può dimostrare che affinché sia rispettata questa proprietà occorre che i segni dei diversi termini dell'equazione algebrica siano uguali (tutti positivi o tutti negativi). Questo comportamento giustifica per la soluzione x_t il nome di *soluzione transitoria* e, analogamente, quello di *soluzione di regime* per l'integrale particolare x_p . Si osservi che quanto detto ha un ben preciso significato energetico: non è possibile che in una rete abbandonata a se stessa senza generatori le grandezze continuino ad evolvere nel tempo senza mai annullarsi in quanto nulla genera l'energia che viene dissipata nei resistori.

- Le radici z_j , dovendo essere il prodotto $z_j t$ adimensionale, hanno la dimensione $[s^{-1}]$ e prendono il nome di *pulsazioni proprie* del sistema fisico rappresentato dalla rete. Dal momento che ogni termine della soluzione transitoria, del tipo $x_j = A_j e^{z_j t}$, presenta l'andamento temporale indicato in Figura 7.7b e diviene minore dell'un per mille del valore iniziale quando è trascorso un tempo pari a cinque costanti di tempo ($e^{-5} < 0.001$), ne consegue che la più piccola delle pulsazioni proprie dà una misura ingegneristica della durata del transitorio (la corrispondente radice z_m , di modulo minimo, si dice *radice dominante*). La conoscenza, viceversa, della pulsazione propria maggiore è utile nella scelta del passo per l'integrazione numerica dell'equazioni di stato (metodo da usare nel caso di ingressi non riconducibili ad una sinusoide generalizzata oppure nel caso di reti non lineari).
- Derivando una delle funzioni x_i si ottiene quanto è indicato nella (7.18) che comporta che l'inverso delle pulsazione propria (*costante di tempo*) è calcolabile graficamente come è indicato nella Figura 7.7: la lunghezza del segmento AB che si ottiene dall'intersezione della tangente alla curva in un generico punto t_j con

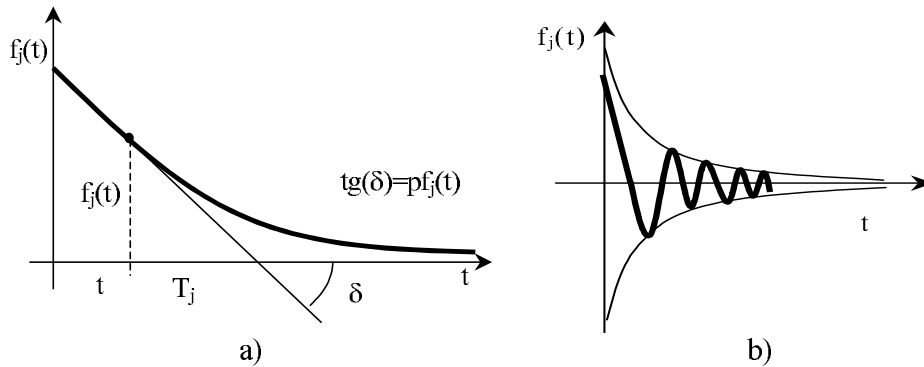


Figura 7.7: Tipico andamento temporale delle funzioni componenti la soluzione transitoria: a) nel caso di radice reale negativa; b) nel caso di radici complesse coniugate

l'asse delle ascisse è di lunghezza costante e pari alla costante di tempo.

$$px_j = p(A_j e^{-t/T_j}) = -\frac{A_j}{T_j} e^{-t/T_j} = -\frac{x_j}{T_j} \quad (7.18)$$

7.8 Esempi applicativi

Verranno proposti in questo paragrafo alcuni esempio applicativi relativi la soluzione di transitori elettrici descritti da equazioni differenziali del primo ordine (quindi con la presenza nel circuito di un solo induttore o condensatore). Per circuiti di questo tipo la soluzione può essere calcolata molto semplicemente analizzando in maniera opportuna la rete elettrica.

7.8.1 Transitorio con ingressi costanti

Si consideri il circuito di Figura 7.8, dove si voglia determinare l'andamento nel tempo della corrente che circola nell'induttore a seguito della chiusura dell'interruttore S. L'equazione che governa il transitorio è la (7.19) e la soluzione può essere espressa nella forma (7.20) che presenta l'andamento indicato in Figura 7.9.

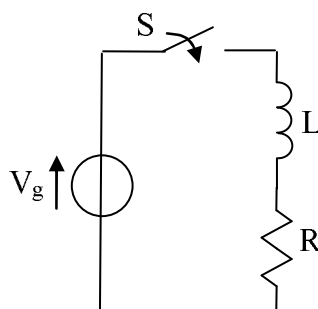


Figura 7.8: Circuito in regime transitorio

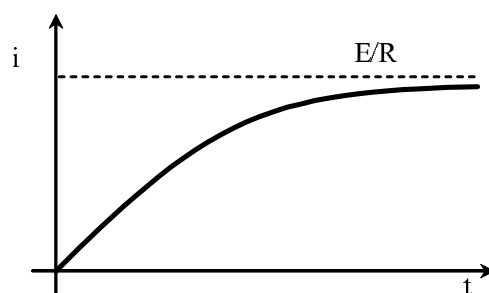


Figura 7.9: Andamento della corrente nell'induttore

$$V = Ri + L \frac{di}{dt} \quad (7.19)$$

$$i(t) = [i(0^+) - i(\infty)]e^{-t/\tau} + i(\infty) \quad (7.20)$$

I passi da seguire per ottenere la (7.20) sono i seguenti:

- Calcolo della grandezza di stato all'istante iniziale, $i(0^+)$. Nell'ipotesi che il circuito sia regime prima dell'esecuzione della manovra, tale valore può essere ottenuto risolvendo all'istante $t = 0^-$ la rete ottenuta sostituendo all'induttore, un corto circuito (essendo gli ingressi stazionari) ed imponendo poi la continuità dello stato $i(0^+) = i(0^-)$.
- Calcolo della soluzione di regime, $i(\infty)$, risolvendo la rete che si ottiene dopo la manovra di chiusura dell'interruttore, sostituendo all'induttore, un corto circuito.

- Calcolo della costante di tempo τ . Il valore della costante di tempo con cui evolve il transitorio può essere ottenuta come rapporto tra il valore di induttanza L e un opportuno valore di resistenza R_{eq} ($\tau = L/R_{eq}$). Il valore della resistenza R_{eq} è pari alla resistenza equivalente di Thevenin vista dai morsetti dell'induttore, dopo che la manovra di chiusura dell'interruttore è stata effettuata.

I passi elencati in precedenza si possono estendere a reti più complesse (ma sempre con un unico elemento passivo) e alla determinazione dell'andamento di grandezze di rete che non siano di stato che, naturalmente, presentano l'andamento indicato in (7.20).

Più in generale, la procedura per la determinazione dell'andamento di una grandezza di rete in regime transitorio con ingressi stazionari, si può riassumere nei seguenti passi.

- Calcolo del valore assunto della grandezza di stato (tensione sul condensatore, corrente nell'induttore) all'istante $t = 0^-$, risolvendo la rete a regime ottenuta quando non sia ancora stata eseguita la manovra che ha causato il transitorio e sostituendo all'induttore un corto circuito ed al condensatore un circuito aperto.
- Calcolo del valore della grandezza di interesse all'istante $t = 0^+$. Nel caso sia una grandezza di stato si impone la continuità $v_c(0^+) = v_c(0^-)$, $i_L(0^+) = i_L(0^-)$. Nel caso la grandezza non sia di stato è necessario risolvere la rete che si ottiene, dopo aver eseguito la manovra, sostituendo all'induttanza un generatore di corrente $i(0^-)$ e al condensatore un generatore di tensione con tensione $v(0^-)$ (in questo caso sono possibili discontinuità nel passaggio tra 0^- e 0^+).
- Calcolo del valore di regime della grandezza di interesse ($t = \infty$) risolvendo la rete che si ottiene, a manovra eseguita, sostituendo all'induttore un corto circuito ed al condensatore un circuito aperto.

- Determinazione della costante di tempo come prodotto/rapporto tra la capacità/induttanza del condensatore/induttore ed il valore della resistenza equivalente di Thevenin vista ai morsetti del condensatore/induttore dopo aver eseguito la manovra ($\tau = R_{eq}C$ oppure $\tau = L/R_{eq}$).

7.8.2 Transitorio con ingressi sinusoidali

Si consideri ancora il circuito di Figura 7.8, dove si voglia determinare l'andamento nel tempo della corrente che circola nell'induttore a seguito della chiusura dell'interruttore S. In questo caso si supponga che il generatore di tensione presenti un andamento nel tempo di tipo sinusoidale $v_g = \sqrt{2}V \sin(\omega t + \alpha)$.

L'equazione differenziale del transitorio è indicata in (7.21).

$$\sqrt{2}V \sin(\omega t + \alpha) = Ri + L \frac{di}{dt} \quad (7.21)$$

L'integrale dell'omogenea associata e l'integrale particolare (soluzione di regime, determinabile risolvendo la rete utilizzando le opportune grandezze fasoriali e poi ritornando nel dominio temporale) assumono le forme indicate in (7.22)-(7.23).

$$i_t = Ae^{-\frac{R}{L}t} \quad (7.22)$$

$$i_p = \frac{\sqrt{2}V}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin\left(\omega t + \alpha - \arctan \frac{\omega L}{R}\right) \quad (7.23)$$

Il valore della costante di integrazione A si ottiene imponendo alla soluzione completa $i = i_t + i_p$ la condizione iniziale di induttore scarico $i(0^+) = 0$ come indicato in (7.24).

$$0 = A + \frac{\sqrt{2}V}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin\left(\alpha - \arctan \frac{\omega L}{R}\right) \quad (7.24)$$

Capitolo 8

Legge dell'induzione elettromagnetica

8.1 Introduzione

Nei Capitoli precedenti si sono analizzati i fenomeni elettromagnetici, modellando i sistemi elettrici attraverso bipoli che potevano essere individuati da misure ai morsetti. Si sono quindi utilizzate leggi facilmente manipolabili come le LKT e LKC e legami alla porta dei bipoli (LC - legami costitutivi), derivati dalle più generali equazioni di Maxwell, che hanno consentito di studiare il comportamento dei circuiti in condizione di regime e transitoria. Per comprendere meglio il funzionamento delle macchine elettriche e dei fenomeni coinvolti nella trasformazione elettromeccanica dell'energia conviene approfondire ulteriormente i fenomeni che coinvolgono le cariche elettriche in movimento.

A tal proposito, si ricorda che lo studio dei fenomeni legati alle cariche elettriche in movimento all'interno dei materiali richiede l'introduzione di ulteriori campi vettoriali (oltre al campo elettrico \vec{E} e di induzione dielettrica \vec{D}), il *campo magnetico* \vec{H} e il *campo di induzione magnetica* \vec{B} . Il legame tra i due campi è indicato in (8.1), dove il coefficiente μ prende il nome di *permeabilità magnetica*. La rappresentazione della curva nel piano $B - H$ del legame espresso dalla (8.1) e ad esempio rappresentato in Figura 8.1, prende il nome di *caratteristica di magnetizzazione*. Se la caratteristica viene tracciata

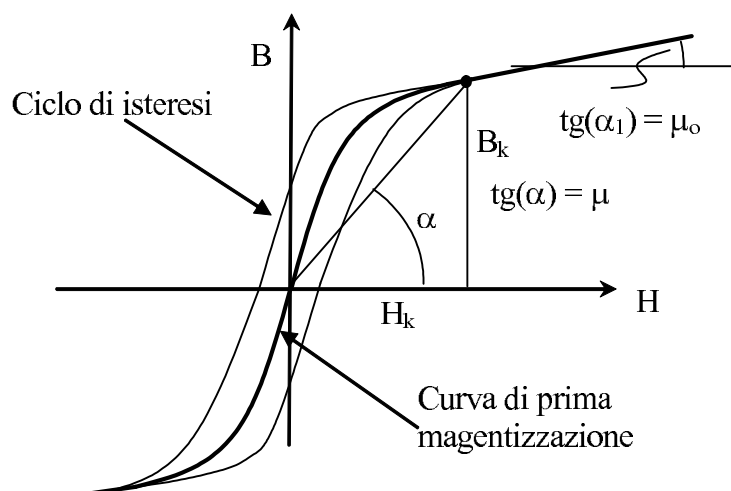


Figura 8.1: Caratteristiche di magnetizzazione

utilizzando un provino di materiale mai sottoposto a campi magnetici, si parla di *caratteristica di prima magnetizzazione*.

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (8.1)$$

8.2 Legge dell'induzione elettromagnetica

Si consideri un conduttore di resistenza R disposto nel piano come è indicato a tratto continuo in Figura 8.2 ed alimentato, tramite un interruttore, da un generatore di tensione costante. Chiuso l'interruttore 1, l'esperienza mostra quanto segue.

- Nel circuito circola una corrente $i_1(t)$ (misurata dall'amperometro A) variabile nel tempo che genera un campo magnetico le cui linee di forza, tangenti al vettore \vec{B} , avvolgono la corrente essendo orientate con la regola del cavatappi (Figura 8.3). Il flusso del vettore quindi entra dall'alto verso il basso (simbolo +) nella superficie delimitata dal conduttore che costituisce il circuito di Figura 8.2, mentre esce dalla superficie esterna al conduttore (simbolo •).

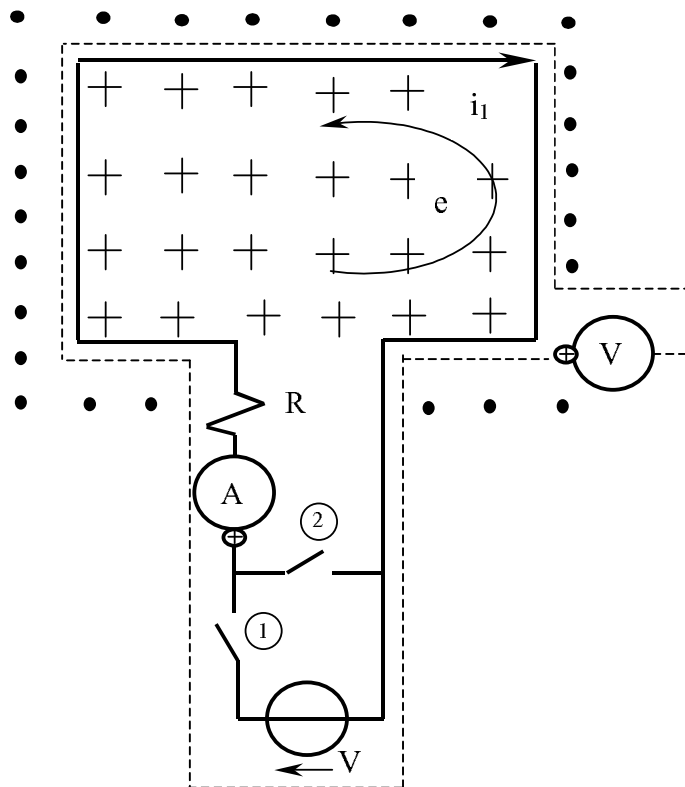


Figura 8.2: Il circuito oggetto di studio

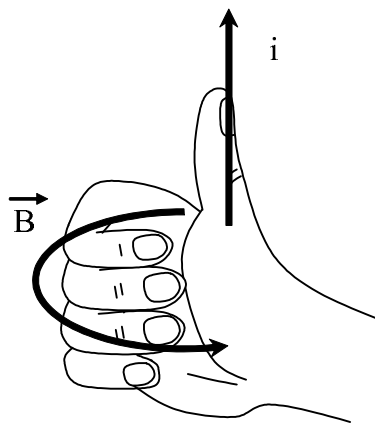


Figura 8.3: Regola del cavatappi

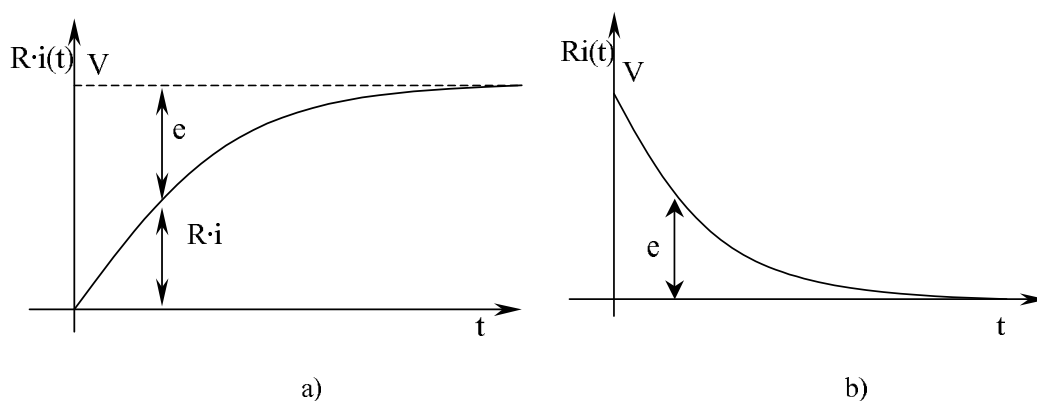


Figura 8.4: Transitorio di inserzione a) e disinserzione b)

- La corrente $i_1(t)$ perviene al valore di regime $I = V_g/R$ (dove R è la resistenza del circuito) seguendo un transitorio del tipo indicato in Figura 8.4a (una curva esponenziale) e se ne conclude, in base alla legge alle maglie, che fino a che la corrente cambia nel tempo, essendo $V_g - Ri_1(t) > 0$, nel circuito si manifesta una tensione $e(t)$, che si oppone al passaggio della corrente.
- Se ora si dispone un secondo conduttore, sagomato come il primo ed a questo immediatamente adiacente (tratteggiato in Figura 8.2), ripetendo la precedente esperienza si trova che il voltmetro V in Figura 8.2 segnala in questo conduttore la presenza di una tensione variabile pari ad $e(t)$; se poi il secondo conduttore viene sagomato nel senso di realizzare N spire tutte strettamente ridossate al primo conduttore allora il voltmetro segnala una tensione pari a $Ne(t)$.
- Se il circuito del secondo conduttore viene ristretto fino a ridurlo ad una striscia sottile all'interno dell'area delimitata dal primo conduttore oppure se il secondo conduttore viene allargato fino ad assumere dimensioni $L \gg l$, si veda Figura 8.5, allora si trova che la tensione nel secondo circuito diviene evanescente ($e_1 \approx 0$, $e_2 \approx 0$).

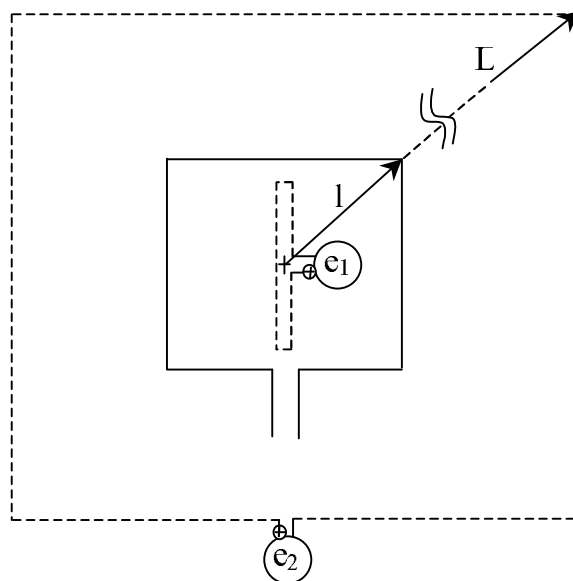


Figura 8.5: Misure ai morsetti

Una volta pervenuti alla corrente di regime se si chiude l'interruttore 2 e si apre l'interruttore 1, l'esperienza mostra quanto segue.

- La corrente nel primo conduttore si annulla con legge esponenziale (si veda la Figura 8.4b) e cioè (in base alla legge alle maglie) nel circuito è presente una tensione $e(t) = Ri_1(t)$ (che agisce in verso opposto a quella precedente) che si annulla quando la corrente è pervenuta al valore nullo di regime (la tensione, a differenza del caso precedente, agisce nel senso di mantenere la corrente nel circuito).
- Nel secondo conduttore, quello tratteggiato in Figura 8.2, il voltmetro segnala una tensione, negativa, pari ad $e(t)$.

Le esperienze ora descritte portano ad attribuire l'insorgere di una tensione variabile in un circuito al fatto che esso concatena un flusso magnetico variabile nel tempo. Questa è infatti la grandezza in comune tra i due circuiti di Figura 8.2. Tale grandezza risulta ampliata proporzionalmente al numero di spire del secondo circuito e ridotta per effetto delle variazioni dell'area del secondo circuito. Un altro

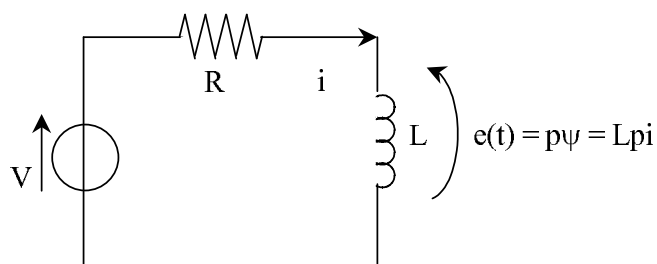


Figura 8.6: Circuito equivalente agli effetti dei transistori elettrici

modo per esprimere i risultati descritti consiste nell'affermare (usando il linguaggio di M. Faraday, che mise a punto l'esperimento) che l'elettricità genera magnetismo ed il magnetismo genera elettricità.

La formulazione matematica della legge dell'induzione elettromagnetica che lega il flusso concatenato da un circuito alla tensione che in esso viene indotta (quando si adoperino le convenzioni di misura indicate nella Figura 8.2) è dovuta a J.C. Maxwell. La legge in questione, detta anche legge di Faraday-Maxwell, è quella presentata nella (8.2), dove ψ è il flusso totale concatenato dal circuito, misurato in Weber [$Wb = V \cdot s$].

$$e = \frac{d\psi}{dt} \quad (8.2)$$

Conviene a questo punto riflettere anche sul nome da assegnare alla grandezza e descritta dalla legge di (8.2). In proposito si osserva che, collegato il circuito tratteggiato di Figura 8.2 ad un resistore, in questo, per effetto della circolazione della corrente, si dissipa energia e questa, dato che nel secondo circuito non vi è alcuna fonte energetica, non può che esser trasferita dal primo circuito tramite il campo magnetico variabile. Se si conviene di chiamare *forza elettromotrice* (abbreviato nel seguito con f.e.m.) ogni grandezza, omogenea con una tensione, che moltiplicata per la corrente presente in un circuito esprime la potenza scambiata con sistemi fisici interagenti non elettrici (con questa definizione la tensione che la pila Daniell presenta quando non eroga corrente è una f.e.m.) allora la grandezza espressa dalla legge di Faraday-Maxwell potrà ragionevolmente chiamarsi *for-*

za *elettromotrice indotta* (in luogo di *tensione indotta*, che è un'altra denominazione compatibile).

Con riferimento alle Figure 8.2-8.5 si osserva che il campo magnetico è generato dalla corrente presente nella spira (circuito 1) alimentata dalla pila e che, in base alla esperienza di Ampère, l'induzione \vec{B} in ogni punto del campo è proporzionale alla corrente i_1 . Ne consegue che il flusso ψ_{11} (dell'induzione magnetica \vec{B}) generato da i_1 e concatenato con il circuito 1 è proporzionale alla corrente. Si chiama *autoinduttanza* del circuito 1 il rapporto $L_{11} = \psi_{11}/i_1$. Il parametro autoinduttanza consente di descrivere i fenomeni relativi al circuito 1 con il circuito equivalente di Figura 8.6.

Anche il circuito 2 (quello tratteggiato nelle due figure) concatena un flusso ψ_{21} generato dalla corrente i_1 , proporzionale a tale corrente e funzione della disposizione spaziale di tale circuito. Si chiama *mutua induttanza* (il primo indice è quello del circuito che concatena il flusso, il secondo indice è quello del circuito in cui circola la corrente che genera il campo) il rapporto $L_{21} = \psi_{21}/i_1$. Avvalendosi di tali parametri la legge dell'induzione elettromagnetica per i circuiti 1 e 2 si scrive come è precisato nella (8.3) quando tutte le grandezze in gioco siano misurate come è indicato nella Figura 8.2.

$$\begin{aligned} e_{11} &= L_{11}pi_1 \\ e_{21} &= L_{21}pi_1 \end{aligned} \tag{8.3}$$

8.2.1 Esempi applicativi

Verranno ora presentati alcuni esempi applicativi al fine di evidenziare meglio le proprietà espresse in precedenza della legge dell'induzione elettromagnetica.

Si considerino i sistemi indicati in Figura 8.7 e si vogliano calcolare le indicazioni dei voltmetri, positive nel verso indicato.

La determinazione di tali indicazioni equivale al calcolo della f.e.m. indotta nelle spire con le direzioni indicate in Figura 8.7 ed in partico-

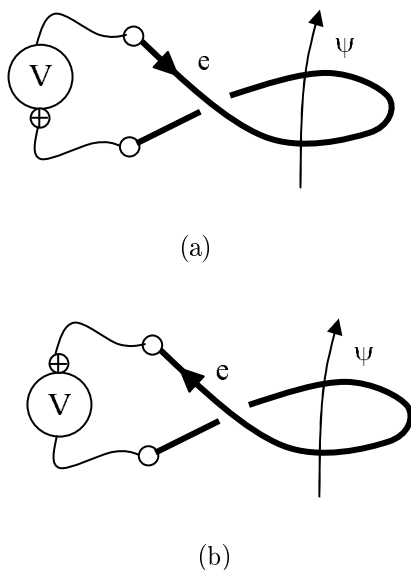


Figura 8.7: Spire elementari

lare si utilizzerà la relazione (8.4) nel caso di Figura 8.7a e la relazione (8.5) nel caso di Figura 8.7b.

$$e = -\frac{d\varphi}{dt} \quad (8.4)$$

$$e = \frac{d\varphi}{dt} \quad (8.5)$$

In generale, se il verso positivo della misura della f.e.m. coincide con il verso positivo per la misura di corrente individuato dalla regola del cavatappi, allora si dovrà utilizzare la (in questa pagina), viceversa la (8.5).

Si consideri ora il sistema rappresentato in Figura 8.8 costituito da una spira rotante a velocità angolare ω costante, immersa in un campo di induzione magnetica $\vec{B}(t)$ distribuito in maniera uniforme nello spazio, ma di modulo variabile nel tempo.

Il flusso concatenato con la spira può essere calcolato come indicato in (8.6), osservando che la direzione di \vec{B} rimane costante nel tempo (per ipotesi).

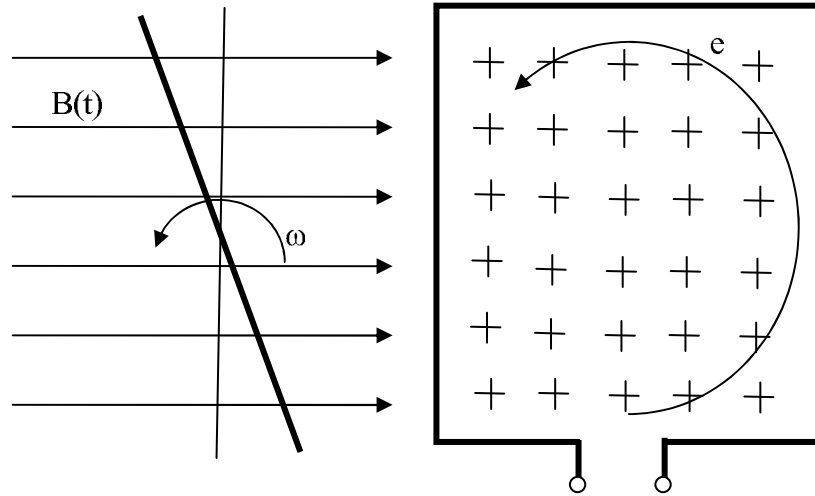


Figura 8.8: Spira rotante

$$\psi = \int_S \vec{B}(t) \cdot \vec{n} dS = B(t)S \cos(\omega t) \quad (8.6)$$

La f.e.m. indotta può essere dunque calcolata come indicato in (8.7).

$$e = \frac{d\psi}{dt} = \frac{dB}{dt} S \cos(\omega t) - \omega B S \sin(\omega t) = e_t + e_m \quad (8.7)$$

Analizzando la forma della (8.7) si può notare come la f.e.m. totale si componga da due termini: un termine e_t presente solo se il valore di B varia nel tempo ed un termine e_m presente solo se la velocità di rotazione della bobina non è nulla. Più in generale, la f.e.m. indotta in una bobina conviene scomporla in un termine e_t , che prende il nome di *f.e.m. trasformatorica*, dovuto a variazioni di flusso determinate da variazioni di intensità dei campi magnetici non imputabili a variazioni geometriche del sistema ed in un termine e_m , che prende il nome di *f.e.m. mozionale*, dovuto a variazioni di flusso imputabili a variazioni geometriche del sistema.

8.3 I circuiti magnetici

I legami espressi dalle (8.3) hanno validità solo nel caso in cui il rapporto ψ/i rimanga costante per ogni valore di flusso e corrente. Questa approssimazione è vera solo se il campo magnetico si svolge in materiali dalle caratteristiche opportune. In questo Paragrafo si analizzeranno i tipici materiali in cui si svolge il campo magnetico evidenziando le procedure che consentono il calcolo delle grandezze magnetiche.

Per studiare le proprietà magnetiche di un materiale conviene realizzare un provino della forma indicata in Figura 8.9, ottenuto per rotazione di un cerchio (o di un rettangolo) di raggio $r \ll R$ (lunghezza l) attorno ad un asse $n - n$. Sul provino si avvolgono poi N spire di materiale conduttore uniformemente serrate¹.

Se si alimenta l'avvolgimento con un generatore di tensione costante tale da iniettare una corrente I costante nell'avvolgimento, si può constatare che il campo magnetico è delimitato dalle pareti del toroide che costituisce dunque un tubo di flusso per il vettore induzione magnetica \vec{B} . All'interno del toroide le linee di forza del campo magnetico sono circonferenze con centro sull'asse di rotazione ed orientate secondo la legge del cavatappi ed il campo è con buona approssimazione uniforme (\vec{B} ha il medesimo modulo in qualsiasi punto del cerchio generatore del toroide).

8.3.1 Proprietà magnetiche dei materiali

Utilizzando il sistema descritto nel precedente paragrafo è possibile individuare alcune proprietà magnetiche intrinseche dei materiali. In base a tali proprietà si evidenziano le seguenti tipologie di materiali.

- I materiali non magnetici (*isolanti magnetici*) che presentano una caratteristica di magnetizzazione lineare, la cui pendenza è in pratica uguale per tutti i materiali di questa categoria e pari alla permeabilità magnetica dell'aria $\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7} [H/m]$, si veda Figura 8.10.

¹Un dispositivo di questo tipo prende il nome di *permeometro*.

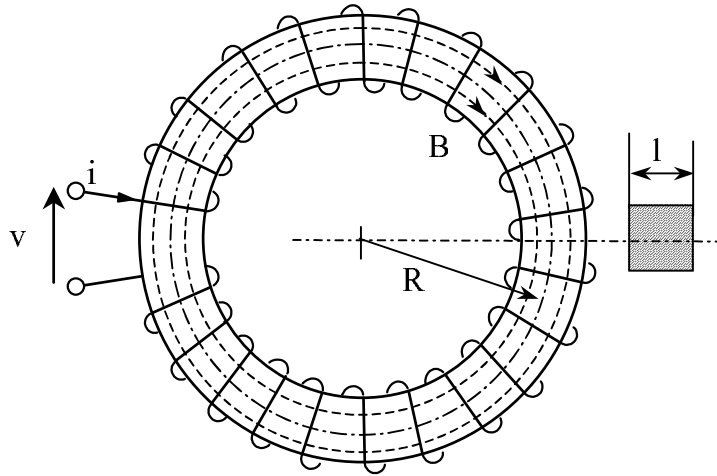


Figura 8.9: Provino di forma toroidale

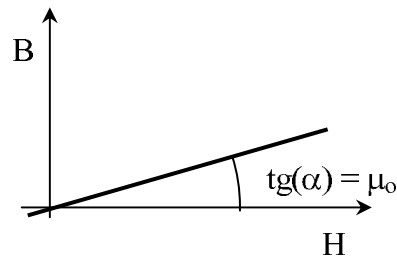


Figura 8.10: Caratteristica di magnetizzazione di un materiale non magnetico

- I materiali magnetici *teneri* che presentano una caratteristica di prima magnetizzazione che assume l'aspetto indicato in Figura 8.11. La permeabilità varia tra un valore massimo dell'ordine di $10^3 \div 10^4$ volte la permeabilità magnetica dell'aria μ_0 ed un valore asintotico minimo per $H \rightarrow \infty$ pari a μ_0 .
Per materiali di questo tipo se a partire da un qualsiasi punto di funzionamento B, H sulla caratteristica di prima magnetizzazione, si fa variare il campo magnetico tra $\pm H$ si trova che il punto di funzionamento si sposta dalla caratteristica di prima magnetizzazione descrivendo un ciclo di isteresi simmetrico i cui elementi caratteristici sono: la posizione dei vertici del ciclo, il punto di intersezione con l'asse delle ordinate che prende il nome di *induzione residua* (B_r) e il punto di intersezione con l'asse del-

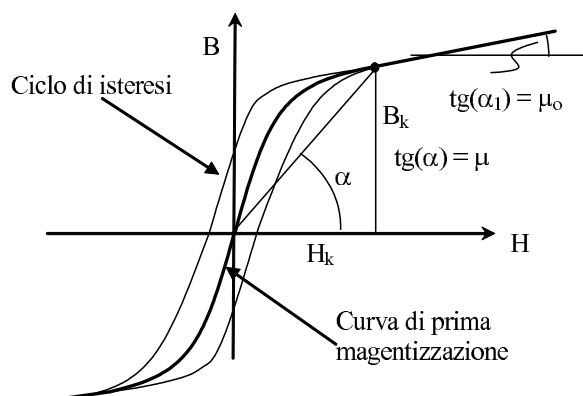


Figura 8.11: Cicli di isteresi di un materiale magnetico tenero

le ascisse che prende il nome di *forza magnetica coercitiva* H_c . Per i materiali magnetici teneri la forza coercitiva H_c è molto piccola e quindi l'area del ciclo di isteresi può essere trascurata ed approssimare la caratteristica di magnetizzazione con la caratteristica di prima magnetizzazione.

- I materiali magnetici *duri* che sono utilizzati principalmente per la costruzione dei magneti permanenti e che presentano un ciclo di isteresi come indicato in Figura, dove a differenza dei materiali teneri, i valori di B_r e H_c sono elevati ($B_r \approx \mu_o H_c \approx 1$ [T]). Per questi materiali la caratteristica nel primo e secondo quadrante è sostanzialmente rettilinea con coefficiente angolare pari a μ_o .

8.3.2 Reti magnetiche

I materiali magnetici teneri vengono solitamente lavorati in forma di fogli di superficie dell'ordine di qualche $[m^2]$ e spessori dell'ordine della frazione di $[mm]$. I fogli vengono poi tranciati in forme utili (lamierini) per poterli impilare e serrare fino a realizzare nuclei magnetici del tipo indicato nelle Figure .

Le configurazioni delle Figure 8.13-8.14 possono essere utilizzate per creare induttori reali le cui prestazioni sono individuate dalla caratteristica di magnetizzazione e cioè dalla curva che lega il flusso ϕ

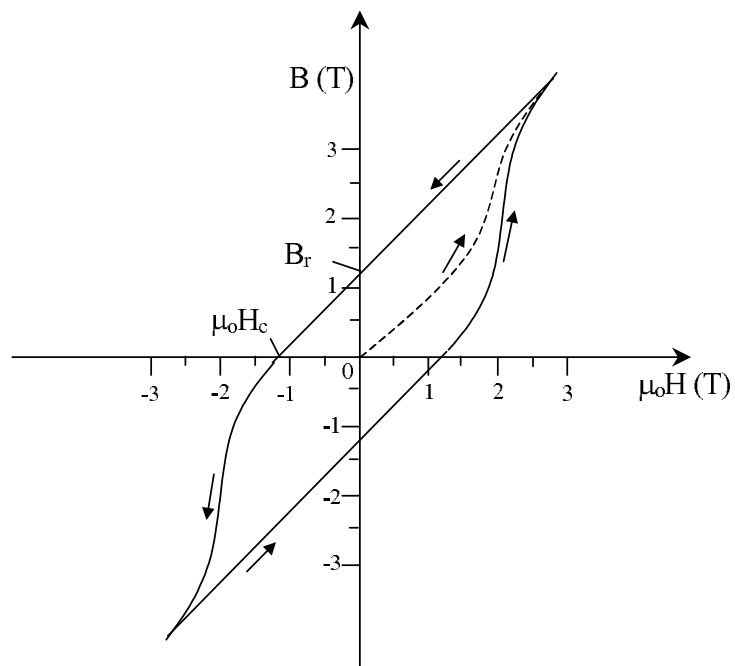


Figura 8.12: Cicli di isteresi di un materiale magnetico duro

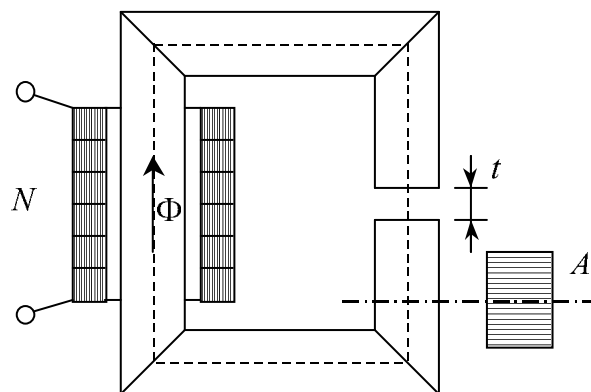


Figura 8.13: Induttore con nucleo a “colonna”

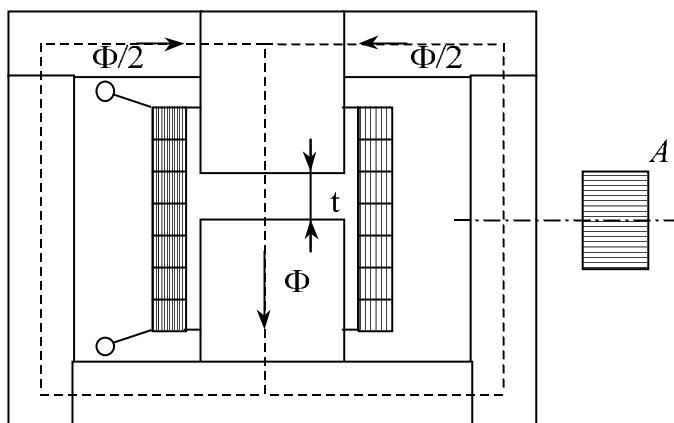


Figura 8.14: Induttore con nucleo a “mantello”

del vettore \vec{B} alla corrente I che circola nell'avvolgimento nell'ipotesi che l'induzione \vec{B} sia legata al campo magnetico \vec{H} dalla caratteristica di prima magnetizzazione. Normalmente tale calcolo viene eseguito, in prima approssimazione, assumendo che le linee di forza di \vec{B} siano chiuse attorno alla corrente che lo genera, orientate secondo la regola del cavatappi e limitate esclusivamente all'area dei materiali magnetici. La metodologia utilizzata nella determinazione di tale caratteristica di magnetizzazione richiede sicuramente la risoluzione di circuiti magnetici come quello indicato in Figura 8.15 con due obiettivi principali:

- individuare il flusso magnetico ϕ in ogni tronco e il lavoro del campo magnetico \vec{H} lungo l'asse dei singoli tronchi, quando sia assegnata una corrente I che percorra la bobina;
- individuare la corrente I necessaria a conseguire un determinato flusso all'interno del circuito.

Le leggi che si utilizzano nella risoluzione dei circuiti magnetici sono analoghe a quelle dei circuiti elettrici come viene nel seguito precisato.

- *Legge di Kirchhoff delle correnti magnetiche:* dal momento che le linee di forza di induzione magnetica \vec{B} sono chiuse, è nullo il

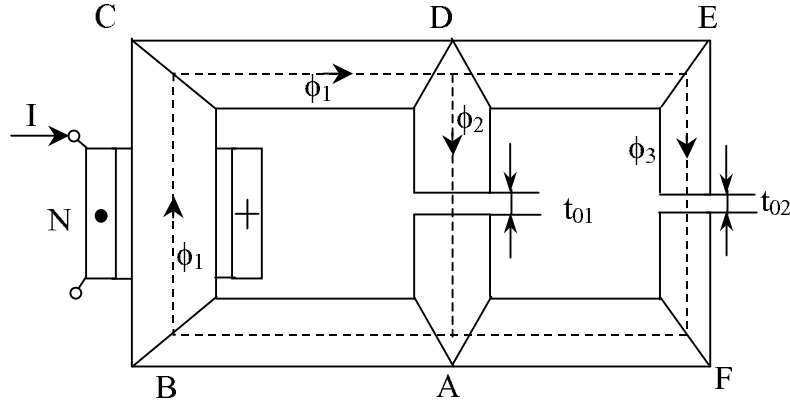


Figura 8.15: Circuito magnetico

flusso di \vec{B} attraverso una superficie chiusa S (*nodo magnetico*) come precisato dalla (8.8). La (8.8) può essere particolarizzata nella (8.9) dove si precisa che è nulla la somma dei flussi attraverso le superfici $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$ in cui può essere suddivisa la superficie S .

$$\int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (8.8)$$

$$\sum_k \psi_k = \sum_k \int_{\Sigma_k} \vec{B} \cdot \vec{n} d\Sigma_k = 0 \quad (8.9)$$

- *Legge di Kirchhoff delle tensioni magnetiche*: il lavoro del campo magnetico lungo una linea chiusa orientata L è pari alla somma delle correnti concatenate alla linea, si veda la (8.10). Se si definisce *tensione magnetica* il lavoro di \vec{H} lungo una linea aperta Γ , la stessa legge si enuncia dicendo che la somma delle tensioni magnetiche valutate sui successivi tratti di linea orientata $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ in cui può essere scomposta L è pari alla somma delle correnti concatenate come indicato in (8.11). Nel caso di una singola bobina, nell'ipotesi che sia percorsa da una corrente uniforme I , la corrente totale I_t può essere espressa in funzione del numero di spire N che la compongono, $I_t = NI$

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_k I_k = I_t \quad (8.10)$$

$$\sum_k U_k = \sum_k \int_{\Gamma_k} \vec{H} \cdot d\vec{l}_k = \sum_k I_k \quad (8.11)$$

- *Legame costitutivo*: per ogni tronco di tubo di flusso di area A (non direttamente concatenato ad una corrente elettrica, ad esempio il tronco DA nella Figura 8.15) vale la (8.12) dove Θ prende il nome di *riluttanza* del tronco (con unità di misura $[H^{-1}]$). L'inverso della riluttanza si chiama *permeanza* Λ e si misura in $[H]$.

$$\int_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = U = \int_{\Gamma} \frac{BA}{\mu A} dl = \phi \int_{\Gamma} \frac{1}{\mu A} dl = \phi \Theta \quad (8.12)$$

$$U = \Theta \phi \quad \Theta = \frac{1}{\mu} \frac{l}{A} \quad \Lambda = \frac{1}{\Theta} = \mu \frac{A}{l}$$

Per l'evidente analogia con le corrispettive relazioni elettriche, l'insieme dei legami magnetici evidenziati si può rappresentare con la rete di Figura 8.16, in cui le riluttanze sono state rappresentate con il medesimo simbolo delle resistenze, mentre la corrente elettrica totale $I_t = NI$ che genera i flussi magnetici è stata rappresentata con il simbolo di un generatore di tensione, in accordo con l'equazione (8.11). In prima approssimazione è possibile ridurre il circuito di Figura 8.16 nel circuito di Figura 8.17, trascurando le riluttanze dei tronchi in materiale ferromagnetico (considerando cioè $\mu_{fe} = \infty$).

La caratteristica di magnetizzazione $\phi(I_t)$ degli induttori rappresentati nelle Figure 8.13-8.14, può essere quindi ottenuta con la seguente procedura:

- Si fissa l'induzione B nel tronco in aria, si calcola il flusso $\phi = BA$ e la tensione magnetica $U_o = \Theta_o \phi$.
- L'induzione nei tronchi in ferro affacciati al traferro è (con buona approssimazione) la stessa di quella del tronco in aria per modo che si può ottenere il valore del campo magnetico $H = H(B)$ utilizzando la caratteristica di magnetizzazione del materiale.

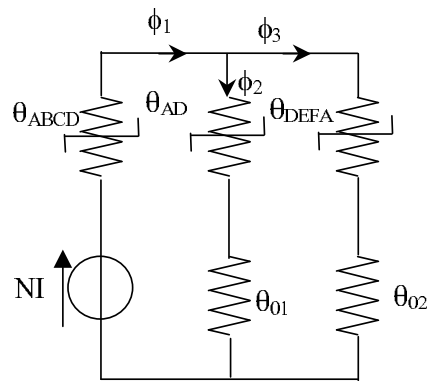


Figura 8.16: Rete magnetica equivalente del sistema di Figura 8.15

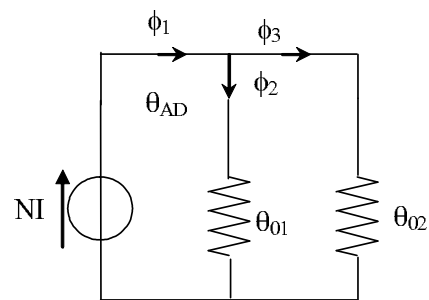


Figura 8.17: Rete magnetica semplificata

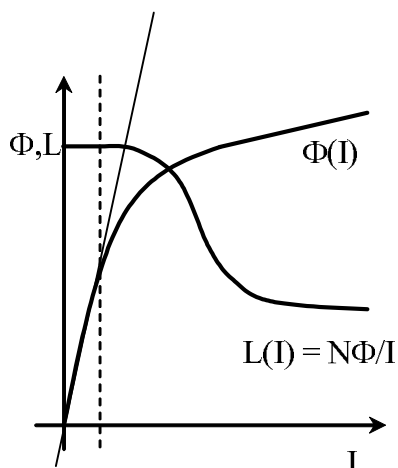


Figura 8.18: Caratteristica di magnetizzazione

- Si calcola la tensione magnetica $U_{fe} = \Theta_{fe}\phi$ dei tronchi in ferro.
- Si calcola la corrente totale $NI = U_{fe} + U_o$ necessaria a creare il flusso ϕ .

La caratteristica di magnetizzazione ottenuta presenta la forma indicata in Figura 8.18 in cui è stato rappresentato anche l'andamento del parametro induttanza $L = \phi(I)/I$.

8.4 Auto e mutue induttanze

Si consideri ora il circuito costituito da spire di materiale conduttore, quadrate di lato ortogonale al piano del foglio, tra loro sovrapposte con sezione trasversale mediana del tipo in Figura 8.19 e si vogliano studiare gli effetti reciproci che si manifestano quando le due bobine siano percorse da corrente. Come già accennato nel Paragrafo 8.2 il fenomeno può essere descritto introducendo i parametri di auto e mutua induttanza del sistema. In questo paragrafo saranno approfondite le procedure di calcolo di tali parametri e le loro proprietà.

Si supponga che gli avvolgimenti in questione siano posti in presenza di materiali magnetici a permeabilità costante e che sia alimentato solo la bobina N_1 . Questo avvolgimento, quando sia percorso

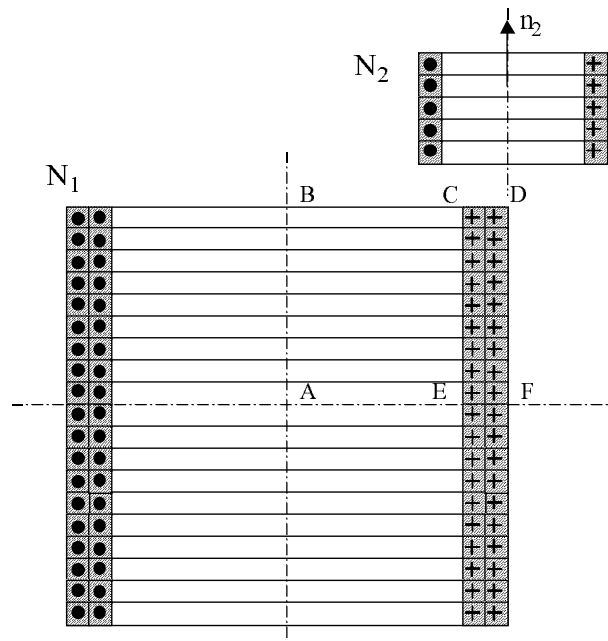


Figura 8.19: Le due bobine oggetto di studio

da una corrente (nel verso indicato in Figura 8.19), genera un campo di induzione magnetica \vec{B} le cui linee di forza possono essere valutate sperimentalmente o mediante integrazione delle equazioni di Maxwell del campo elettromagnetico. Ad esempio, per integrazione delle equazioni di Maxwell, si trova che le linee di forza del vettore \vec{B} , orientate secondo la regola del cavatappi, concatenano le correnti rispettando gli assi di simmetria del disegno con l'andamento evidenziato nella Figura 8.20 (il disegno, per ragioni di simmetria, è stato limitato ad un quarto della superficie di Figura 8.19).

Si considerino ora i tubi di flusso delimitati da due linee di forza successive e di altezza unitaria in direzione ortogonale al disegno: il flusso di tali tubi concatena in modo non uguale le diverse spire. Il flusso totale ψ_{11} concatenato con l'avvolgimento di N_1 spire e generato dalla corrente i_1 che le percorre (qui e nel seguito ci si riferirà nei calcoli alla unità di lunghezza della bobina in direzione ortogonale al foglio) si può calcolare come è indicato in (8.13) e cioè come somma estesa alle N_1 spire del flusso concatenato con la spira j -esima dell'avvolgimento 1. Si noti che nella (8.13) il flusso $\Delta\varphi_k$ del generico tubo

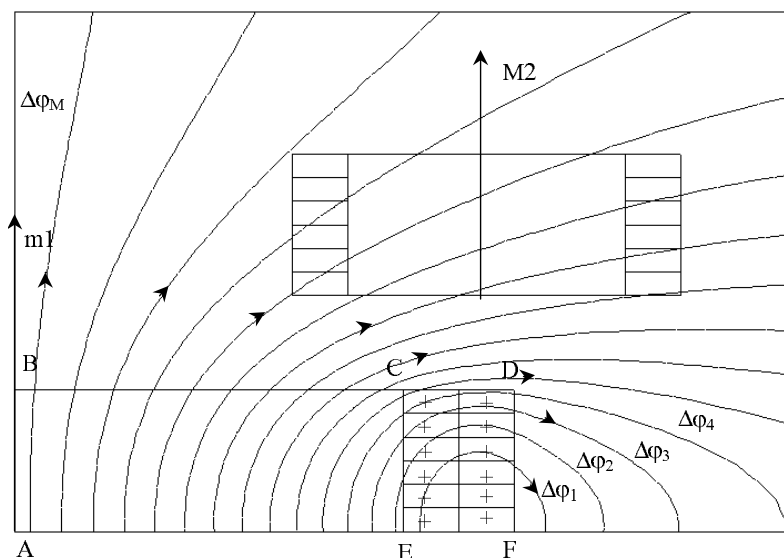


Figura 8.20: Andamento dei tubi di flusso

sarà presente in numero pari alle spire che il tubo stesso concatena (dalla definizione stessa di flusso concatenato). Un modo equivalente per esprimere il calcolo del flusso concatenato consiste, quindi, nel valutare per ogni tubo di flusso, il prodotto del flusso $\Delta\varphi_k$ del tubo per il numero di spire N_{k1} concatenate e nel sommare questi contributi tra di loro. Si ottiene dunque la relazione (8.14) in cui la sommatoria è estesa agli tubi di flusso presenti nel disegno del campo (il coefficiente moltiplicativo 2 ricorda che, appoggiandosi al disegno del campo di Figura 8.20, occorre considerare anche il contributo dei tubi a sinistra dell'asse di simmetria).

$$\psi_{11} = \sum_{j=1}^{N_1} \psi_{j1} \quad (8.13)$$

$$\psi_{11} = 2 \sum_k N_{1k} \Delta\varphi_k \quad (8.14)$$

Il calcolo espresso dalla (8.14) consente di raccordare il flusso concatenato alla corrente che percorre le spire dell'avvolgimento. Infatti, il flusso $\Delta\varphi_k$ in ogni tubo è correlato alla forza magnetomotrice $N_{1k}i_1$ che lo genera attraverso la relazione (8.15) in cui Θ_k è la riluttanza

del tubo di flusso. Sostituendo la (8.15) nella (8.14) si ottiene per il flusso concatenato la (8.16) che consente di dare alla nozione di autoinduttanza L_{11} il significato fisico indicato nella (8.17) e di precisare la nozione di permeanza equivalente Λ_{11} agli effetti del flusso concatenato. In effetti la (8.17) indica che eventuali concatenamenti parziali si traducono in opportune scalature delle riluttanze del tubo di flusso, mentre per il calcolo dell'autoinduttanza si ipotizza il concatenamento totale (la permeanza equivalente è infatti moltiplicata per N_1^2).

$$\Delta\varphi_k = \frac{N_{1k}i_1}{\Theta_k} \quad (8.15)$$

$$\psi_{11} = 2 \sum_k N_{k1} \frac{N_{k1}i_1}{\Theta_k} = i_1 2 \sum_k \frac{N_{k1}^2}{\Theta_k} = i_1 L_{11} \quad (8.16)$$

$$\begin{aligned} L_{11} &= \frac{\psi_{11}}{i_1} = 2 \sum_k \frac{N_{k1}^2}{\Theta_k} = 2 \frac{N_1^2}{N_1^2} \sum_k \frac{N_{k1}^2}{\Theta_k} \\ &= N_1^2 \sum_k 2 \left(\frac{N_{k1}}{N_1} \right)^2 \frac{1}{\Theta_k} = N_1^2 \Lambda_{11} \end{aligned} \quad (8.17)$$

Conviene osservare che l'autoinduttanza è un parametro (sempre positivo con i criteri di calcolo prima indicati) che dipende solo dalla geometria dell'avvolgimento e dalla permeabilità del mezzo in cui si svolge il campo.

La f.e.m. indotta nell'avvolgimento per effetto delle correnti che lo percorrono si può quindi scrivere (come già indicato in precedenza) nella forma corrispondente alla (8.18).

$$e_{11} = \frac{d\psi_{11}}{dt} = L_{11} \frac{di_1}{dt} \quad (8.18)$$

Si supponga ora di immergere un avvolgimento con numero di spire N_2 nel campo magnetico generato dal precedente avvolgimento e si convenga di misurare le correnti nel secondo avvolgimento positivamente come è indicato in Figura 8.19, si convenga ancora che la normale \vec{n}_2 alla superficie definita dal bordo della singola spira, sia

orientata come avanza la punta di un cavatappi che ruota secondo il verso convenzionale positivo della corrente e si misurino i flussi concatenati con la singola spira assumendo il verso della normale ora indicata. Avvalendosi del disegno di Figura 8.20, il calcolo del flusso ψ_{21} , concatenato con la bobina 2 e generato dalla corrente nella bobina 1, si conduce come è indicato nella (8.19) e cioè come sommatoria estesa alle spire del flusso concatenato con la singola spira dell'avvolgimento 2.

$$\psi_{21} = \sum_{j=1}^{N_2} \psi_{j2} \quad (8.19)$$

Anche in questo caso si può osservare che nella sommatoria il generico flusso $\Delta\psi_k$ del tubo k compare tante volte quante sono le spire del secondo avvolgimento N_{k2} abbracciate dal tubo stesso. Ne consegue che un secondo modo di calcolare il flusso concatenato ψ_{21} è quello indicato in (8.20) dove la sommatoria è estesa ai tubi di flusso generati dal primo avvolgimento che avvolgono almeno una spira del secondo avvolgimento. Se ora si considera il legame tra il flusso in un tubo e la forza magnetomotrice che agisce su tale tubo definito dalla riluttanza del tubo si perviene alla (8.21), in cui N_{k1} è il numero di spire del primo avvolgimento concatenate con il flusso $\Delta\varphi_k$, da cui si può definire la mutua induttanza L_{21} come è indicato in (8.21).

$$\psi_{21} = \sum_k N_{k2} \Delta\varphi_k \quad (8.20)$$

$$\psi_{21} = \sum_k N_{k2} \frac{N_{k1} i_1}{\Theta_k} = L_{21} i_1 \quad (8.21)$$

La mutua induttanza L_{21} si può elaborare come è indicato nella (8.22) in cui si è introdotta la permeanza equivalente Λ_{21} agli effetti della mutua induttanza. Anche la mutua induttanza è un parametro che dipende solo dalla geometria dei due avvolgimenti e dalla permeabilità del mezzo in cui si svolge il campo magnetico. Tale parametro, a differenza dell'autoinduttanza, può anche essere negativo: se infatti si fosse scelta per il secondo avvolgimento una convenzione di segno

delle correnti (e quindi per la normale alla superficie di ogni spira del secondo avvolgimento) opposta a quella indicata in Figura 8.19 allora i flussi $\Delta\varphi_k$ sarebbero stati negativi ed altrettanto sarebbe avvenuto per ψ_{21} .

$$L_{21} = \frac{\psi_{21}}{i_1} = N_1 N_2 \sum_k \frac{N_{k1} N_{k2}}{N_1 N_2} \frac{1}{\Theta_k} = N_1 N_2 \Lambda_{21} \quad (8.22)$$

La f.e.m. indotta dal campo generato dalla corrente i_1 nell'avvolgimento 2 si valuta a questo punto come è indicato nella (8.23).

$$e_{21} = \frac{d\psi_{21}}{dt} = L_{21} \frac{di_1}{dt} \quad (8.23)$$

Tutti i ragionamenti ora fatti nella ipotesi di alimentare l'avvolgimento 1 con la corrente i_1 lasciando aperto l'avvolgimento 2 si possono ripetere alimentando l'avvolgimento 2 con una corrente i_2 e lasciando aperto l'avvolgimento 1. In questo modo si può calcolare l'autoinduttanza L_{22} e la mutua induttanza L_{12} . Nell'ipotesi che il mezzo in cui si svolge il campo è normale, vale la sovrapposizione degli effetti e nel caso entrambi gli avvolgimenti fossero alimentati, i flussi concatenati totali ψ_1 e ψ_2 si possono calcolare in funzione delle correnti come è indicato nella (8.24), le correnti in funzione dei flussi come indicato in (8.25) e le f.e.m. indotte si possono poi valutare come è indicato nella (8.26).

$$\psi_1 = L_{11}i_1 + L_{12}i_2 \quad (8.24)$$

$$\psi_2 = L_{21}i_1 + L_{22}i_2$$

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{1}{H}(L_{22}\psi_1 - L_{21}\psi_2) \\ i_2 &= \frac{1}{H}(L_{11}\psi_2 - L_{12}\psi_1) \end{aligned} \quad H = L_1 L_2 - L_{12} L_{21} \quad (8.25)$$

$$\begin{aligned}
e_1 &= \frac{d\psi_1}{dt} = L_{11} \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt} \\
e_2 &= \frac{d\psi_2}{dt} = L_{21} \frac{di_1}{dt} + L_{22} \frac{di_2}{dt}
\end{aligned}
\tag{8.26}$$

Per quanto riguarda auto e mutue induttanze si possono evidenziare le seguenti proprietà:

- Reciprocità delle mutue induttanze, $L_{12} = L_{21} = M$.
- Il prodotto delle autoinduttanze è maggiore o al limite uguale al quadrato della mutua induttanza, $H = L_{11}L_{22} - M^2 \geq 0$

La prima proprietà si dimostra osservando che il mutuo induttore stabilisce un legame univoco tra i flussi concatenati ψ_1 , ψ_2 e le correnti i_1 , i_2 e che l'energia elettrica elementare entrante ai morsetti è accumulata nel campo sotto forma di energia magnetica. Tale energia elementare, quando la funzione sia intesa come funzione dei due flussi concatenati ψ_1 , ψ_2 , si deduce dalla (8.26) come è indicato nella (8.27), dove l'ultimo termine delle relazioni scritte non è nient'altro che la definizione del differenziale totale rispetto le due variabili ψ_1 e ψ_2 .

$$\begin{aligned}
dW_m(\psi_1, \psi_2) &= e_1 i_1 dt + e_2 i_2 dt = \\
&= i_1 d\psi_1 + i_2 d\psi_2 = \\
&= \frac{\partial W_m}{\partial \psi_1} d\psi_1 + \frac{\partial W_m}{\partial \psi_2} d\psi_2
\end{aligned}
\tag{8.27}$$

Dalla (8.27) si deduce che le correnti, intese come funzioni dei due flussi concatenati, rispondono alla (8.28).

$$i_1 = \frac{\partial W_m}{\partial \psi_1} \quad i_2 = \frac{\partial W_m}{\partial \psi_2}
\tag{8.28}$$

Dal momento che la funzione energia è continua e derivabile deve valere la proprietà indicata nella (8.29), da cui, utilizzando i legami espressi in (8.25), si ricava la (8.30) che dimostra la proprietà di reciprocità.

$$\frac{\partial i_1}{\partial \psi_2} = \frac{\partial^2 W_m}{\partial \psi_2 \partial \psi_1} = \frac{\partial^2 W_m}{\partial \psi_1 \partial \psi_2} = \frac{\partial i_2}{\partial \psi_1} \quad (8.29)$$

$$\frac{\partial i_1}{\partial \psi_2} = -\frac{L_{21}}{H} = \frac{\partial i_2}{\partial \psi_1} = -\frac{L_{12}}{H} \quad (8.30)$$

E' possibile a questo punto calcolare il differenziale dell'energia immagazzinata nel campo magnetico del mutuo induttore a partire dalle (8.24) e (8.27) come è indicato nella (8.31), da cui si deduce la funzione energia indicata nella (8.32).

$$\begin{aligned} dW_m &= i_1 d\psi_1 + i_2 d\psi_2 = \\ &= i_1(L_{11} di_1 + M di_2) + i_2(M di_1 + L_{22} di_2) = \\ &= d\left(\frac{1}{2}L_{11}i_1^2 + \frac{1}{2}L_{22}i_2^2 + Mi_1i_2\right) \end{aligned} \quad (8.31)$$

$$W_m = \frac{1}{2}L_{11}i_1^2 + \frac{1}{2}L_{22}i_2^2 + Mi_1i_2 \quad (8.32)$$

Per quanto riguarda infine il legame tra le autoinduttanze e la mutua induttanza questo si deduce dal fatto che l'energia è per sua natura una funzione positiva o al più nulla per qualsiasi coppia di valori di correnti i_1 , i_2 . Ora l'energia indicata nella si può anche descrivere con la funzione presentata nella (8.33).

$$W_m = \frac{1}{2}L_{11} \left(i_1 + \frac{M}{L_{11}}i_2\right)^2 + \frac{1}{2} \left(L_{22} - \frac{M^2}{L_{11}}\right) i_2^2 \quad (8.33)$$

$$L_{11}L_{22} - M^2 \geq 0 \quad h = \sqrt{\frac{M^2}{L_{11}L_{22}}} \leq 1 \quad (8.34)$$

Dal momento che il primo termine della (8.33) è sempre positivo o nullo altrettanto deve valere per il secondo termine, quindi deve esser soddisfatta la condizione indicata nella (8.34). La proprietà ora indicata si esprime dicendo che la quantità h , denominata *coefficiente di accoppiamento*, è minore o al limite uguale all'unità.

Capitolo 9

Sistemi elettromeccanici elementari

9.1 Forze e sforzi nel campo magnetico

Si consideri il sistema rappresentato in Figura 9.1; l'esperienza mostra che al termine del processo di magnetizzazione, che comporta lo stabilirsi di un flusso φ costante nel nucleo dell'elettromagnete di Figura 9.1, si manifesta una forza di attrazione costante tra le due ancore dell'elettromagnete. Tale forza è calcolabile agevolmente con riferimento alla ipotesi di alimentazione indicata in Figura 9.1 in cui si è supposto che l'ancora superiore sia fissa e che quella inferiore sia mobile, ma tenuta ferma da una forza esterna F .

Si supponga infatti di dare uno spostamento dx nel senso di avvicinare le due ancore in un tempo dt . A tale deformazione si accompagna una variazione della riluttanza del circuito magnetico, una variazione $d\varphi$ del flusso nel circuito magnetico (essendo imposta la forza magnetomotrice NI), una variazione del flusso concatenato $d\psi = Nd\varphi$ e quindi una forza elettromotrice $e = d\psi/dt$ legata alla corrente ed alla tensione ai morsetti del generatore, dalla (9.1).

$$v = RI + \frac{d\psi}{dt} = RI + \frac{d}{dt}(LI) = RI + I\frac{dL}{dt} \quad (9.1)$$

Le trasformazioni energetiche implicite nella (9.1) si evidenziano moltiplicando primo e secondo membro per $I dt$ come è indicato nella (9.2): l'energia elettrica entrante elementare $vI dt$ è pari alla somma

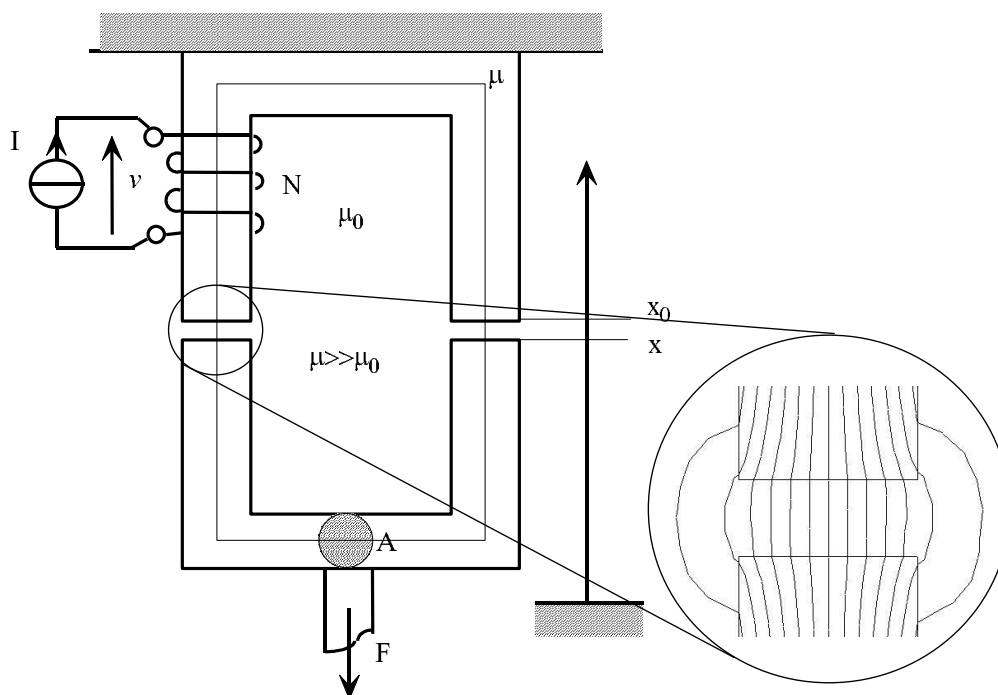


Figura 9.1: Calcolo della forza nel campo magnetico

del lavoro perduto $RI^2 dt$ e del lavoro ceduto ai sistemi interagenti con il circuito elettrico $I^2 dL$.

$$vI dt = RI^2 dt + I^2 dL \quad (9.2)$$

D'altra parte per il principio di conservazione dell'energia espresso in (9.3), il lavoro elementare ceduto ai sistemi fisici interagenti con il circuito elettrico deve eguagliare la somma dell'incremento di energia magnetica accumulata nel sistema dW_m e del lavoro meccanico elementare $F dx$ ceduto alla porta meccanica.

$$I^2 dL = dW_m + F dx \quad (9.3)$$

Dal momento che $W_m = LI^2/2$, per $I = \text{cost}$, si ricava per la forza l'espressione in (9.4)

$$F = \frac{I^2 dL - dW_m}{dx} = \frac{I^2 dL - I^2 dL/2}{dx} = \frac{1}{2} I^2 \frac{dL}{dx} \quad (9.4)$$

La legge dei circuiti magnetici indica poi che, trascurata la riluttanza dei tronchi in ferro rispetto a quella dei tronchi in aria Θ_o , la cui espressione ha la forma indicata in (9.5), si ottiene per la forza l'espressione (9.6).

$$\Theta_o = \frac{1}{\mu_0} \frac{2(x - x_o)}{A} \quad L = \frac{N^2}{\Theta_o} \quad (9.5)$$

$$F = \mu_0 \frac{(NI)^2}{4(x - x_o)^2} A \quad (9.6)$$

E' possibile ora introdurre nella (9.6) la grandezza specifica H_o (campo magnetico al traferro) osservando che, avendo trascurato la riluttanza dei tronchi in ferro, vale la (9.7), dove la linea chiusa di integrazione è l'asse del circuito magnetico tratteggiato in Figura 9.1. Evidenziando il valore H_o nella (9.6) come indicato in (9.8) si ricava infine l'espressione (9.9) che è di validità generale: lo sforzo di trazione (pressione) che si manifesta sul ferro posto alla superficie di separazione tra ferro e traferro (di area $2A$) è pari all'energia accumulata per unità di volume del traferro.

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = 2(x - x_o)H_o = NI \quad (9.7)$$

$$F = \mu_o \left(\frac{NI}{2(x - x_o)} \right)^2 A = \mu_o H_o^2 A \quad (9.8)$$

$$\sigma = \frac{F}{2A} = \frac{\mu_o H_o^2 A}{2A} = \mu_o \frac{H_o^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu_o} \quad (9.9)$$

Come ordine di grandezza il valore massimo di B che si riesce ad ottenere nei circuiti ferromagnetici è dell'ordine di 1 [T] (per effetto della saturazione dei tronchi in ferro), ne consegue che, essendo $\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7}$ [H/m], gli sforzi di trazione che si manifestano sono dell'ordine di $\sigma = 400$ [kN/m²]. In generale conviene ricordare che ogni tubo di flusso del campo magnetico si comporta come un elastico in stato di trazione con sforzo di trazione longitudinale e sforzi di compressione laterale (trasmessi dagli elastici contigui) pari all'energia per unità di volume.

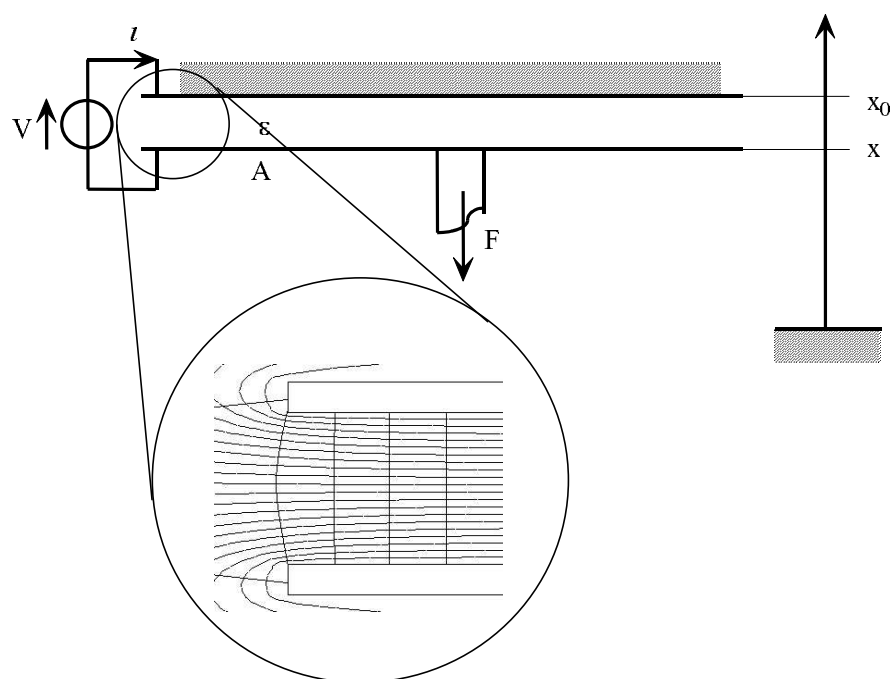


Figura 9.2: Calcolo della forza nel campo elettrico

9.2 Forze e sforzi nel campo elettrico

Le considerazioni che sono state fatte per l'elettromagnete generato dalle correnti di Figura 9.1 si possono ripetere per il sistema di Figura 9.2 (in tutte le manifestazioni induttore e condensatore sono tra loro duali ed il duale di energia e di pressione è ancora energia e pressione). Si nota anche in questo caso che, tenendo ferma l'armatura superiore, quella inferiore è soggetta ad una forza F che tende ad avvicinarla a quella superiore. Il calcolo della forza si esegue con le stesse modalità viste per il caso di Figura 9.1 pur di sostituire ad ogni parola quella duale (energia magnetica/energia elettrica; induttanza/capacità; tensione magnetica/tensione elettrica; forza magnetica/forza elettrica; induzione magnetica/induzione dielettrica). Ne consegue che nel campo elettrico gli elastici di Faraday sono sottoposti allo sforzo di trazione indicato nella (9.10).

Gli sforzi realizzabili nel campo elettrico dipendono dalle limitazioni imposte dai materiali. In particolare occorre limitare il campo

elettrico allo scopo di evitare scariche elettriche tra gli elettrodi distruttive per il materiale isolante interposto tra gli elettrodi stessi (è limitata la rigidità dielettrica degli isolanti E_M). Come ordine di grandezza $E_M \approx 10^7$ [V/m]; essendo poi $\epsilon_0 \approx 10^{-11}$ [F/m], ne consegue che gli sforzi realizzabili nel campo elettrico sono dell'ordine di $\sigma \approx 0.5$ [kN/m²], nettamente inferiori al caso del campo elettromagnetico. Per questo motivo le macchine elettriche verranno impostate nel senso di sfruttare le forze e gli sforzi che si manifestano quando si generino degli elettromagneti.

$$\sigma = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{D^2}{2\epsilon_0} \quad (9.10)$$

9.3 La conversione elettromeccanica dell'energia

Si consideri il circuito di Figura 9.3, costituito da due binari metallici fissi sui quali può scorrere, idealmente senza attrito, un conduttore mobile, non deformabile, azionato da un motore in grado di imprimergli la velocità con il verso indicato in Figura 9.3. Nell'ipotesi che il circuito sia immerso in un campo magnetico e che l'induzione magnetica \vec{B} sia in modulo costante e diretta ortogonalmente al piano del disegno dall'alto verso il basso. Per effetto del movimento, il circuito concatena un flusso crescente nel tempo ed è quindi sede di una f.e.m. misurata positivamente dal voltmetro V.

La legge dell'induzione elettromagnetica consente di calcolare la f.e.m. indotta e pur di eseguire la derivata indicata nella (9.12). Per eseguire tale derivata, si veda la Figura 9.4, si considerino le configurazioni assunte dal circuito al tempo t ed al tempo $t + \Delta t$ e si indichi con $\Sigma_1 = ABCD$ la superficie che individua il flusso concatenato al tempo t , con $\Sigma_2 = ABC'D'$ quella al tempo $t + \Delta t$ e con $\Sigma_3 = CDC'D'$ la differenza tra tali superfici. Il calcolo della derivata comporta il limite indicato nella (9.13), dove la normale \vec{n} alle superfici Σ è orientata come \vec{B} . Ora poichè per ipotesi il campo di induzione magnetica è indipendente dal tempo valgono le ugaglianze indicate in (9.11) e ne consegue la relazione indicata in (9.15). Se ora

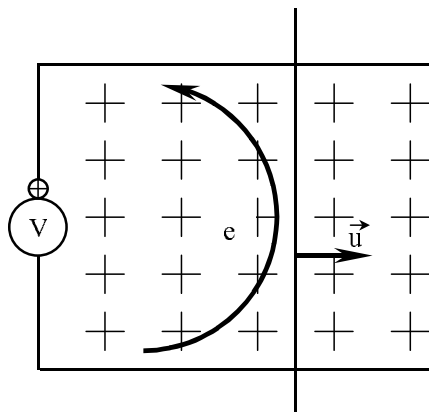


Figura 9.3: Circuito elementare per la conversione elettromeccanica dell'energia

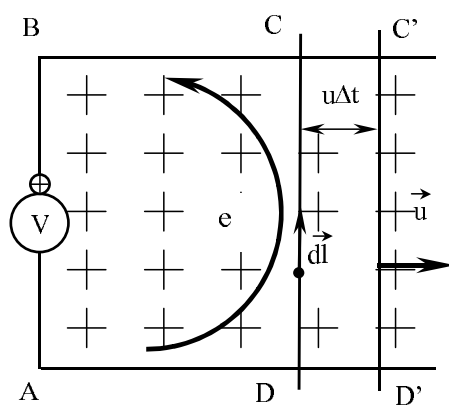


Figura 9.4: Calcolo della f.e.m.

si orienta il versore della linea costituita dal conduttore mobile nel verso della f.e.m. allora $\vec{n}d\Sigma_3 = d\vec{l} \wedge \vec{u}\Delta t$, ed è così possibile trasformare l'integrale di superficie in integrale di linea come è evidenziato in (9.16).

$$\vec{B}(t + \Delta t) = \vec{B}(t) = \vec{B} \quad (9.11)$$

$$e = \frac{d\psi}{dt} = \quad (9.12)$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{\Sigma_2} \vec{B}(t + \Delta t) \cdot \vec{n}d\Sigma - \int_{\Sigma_1} \vec{B}(t) \cdot \vec{n}d\Sigma \right] = \quad (9.13)$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{\Sigma_2} \vec{B} \cdot \vec{n}d\Sigma - \int_{\Sigma_1} \vec{B} \cdot \vec{n}d\Sigma \right] = \quad (9.14)$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Sigma_3} \vec{B} \cdot \vec{n}d\Sigma \quad (9.15)$$

$$e = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Sigma_3} \vec{B} \cdot \vec{n}d\Sigma = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Sigma_3} \vec{B} \cdot d\vec{l} \wedge \vec{u}\Delta t \quad (9.16)$$

Dal momento che per il prodotto vettoriale misto vale la proprietà indicata in (9.17), si perviene alla formulazione particolarmente utile per le applicazioni presentata in (9.18) valida per il calcolo della f.e.m di un conduttore di lunghezza l in moto a velocità \vec{u} costante in un campo di induzione magnetica \vec{B} stazionario nel tempo e diretto ortogonalmente al conduttore.

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} \wedge \vec{u} = \vec{u} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{l} \quad (9.17)$$

$$e = \int_l \vec{u} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{l} = Blu \quad (9.18)$$

Il risultato precisato in (9.18) può esser utilmente memorizzato con la regola delle tre dita della mano destra: posto il pollice come la velocità e l'indice come l'induzione, il medio dà il verso della f.e.m. di valore $e = Blu$, si veda la Figura 9.5.

Si supponga ora di collegare ai morsetti AB del circuito di Figura 9.4 un resistore di resistenza R , si veda la Figura 9.6. In questo

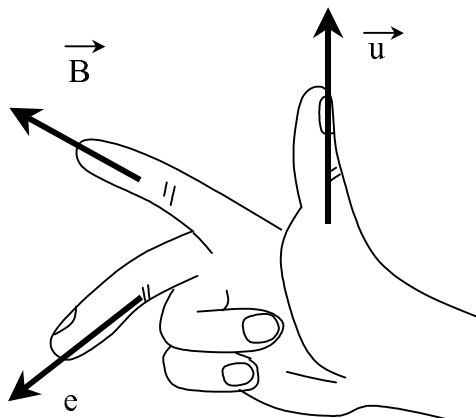


Figura 9.5: Regola della mano destra

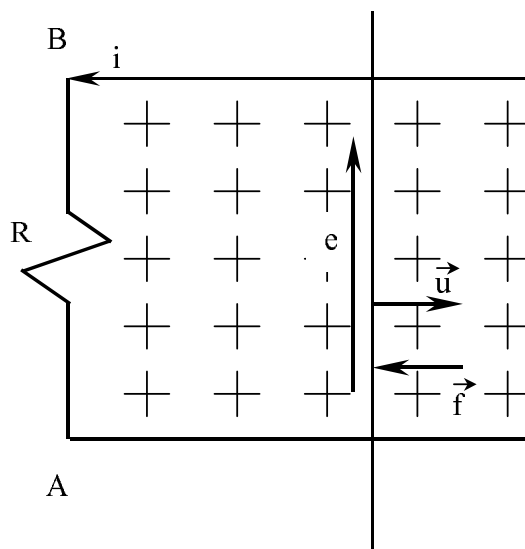


Figura 9.6: Generatore elettrico elementare

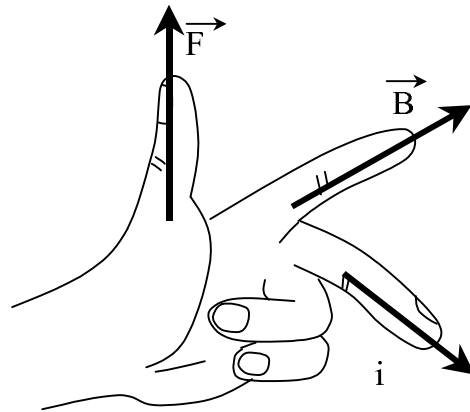


Figura 9.7: Regola della mano sinistra

caso circolerà nel circuito una corrente $i = e/R$ e vi sarà una potenza p dissipata costante pari a $p = ei = Ri^2$. Dal momento che il campo magnetico è stazionario e che nel circuito elettrico non vi è alcuna sorgente energetica tutta la potenza in questione dovrà derivare dal motore meccanico che tiene in movimento il conduttore. Questo comporta che appena si instaura la corrente i , in base al principio di conservazione dell'energia, il sistema elettrico dovrà presentare all'albero del sistema meccanico interagente una forza \vec{f} che si oppone al movimento e che il sistema meccanico, per mantenere invariata la velocità, sviluppi una forza uguale ed opposta tale da soddisfare la (9.19). Ne consegue per la forza l'espressione riportata in (9.20) che può esser utilmente memorizzata con la così detta regola delle tre dita della mano sinistra: posto l'indice indice come l'induzione ed il medio come la corrente, il pollice dà la direzione della forza che il sistema elettrico applica al sistema meccanico interagente, il cui modulo è $f = Bli$, si veda la Figura 9.7.

$$ei = Blui = Ri^2 = fu \quad (9.19)$$

$$f = Bli \quad (9.20)$$

La macchina ora individuata (generatore elettrico ideale o convertitore elettromeccanico ideale) è perfettamente reversibile. Si supponga

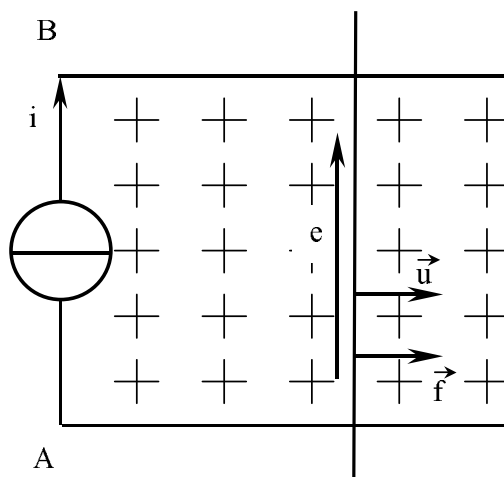


Figura 9.8: Motore elettrico elementare

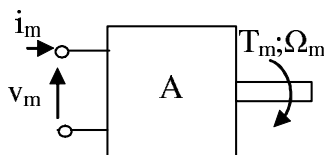


Figura 9.9: Schema attuatore ideale

infatti di alimentare il circuito collegando ai morsetti AB un generatore ideale che eroga una corrente I costante come è indicato in Figura 9.8 (positiva quindi se misurata in senso opposto a quello del caso precedente). In questo caso la potenza è di segno opposto rispetto al caso precedente e, per la conservazione dell'energia, questo richiede che, a velocità costante, si sia invertita la forza che il conduttore mobile applica al sistema meccanico interagente. Si è quindi realizzato un motore elettrico che imprime al sistema meccanico una forza nella direzione della velocità rispettando le precedenti equazioni.

Complessivamente il convertitore elettromeccanico ora individuato e quelli che se ne deducono (a simmetria cilindrica o a disposizione lineare nel piano, come in Figura 9.8) è un doppio bipolo dotato di una porta elettrica alla quale sono misurabili corrente e forza elettromotrice e di una porta meccanica alla quale sono misurabili forza (coppia

Tabella 9.1: Legami attuatore ideale

Macchine lineari	Macchine rotanti
$e = ku$	$e = k\omega$
$f = ki$	$T = ki$

nelle macchine a simmetria cilindrica) e velocità lineare (velocità angolare), si veda la Figura 9.9. Le equazioni che legano le grandezze tra loro sono quelle individuate nella Tabella 9.1, che possono essere facilmente dedotte dalla (9.20) e (9.18).

Capitolo 10

Sistemi analoghi

10.1 Introduzione

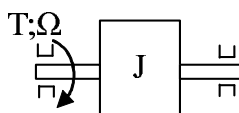
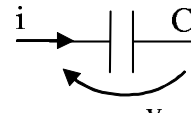
Tra scienze diverse si possono stabilire analogie, quando si riscontra che fenomeni diversi sono descrivibili con modelli matematici che hanno la stessa struttura. Utili analogie, ad esempio, si possono riscontrare tra i legami evidenziati dalla connessione di bipoli elettrici e sistemi meccanici ideali a parametri concentrati oppure tra reti elettriche e equazioni di scambio del calore.

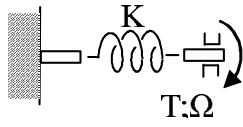
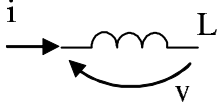
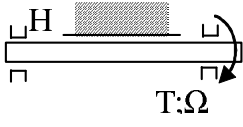
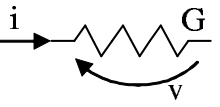
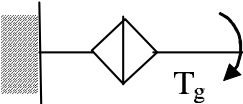
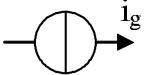
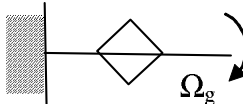
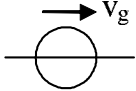
10.2 Analogie meccaniche-elettriche

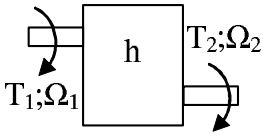
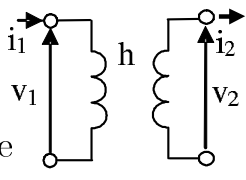
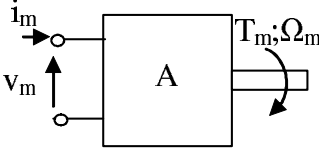
Nello studio delle proprietà di analogia tra sistemi elettrici e meccanici, l'attenzione sarà concentrata esclusivamente su sistemi meccanici in moto rotatorio, in quanto i più diffusi attuatori elettrici sono di tipo rotatorio. In particolare, si possono introdurre i seguenti bipoli e doppi bipoli meccanici ideali (i bipoli e doppi bipoli meccanici ideali sono caratterizzati da un legame costitutivo che lega la coppia T alla velocità angolare Ω ai loro morsetti), per la simbologia si veda la Tabella 10.1, prime due colonne.

- momento di inerzia: $T = J \frac{d\Omega}{dt}$
- molla elicoidale: $\Omega = K \frac{dT}{dt}$
- smorzatore viscoso: $T = H\Omega$
- generatore ideale di coppia: $T = T_g \quad \forall \Omega$
- generatore ideale di velocità: $\Omega = \Omega_g \quad \forall T$
- riduttore ad ingranaggi: $\Omega_1/\Omega_2 = T_2/T_1 = h$
- motore elettrico ideale: $v_m i_m = T\Omega$ ed inoltre
 $v_m = k\Omega$ e $T = k i_m$

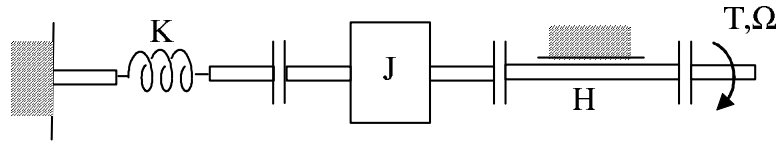
Tabella 10.1: Analogie Elettromeccaniche

Bipolo meccanico	Legame costitutivo	Bipolo elettrico	Legame costitutivo
Momento di inerzia	 $T = Jp\Omega$	Condensatore	 $i = Cp v$

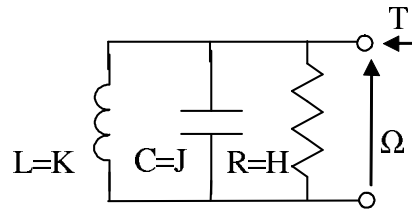
<p>Molla elicoidale</p>	 <p>$\Omega = KpT$</p>	<p>Induttore</p>	 <p>$v = Lpi$</p>
<p>Smorzatore viscoso</p>	 <p>$T = H\Omega$</p>	<p>Conduttore</p>	 <p>$i = Gv$</p>
<p>Generatore di coppia</p>	 <p>$T_g = \text{cost}$</p>	<p>Generatore di corrente</p>	 <p>$i_g = \text{cost}$</p>
<p>Generatore di angolare</p>	 <p>$\Omega_g = \text{cost}$</p>	<p>Generatore di tensione</p>	 <p>$v_g = \text{cost}$</p>

<p>Riduttore di velocità</p>	 $\Omega_1/\Omega_2 = T_2/T_1 = h$	<p>Transformatore ideale</p>	 $v_1/v_2 = i_2/i_1 = h$
<p>Attuatore Ideale</p>		 $v_m i_m = T_m \Omega_m$ $T_m = k i_m \quad v_m = k \Omega_m$	

La catena cinematica può essere così rappresentata, una volta assegnato ad ogni bipolo il corrispondente simbolo, mediante un grafo connesso in cui ad ogni nodo è assegnata una velocità angolare (relativa a quella del nodo di riferimento) e ad ogni ramo una coppia. In base alle leggi di equilibrio delle coppie e di continuità del moto, valgono per i circuiti meccanici le leggi di Kirchhoff ai nodi ed alle maglie: la somma delle coppie che agiscono in ogni nodo è nulla e la somma degli incrementi di velocità lungo una maglia è nulla. E' evidente a questo punto che introducendo i bipoli elettrici analoghi a quelli meccanici indicati nell'ultima colonna della Tabella 10.1 si potrà studiare il circuito meccanico avvalendosi del circuito elettrico analogo con il vantaggio di estendere ai circuiti meccanici tutte le metodologie delle reti elettriche. Si noti che l'analogia vale anche



(a) meccanico



(b) elettrico

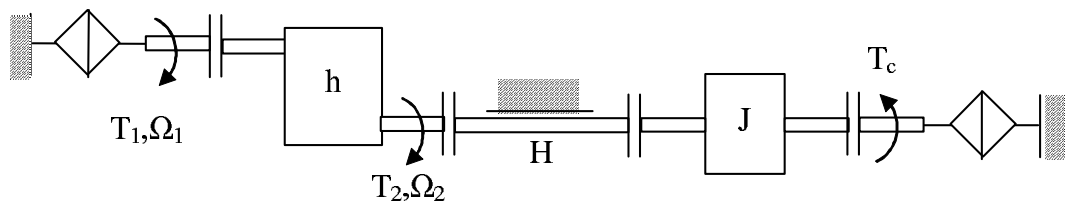
Figura 10.1: Circuiti analoghi

per il moto lineare con le seguenti sostituzioni: coppia/forza; velocità angolare/lineare; momento di inerzia/massa; molla elicoidale/lineare; generatore di coppia/forza; generatore di velocità angolare/lineare. Si ricorda infine che le proprietà di dualità dei circuiti elettrici valgono anche per quelli meccanici per modo che esiste anche l'analogia duale coppia/tensione, velocità/corrente che qui non viene discussa.

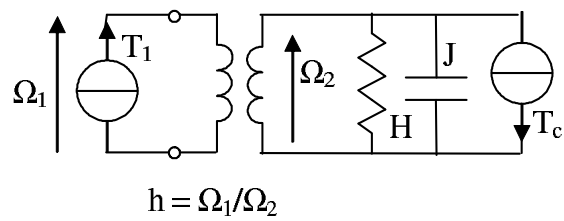
Vengono nel seguito riportati alcuni esempi del procedimento proposto atti a ribadire l'utilità della analogia ora istituita. Per il circuito meccanico riportato nella Figura 10.1a vale l'equazione del moto indicata nella (10.1) ed il circuito elettrico analogo di Figura 10.1b.

$$T = J \frac{d\Omega}{dt} + \frac{1}{K} \int_0^t \Omega dt + H\Omega \quad (10.1)$$

Per il circuito di Figura 10.2a vale l'equazione (10.2), dal quale riportando tutte le grandezze a monte del riduttore si deduce l'equazione (10.3) ed il circuito analogo di Figura 10.2b.

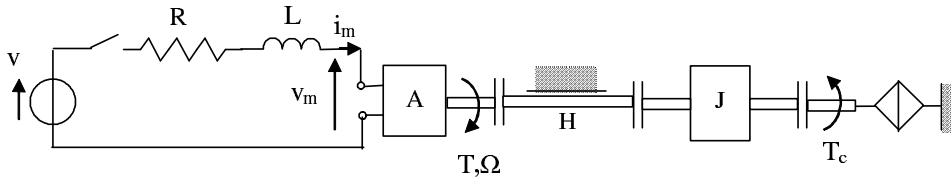


(a) meccanico

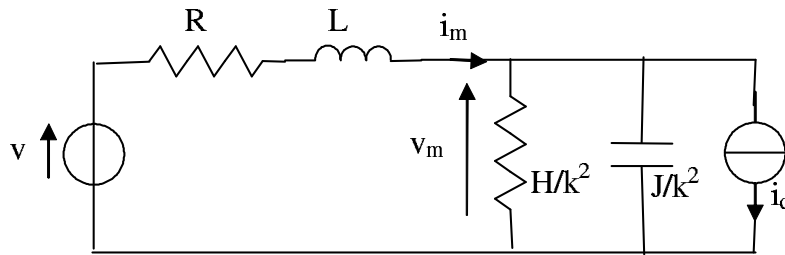


(b) elettrico

Figura 10.2: Circuiti analoghi



(a) meccanico



(b) elettrico

Figura 10.3: Circuiti analoghi

$$T_2 = hT_1 = H\Omega_2 + J \frac{d\Omega_2}{dt} + T_c \quad (10.2)$$

$$T_1 = \frac{H}{h^2}\Omega_1 + \frac{J}{h^2} \frac{d\Omega_1}{dt} + \frac{T_c}{h} \quad (10.3)$$

Per il circuito di Figura 10.3a valgono le equazioni (10.4) ed il circuito analogo di Figura 10.3b che consente di studiare il sistema elettromeccanico con le equazioni (10.5) tramite la variabile ausiliaria $i_c = T_c/k$.

$$v = Ri + L \frac{di}{dt} + v_m \quad v_m = k\Omega \quad (10.4)$$

$$T = H\Omega + J \frac{d\Omega}{dt} + T_c \quad T = ki \quad T_c = ki_c$$

$$v = Ri_m + L \frac{di_m}{dt} + v_m \quad (10.5)$$

$$ki_m = H \frac{v_m}{k} + \frac{J}{k} \frac{dv_m}{dt} + ki_c$$

10.3 Analogie termiche-elettriche

Durante il funzionamento di una macchina elettrica, i fenomeni legati alla conversione dell'energia determina la trasformazione di una frazione dell'energia elaborata dalla macchina in calore. Questa trasformazione ha luogo nella massa stessa dei materiali (prevalentemente rame e ferro) e ne provoca il riscaldamento. D'altra parte la necessità di mantenere l'intera macchina e principalmente gli isolanti, entro determinati limiti di temperatura richiede uno studio del comportamento termico della macchina al fine di approntare un adeguato sistema di raffreddamento.

Se si considera una parte di materiale attivo (rame o ferro), sede di perdite uniformemente distribuite nella massa e sufficientemente piccola da essere considerata isoterma, indicato con P_p la potenza persa in un intervallo di tempo dt , l'energia trasformata in calore all'interno dell'elemento in questione è legata alla temperatura θ della parte dall'equazione differenziale (10.6).

$$Pdt = \underbrace{cmd\theta}_{\text{accumulo}} + \underbrace{KA\theta dt}_{\text{scambio}} = Cd\theta + G\theta dt \quad P = C \frac{d\theta}{dt} + G\theta \quad (10.6)$$

Nell'equazione (10.6) si possono distinguere due termini.

- Il termine $cmd\theta$, che rappresenta la parte di energia persa che viene accumulata all'interno del corpo, legata attraverso il calore specifico c e alla massa m alla variazione di temperatura $d\theta$; il prodotto cm prende il nome di *capacità termica*.
- Il termine $KA\theta$, che rappresenta la quota parte di energia che viene ceduta all'ambiente, trovandosi il corpo ad una tempera-

tura più elevata ed è legata attraverso il coefficiente di scambio termico K e all'area di scambio A alla temperatura del corpo; il prodotto KA prende il nome di *conduttanza termica*.

$$i = C \frac{dv}{dt} + Gv \quad (10.7)$$

L'equazione (10.6) è formalmente identica all'equazione elettrica (10.7) ed è quindi possibile istituire una analogia tra le seguenti grandezze:

Potenza persa \rightarrow corrente
 Temperatura \rightarrow tensione
 Capacità termica \rightarrow capacità elettrica
 Conduttanza termica \rightarrow conduttanza elettrica

Attraverso l'analogia introdotta si può rappresentare il comportamento termico dell'elemento attraverso un'opportuna rete elettrica.

Al fine di sottolineare ancora una volta l'utilità dell'analogia introdotta, si consideri il caso di un corpo omogeneo, sede di perdite uniformemente distribuite nella massa, immerso in un fluido che scambia calore con l'ambiente. Un esempio di sistema che può essere modellato in prima approssimazione in questo modo è costituito da un trasformatore in cui si considerino conglobati i materiali attivi (rame e ferro), immerso in olio a raffreddamento naturale con l'ambiente.

In maniera schematica si può rappresentare questo sistema come indicato in Figura 10.4.

Nel sistema in esame si verificheranno dunque i seguenti fenomeni:

- il corpo sede di perdite si scalda e immagazzina calore, cedendo parte dell'energia al fluido;
- il fluido si scalda ed immagazzina calore, cedendo parte dell'energia all'ambiente.

Sfruttando l'analogia termica-elettrica, un corpo isotermico costituisce un nodo di una rete elettrica. E' quindi possibile determinare la rete elettrica analoga, individuando un nodo per ogni elemento di

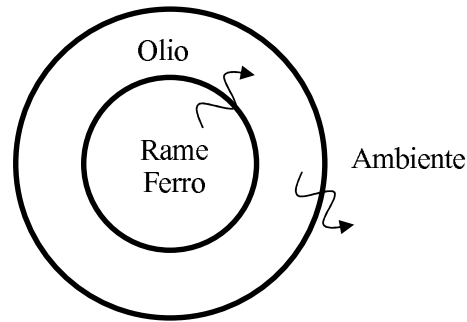


Figura 10.4: Rappresentazione schematica del sistema termico in esame

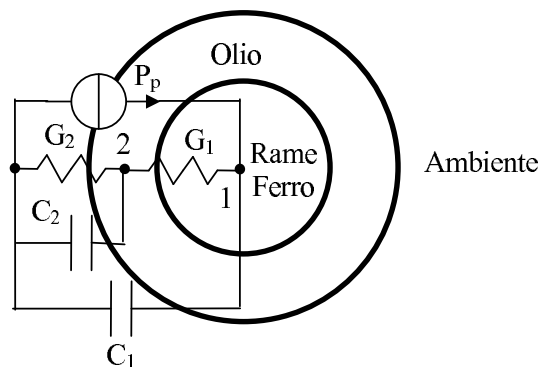


Figura 10.5: Individuazione della rete termica

Figura 10.4, inserendo un'opportuna resistenza termica tra i nodi che scambiano calore, una capacità termica tra il nodo e l'ambiente ed un generatore di corrente (potenza termica) tra il nodo che rappresenta i materiali attivi e l'ambiente. La rete che si ottiene è rappresentata in Figura 10.5.

La soluzione del circuito rappresentato in Figura 10.5 è individuata da una equazione differenziale del secondo ordine che può essere facilmente risolta. I valori di sovratemperatura di regime si ottengono immediatamente come indicato in (10.8) (a regime i condensatori sono dei circuiti aperti).

$$\theta_1 = P_p \frac{G_1 + G_2}{G_1 G_2} \quad \theta_2 = \frac{P_p}{G_2} \quad (10.8)$$

Capitolo 11

Il trasformatore

11.1 La nascita del trasformatore

Nella pagina del diario di laboratorio del 29 Agosto 1831 M. Faraday riporta il disegno di una macchina da lui costruita avvolgendo due circuiti elettrici A,B tra di loro isolati su un nucleo toroidale realizzato con filo di ferro. Egli annota che, al momento in cui si alimenta il circuito A con una batteria, nel circuito B, chiuso su un galvanometro, si manifesta corrente. Dal momento che i due circuiti hanno in comune solo il campo magnetico la conclusione è che il magnetismo genera elettricità, così come l'elettricità genera magnetismo. Il primo trasformatore nasceva così presso il laboratori della Royal Institution come pietra di fondazione dell'elettromagnetismo applicato (elettrotecnica) all'utilità umana.

11.2 Trasformatori ideali

Si definisce trasformatore ideale una macchina elettrica che consente di modificare i fattori (tensione e corrente) della potenza elettrica istantanea senza alterarne il prodotto. La definizione prospetta un doppio bipolo, si veda la Figura 11.1, per il quale valgono le relazioni (11.1) dove K prende il nome di rapporto di trasformazione.

$$v_1 i_1 + v_2 i_2 = 0 \quad \frac{v_1}{v_2} = K = -\frac{i_1}{i_2} \quad (11.1)$$

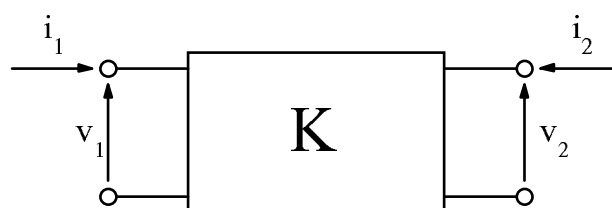


Figura 11.1: Il trasformatore ideale

Il risultato indicato dalla (11.1) è di fondamentale interesse industriale perché, al momento della utilizzazione, conviene, per ragioni di sicurezza, che l'energia sia disponibile ad un livello convenientemente basso di tensione, mentre, quando occorre trasferirla a distanza, è opportuno, al fine di contenere i costi di costruzione e di gestione, le perdite e le variazioni di tensione, che il livello della tensione sia opportunamente elevato. Nel seguito si vedrà come realizzare tale dispositivo ideale (non è possibile, infatti, eseguire alcuna trasformazione energetica senza perdite) perché questo tipo di analisi è di guida quando occorre approssimare l'ideale con dispositivi tecnicamente fattibili.

Si supponga, quindi, di disporre di un materiale magnetico che: i) non sia sede di perdite in presenza di un campo magnetico variabile nel tempo e ii) presenti una permeabilità al limite infinita. Si sagomi questo materiale nel senso di costituire un nucleo toroidale attorno al quale si disponga un avvolgimento, uniformemente distribuito, di numero di spire N_1 realizzato con un materiale conduttore di resistività al limite nulla, si veda la Figura 11.2.

Se ora si alimenta tale avvolgimento con un generatore ideale di tensione v_1 variabile nel tempo, in base alla legge dell'induzione elettromagnetica l'avvolgimento concatenerà un flusso ψ_1 legato alla tensione dalla relazione (11.2). Dal momento che il campo magnetico all'esterno del nucleo è nullo, indicato con φ il flusso nel nucleo (che risulta concatenato con ciascuna delle N_1 spire) si ha che $\psi_1 = N_1\varphi$ per modo che il flusso e la tensione sono legati dalla (11.3). L'avvolgimento che, grazie al generatore ideale, impone il flusso φ nel nucleo viene denominato primario.

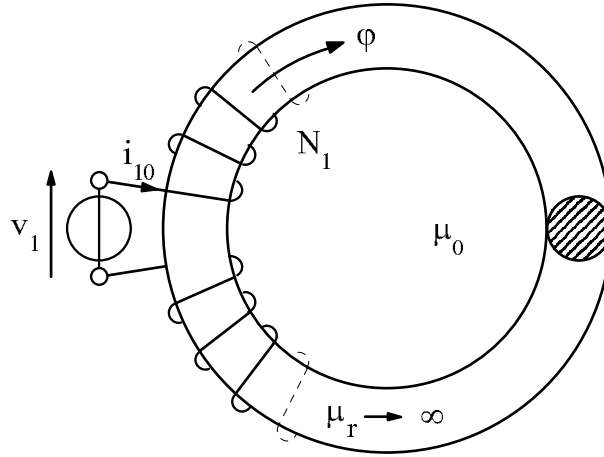


Figura 11.2: La struttura toroidale proposta da Faraday

$$v_1 = \frac{d\psi_1}{dt} \quad v_1 dt = N_1 d\varphi \quad (11.2)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \int_0^t \frac{v_1}{N_1} dt \quad (11.3)$$

Si noti che il campo magnetico può esistere solo all'interno del nucleo perché se esistesse un tubo che fuoriesce, si veda il tubo a^* nella Figura 11.3, allora per ragioni di simmetria, dovrebbero esistere anche i tubi contigui con lo stesso valore del flusso per modo che, componendo tali tubi, si verrebbe all'assurdo di un tubo di flusso non concatenato con l'avvolgimento che genera il campo, quello tratteggiato nella stessa figura.

La forza magnetomotrice che il primario impone al circuito magnetico è (al limite) nulla perché la riluttanza Θ_n del tubo di flusso delimitato dal nucleo è (al limite) nulla (e la permeanza Λ_n corrispondente è infinita), si veda la (11.4).

$$N_1 i_{10} = \Theta_n \varphi = 0 \quad \Theta_n = 1/\Lambda_n = \frac{2\pi r}{\mu A_n} \quad (11.4)$$

Se ora si avvolge in modo uniforme e con lo stesso senso di avvolgimento attorno al nucleo un avvolgimento secondario di numero di

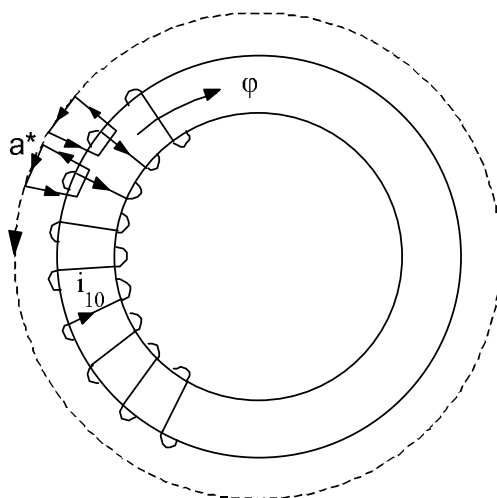


Figura 11.3: Il contenimento del campo magnetico all'interno del nucleo toroidale

spire N_2 (nella Figura 11.4 per comodità grafica i due avvolgimenti sono stati disegnati come concentrati), ai morsetti di tale avvolgimento sarà misurabile, con le convenzioni indicate in Figura 11.4, la tensione v_2 definita dalla (11.5) perché, qualunque sia il carico collegato al secondario, il flusso φ permane definito dalla (11.3) in quanto è imposto da un generatore di tensione ideale.

Ne consegue che la forza magnetomotrice complessiva che agisce sul nucleo deve avere il valore indicato nella (11.6) e che le correnti sono legate tra di loro dall'inverso del rapporto spire, si veda la (11.5). Il segno negativo nella (11.7) consegue dall'aver utilizzato anche per il secondario la convenzione di misura degli utilizzatori (si veda in proposito il doppio bipolo della Figura 11.1), mentre utilizzando la convenzione dei generatori il segno sarebbe stato positivo.

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad (11.5)$$

$$N_1 i_1 + N_2 i_2 = N_1 i_{10} = \varphi \theta_n = 0 \quad (11.6)$$

$$\frac{i_1}{i_2} = -\frac{N_2}{N_1} \quad (11.7)$$

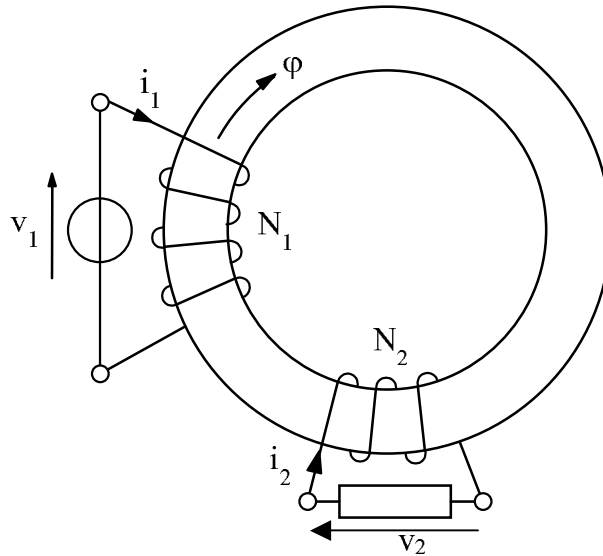


Figura 11.4: I due avvolgimenti del trasformatore di Faraday

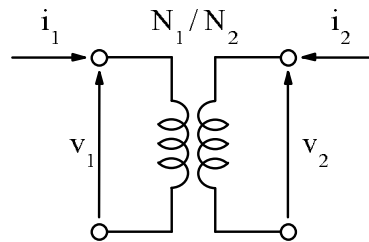
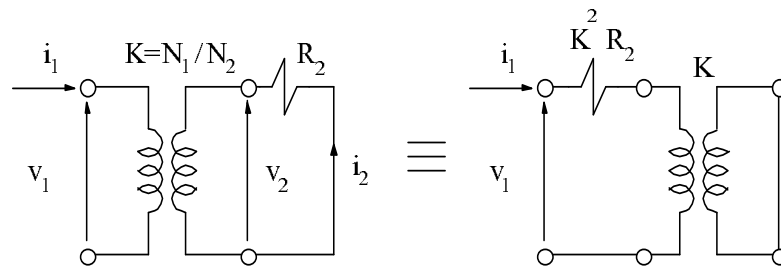


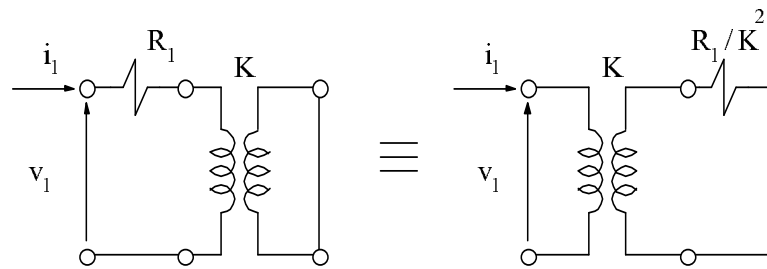
Figura 11.5: Il simbolo di trasformatore ideale

Complessivamente allora la (11.5) e la (11.7) comportano che i fattori della potenza rispettino le relazioni (11.1) e cioè che la potenza elettrica venga trasmessa senza perdite ma che i fattori di tale potenza, tensione e corrente, siano modificati in modo direttamente ed inversamente proporzionale al rapporto spire $K = N_1/N_2$. Il dispositivo così realizzato (con la struttura indicata da Faraday), che risponde quindi alla definizione di trasformatore ideale, viene rappresentato nei circuiti equivalenti costituiti da bipoli ideali come è indicato in Figura 11.5.

Il doppio bipolo così costruito è una pura astrazione come si deduce dal fatto che le perdite sono nulle e che le prestazioni non sono influenzate dalle dimensioni né del nucleo né del conduttore con cui



(a)



(b)

Figura 11.6: Il trasferimento di una impedenza dal secondario al primario a) e viceversa b)

sono realizzati gli avvolgimenti, né dalla posizione relativa di questi. Il trasformatore ideale gode della proprietà che un qualsiasi bipolo ideale collegato al secondario può essere “riferito ai dati di avvolgimento del primario” tramite il quadrato del rapporto di trasformazione come è messo in evidenza nella (11.8) e nella Figura 11.6a con riferimento al caso di carico resistivo. E’ possibile, viceversa, riferire un bipolo ideale collegato al primario ai dati di avvolgimento del secondario come è indicato nella Figura 11.6b.

$$v_1 = K v_2 = -K R_2 i_2 = (K^2 R_2) i_1 = R'_2 i_1 \quad (11.8)$$

11.3 Forme costruttive

Il trasformatore cui si è pervenuti nel precedente paragrafo è criticabile per il fatto che la sua struttura non risponde a criteri costruttivi industriali. In effetti un nucleo toroidale (in filo di ferro come quello proposto da Faraday) non è di agevole fattura e richiede che gli avvolgimenti vengano intessuti sul nucleo stesso, mentre sarebbe comodo che il nucleo e gli avvolgimenti potessero essere confezionati ed assemblati separatamente. A questa esigenza di funzionalità corrispondono le strutture di nucleo e di avvolgimento comunemente adottati.

Una prima possibile struttura è quella rappresentata in Figura 11.7: il nucleo è composto da due “tazze” separabili (realizzate tipicamente con polveri di materiale magnetico opportunamente sinte-rizzate), che contengono rispettivamente il primario ed il secondario sotto forma di bobine avvolte su opportuno sostegno; le tazze sono tenute assieme da opportuni tiranti o leganti.

Altre forme costruttive sono quelle indicate in Figura 11.8 (nucleo a mantello) ed in Figura 11.9 (nucleo a colonne). In entrambi i casi il nucleo è costituito da lamierini di materiale magnetico opportunamente sagomati ed impacchettati, vincolati tra di loro mediante tiranti. Le parti (colonne verticali e gioghi trasversali) sono opportunamente smontabili in modo da consentire il posizionamento degli avvolgimenti.

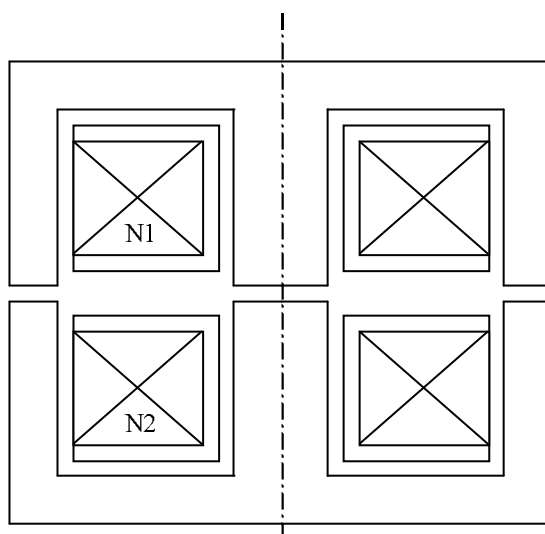


Figura 11.7: Sezione di un trasformatore a tazza

Gli avvolgimenti sono costruiti separatamente nelle forme indicate nella Figura 11.10 e cioè a “bobine concentriche” (tipi a-b) o a “bobine alternate” (tipo c) e per i nuclei a colonna sono disposti su entrambe le colonne. Tipicamente l’avvolgimento a tensione più bassa (indicato con 1 nelle figure, mentre 2 designa l’avvolgimento a tensione più elevata) è quello disposto più vicino al nucleo (eventualmente sdoppiato come nella Figura 11.10b) allo scopo di limitare gli ingombri dell’isolamento.

Le esigenze funzionali della costruzione ora evidenziate, comportano che non vi sia un avvolgimento intessuto sul nucleo e che non vi sia simmetria costruttiva dal punto di vista della posizione degli avvolgimenti rispetto al nucleo. Il campo magnetico, quindi, non è rigorosamente confinato nel nucleo. D’altra parte se la tensione che alimenta il primario è tale da non portare in forte saturazione il materiale magnetico del nucleo si avrà che, essendo $\mu_{fe} \gg \mu_0$ (la permeabilità relativa è dell’ordine di 10^3), i tubi di flusso che si svolgono in aria sono pochi, il flusso nel nucleo dipenderà (come prima) sostanzialmente dalla tensione di alimentazione e le cadute di tensione magnetica nel ferro saranno molto piccole rispetto alle forze magnetomotrici a carico. In questo caso non si commette un grave errore per

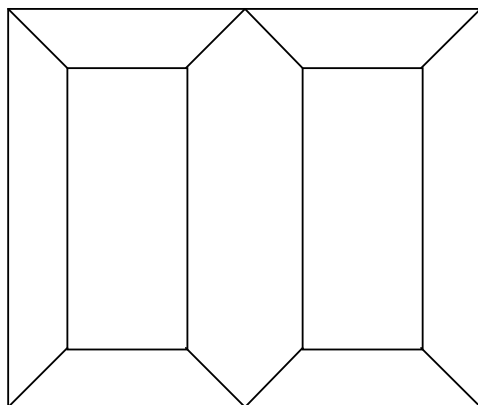


Figura 11.8: Trasformatore con nucleo a mantello

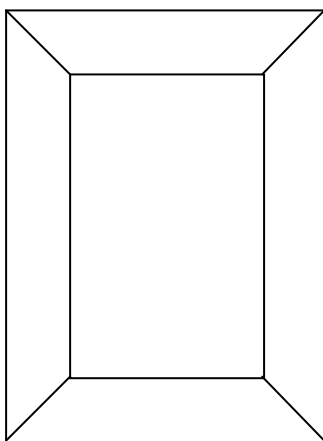


Figura 11.9: Trasformatore con nucleo a colonne

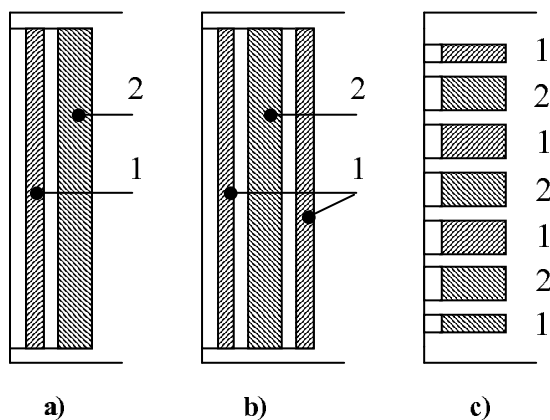


Figura 11.10: Avvolgimenti a bobine concentriche a), b) ed a bobine alternate c)

lo studio del funzionamento a carico assumere il nucleo come costituito da un materiale di permeabilità elevata e praticamente costante. Con questa ipotesi, allora, le misure ed i calcoli vengono condotti come per un mutuo induttore normale con induttanze (auto e mutua) caratterizzate da permeanze equivalenti agli effetti del flusso concatenato (poco) diverse tra di loro e (poco) diverse dalla permeanza del nucleo.

Per le permeanze valgono tipicamente le seguenti osservazioni (si è designato con l'indice 1 l'avvolgimento più vicino al nucleo).

- Le permeanze Λ_1 e Λ_2 sono maggiori, ma poco diverse da quelle del nucleo Λ_n e $\Lambda_1 < \Lambda_2$ (perché l'area di passaggio dei tubi di flusso che si concatenano con l'avvolgimento esterno è maggiore di quella pertinente l'avvolgimento interno).
- La permeanza mutua Λ_m è di poco maggiore di quella del nucleo ed è minore delle $\Lambda_{1,2}$ perché nel funzionamento a vuoto (in cui tali permeanze sono valutate) i tubi di flusso che si concatenano con l'avvolgimento alimentato sono sempre maggiori di quelli che si concatenano con quello aperto.
- In relazione alla piccola differenza tra le permeanze il coefficiente di accoppiamento differisce tipicamente dall'unità di $10^{-3} \div 10^{-4}$. In (11.9) è riportato un esempio dei valori che possono assumere le permeanze indicate precedentemente allo scopo di sensibilizzare sugli ordini di grandezza.

$$\begin{aligned} \Lambda_n &= 10^{-8} & \Lambda_m &= 1.051\Lambda_n & \Lambda_1 &= 1.054\Lambda_n & \Lambda_2 &= 1.055\Lambda_n \\ k^2 &= \Lambda_m^2 / \Lambda_1 \Lambda_2 = 0.9934 \end{aligned} \tag{11.9}$$

11.4 Modello equivalente

Si noti che il funzionamento agli effetti esterni del dispositivo così realizzato può essere studiato, nella ipotesi di permeabilità finita, tramite le equazioni di un mutuo induttore (11.10) che possono venire

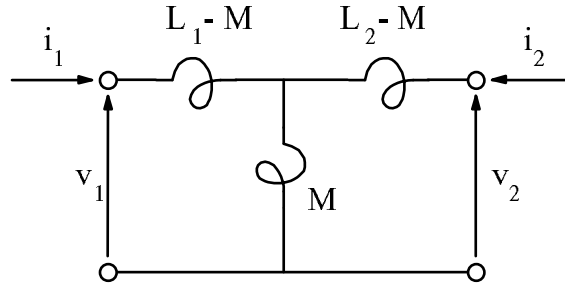


Figura 11.11: Il circuito equivalente del mutuo induttore

elaborate (aggiungendo e togliendo i termini $M di_i/dt$ e $M di_2/dt$) nella (11.11) (con le ipotesi adottate il coefficiente di accoppiamento k è unitario e con uno dei parametri $L_1 - M$ o $L_2 - M$ è negativo). Tali equazioni sono rappresentabili con il circuito equivalente di Figura 11.11.

$$\begin{cases} v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ v_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases} \quad (11.10)$$

$$\begin{cases} v_1 = (L_1 - M) \frac{di_1}{dt} + M \frac{d}{dt}(i_1 + i_2) \\ v_2 = M \frac{d}{dt}(i_1 + i_2) + (L_2 - M) \frac{di_2}{dt} \end{cases} \quad (11.11)$$

$$L_1 = N_1^2 \Lambda_n \quad L_2 = N_2^2 \Lambda_n \quad M = N_1 N_2 \Lambda_n \quad k = \sqrt{M^2 / (L_1 L_2)} = 1$$

Una volta poi, individuate le permeanze, noto il numero di spire dei due avvolgimenti, sono noti i parametri del modello matematico del mutuo induttore ed il corrispondente circuito equivalente è perfettamente identificato, si vedano le (11.12) e la Figura 11.11.

$$\begin{cases} v_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = R_1 i_1 + N_1^2 \Lambda_1 \frac{di_1}{dt} + N_1 N_2 \Lambda_m \frac{di_2}{dt} \\ v_2 = R_2 i_2 + M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} = R_2 i_2 + N_1 N_2 \Lambda_m \frac{di_1}{dt} + N_2^2 \Lambda_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases} \quad (11.12)$$

Elaborando opportunamente le (11.12) si ottengono le (11.13) che si prestano maggiormente all'individuazione del modello tramite misure alle porte.

$$\begin{cases} v_1 = R_1 i_1 + N_1^2 (\Lambda_1 - \Lambda_m) \frac{di_1}{dt} + N_1 \Lambda_m \frac{d}{dt} (N_1 i_1 + N_2 i_2) = \\ \quad = R_1 i_1 + L_{d1} \frac{di_1}{dt} + N_1 \frac{d\varphi}{dt} \\ v_2 = R_2 i_2 + N_2^2 (\Lambda_2 - \Lambda_m) \frac{di_2}{dt} + N_2 N_1 \Lambda_m \frac{d}{dt} (i_1 + \frac{N_2}{N_1} i_2) = \\ \quad = R_2 i_2 + L_{d2} \frac{di_2}{dt} + N_2 \frac{d\varphi}{dt} \end{cases} \quad (11.13)$$

$$\varphi = \Lambda_m (N_1 i_1 + N_2 i_2) = N_1 \Lambda_m (i_1 + \frac{N_2}{N_1} i_2) = N_1 \Lambda_m (i_1 + i_2') \quad (11.14)$$

Combinando le precedenti due equazioni si trovano le (11.15) (in cui si è posto $L_{m1} = N_1^2 \Lambda_m$) che possono essere interpretate tramite il circuito equivalente di Figura 11.12 (o equivalenti riferendo i parametri ad un diverso numero di spire, ad esempio al primario come è indicato in Figura 11.13) in cui compaiono le induttanze di dispersione $L_{d1,2}$ e l'induttanza di magnetizzazione L_{m1} riferita ai dati di avvolgimento del primario.

$$\begin{cases} v_1 = R_1 i_1 + L_{d1} \frac{di_1}{dt} + L_{m1} \frac{d}{dt} (i_1 + \frac{N_2}{N_1} i_2) \\ v_2 = R_2 i_2 + L_{d2} \frac{di_2}{dt} + \frac{N_2}{N_1} L_{m1} \frac{d}{dt} (i_2 + \frac{N_2}{N_1} i_1) \end{cases} \quad (11.15)$$

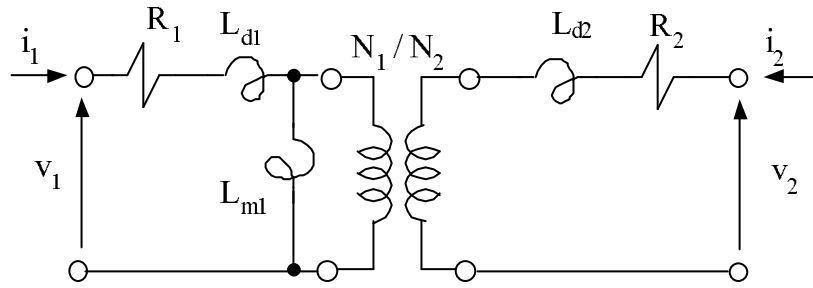


Figura 11.12: Circuito equivalente del trasformatore

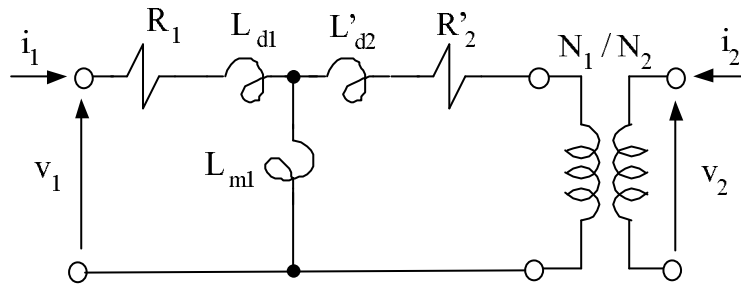


Figura 11.13: Circuito equivalente con parametri riferiti ai dati di avvolgimento del primario

Grazie alla particolare elaborazione tutto avviene come se al campo magnetico effettivo della macchina venisse sostituito uno equivalente agli effetti esterni del tipo illustrato in Figura 11.14: un tubo di flusso φ di permeanza Λ_m concatenato totalmente sia con le spire del primario, sia con quelle del secondario, un tubo di permeanza $\lambda_{d1} = (\Lambda_1 - \Lambda_m)$ concatenato totalmente con le spire primarie ma non con le secondarie ed un tubo di permeanza $\lambda_{d2} = (\Lambda_2 - \Lambda_m)$ concatenato totalmente con le spire secondarie ma non con le primarie. Si noti che le lettere λ/Λ (minuscola/maiuscola) servono a ricordare che gli ordini di grandezza di queste permeanze sono completamente diversi come è messo in evidenza dai valori di esempio, espressi in $[H]$, indicati nella (11.16).

$$\Lambda_m = 1.051 \cdot 10^{-8} \quad \lambda_{d1} = 3 \cdot 10^{-11} \quad \lambda_{d2} = 4 \cdot 10^{-11} \quad (11.16)$$

Le permeanze indicate nella (11.16), una volta definito il numero

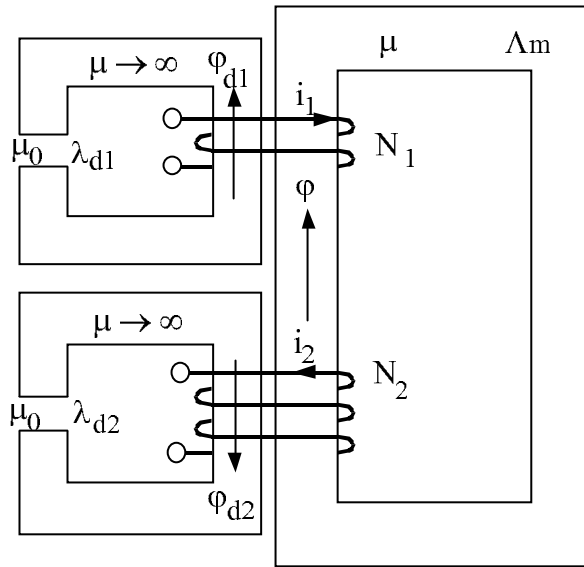


Figura 11.14: Il campo magnetico equivalente agli effetti esterni

delle spire dei due avvolgimenti (ad esempio $N_1 = 10^3$ e $N_2 = 0.5 \cdot 10^3$) consentono il calcolo delle induttanze del circuito equivalente di Figura 11.13 come è messo in evidenza nelle (11.17).

$$\begin{aligned}
 L_{m1} &= N_1^2 \Lambda_m = 1.051 \cdot 10^{-2} \\
 L_{d1} &= N_1^2 \lambda_{d1} = 3 \cdot 10^{-5} \\
 L'_{d2} &= N_1^2 \lambda_{d2} = 4 \cdot 10^{-5}
 \end{aligned}
 \tag{11.17}$$

Nei calcoli che hanno per fine la valutazione delle dimensioni e delle prestazioni si fa normalmente riferimento alla distribuzione dei flussi indicata nella Figura 11.14 e quindi al circuito equivalente di Figura 11.13.

11.5 Circuiti equivalenti ridotti

Si consideri ora il circuito equivalente descritto in Figura 11.13 e i valori delle permeanze e delle induttanze indicate in (11.16)-(11.17). Si verifica in pratica che $L_{d1} \approx L_{d2} \ll L_{m1}$ ed è quindi lecito, con buona approssimazione, spostare l'induttanza L_{m1} a monte di R_1 e

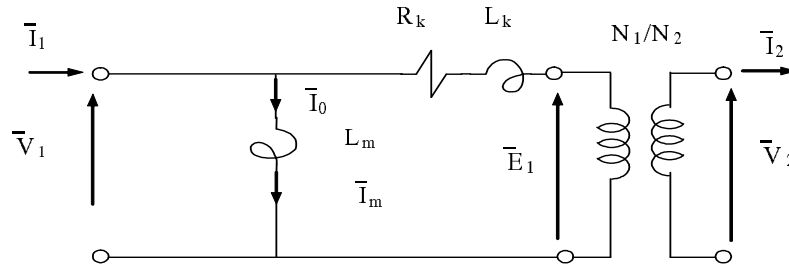


Figura 11.15: Circuito equivalente ridotto

L_{d1} . In questo modo R_1 , R'_2 , L_{d1} e L'_{d2} diventano di fatto in serie pervenendo al circuito equivalente ridotto indicato in Figura 11.15.

11.6 Modi di funzionamento in regime sinusoidale

Nel seguito verrà analizzato il funzionamento del trasformatore quando sia alimentato con una tensione alternata sinusoidale. In tutti i funzionamenti saranno trascurati tutti i fenomeni di non linearità che possono interessare la macchina.

11.6.1 Funzionamento e prova a vuoto

Il funzionamento a vuoto si realizza alimentando il trasformatore e lasciando i morsetti secondari aperti. Tale funzionamento può essere studiato con il circuito equivalente ridotto di Figura 11.16 in cui oltre al ramo induttivo percorso dalla corrente magnetizzante I_m compare una conduttanza che da ragione delle perdite nel ferro dovute a correnti parassite indotte nel nucleo ed agli effetti di isteresi magnetica.

Dal circuito equivalente riportato in figura si può notare come opportune misure effettuate in questo funzionamento, permettano l'individuazione dei parametri del ramo trasversale del circuito equivalente. In particolare si effettueranno misure di potenza, di tensione e di corrente come indicato in Figura 11.17. La prova a vuoto viene solitamente effettuata a tensione e frequenza nominali.

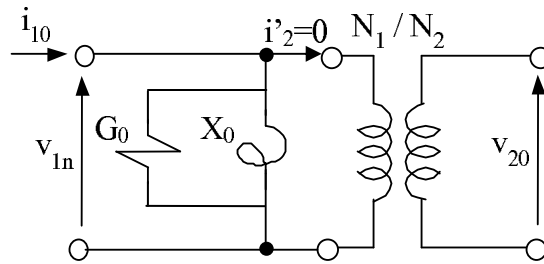


Figura 11.16: Circuito equivalente a vuoto

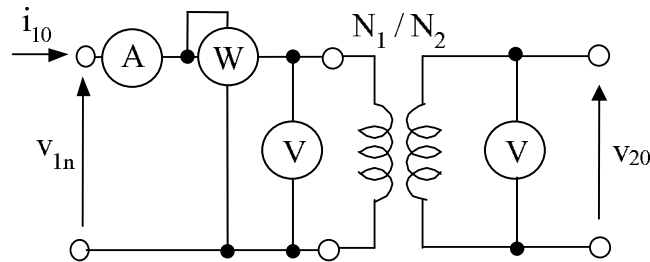


Figura 11.17: Prova a vuoto

Le perdite P_0 misurate sono essenzialmente quelle del ferro ed è quindi possibile ricavare la resistenza equivalente come indicato in (11.18) e la reattanza equivalente come indicato in (11.19). Il rapporto di trasformazione è individuato in maniera convenzionale dalla relazione (11.20).

$$R_0 = \frac{V_0^2}{P_0} = \frac{V_{1n}^2}{P_0} \quad (11.18)$$

$$Z_0 = \frac{V_{1n}}{I_{10}} \quad X_0 = \sqrt{Z_0^2 - R_0^2} \quad (11.19)$$

$$K = \frac{V_{1n}}{V_{20}} \quad (11.20)$$

Dai valori tipici dell'induttanza di magnetizzazione evidenziati in (11.17), rimane evidente che la corrente assorbita dal trasformatore in queste condizioni di funzionamento è estremamente ridotta rispetto alla corrente assorbita in condizioni nominali. Valori tipici sono 1% ÷

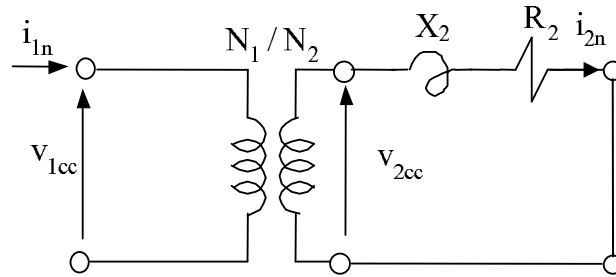


Figura 11.18: Circuito equivalente per il funzionamento in corto circuito

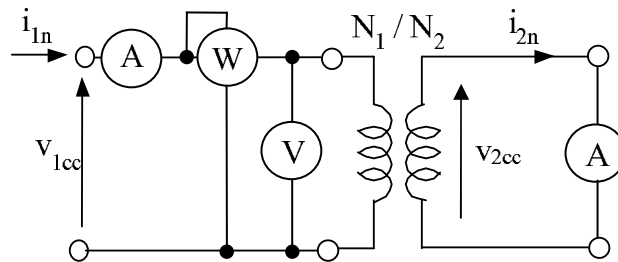


Figura 11.19: Prova di corto circuito

5% della corrente nominale, con valori più bassi per trasformatori di potenza maggiore.

11.6.2 Funzionamento e prova in corto circuito

Si consideri ora il trasformatore con i morsetti secondari chiusi in corto circuito. In queste condizioni di funzionamento, se alimentato a tensione nominale, il trasformatore sarà interessato da una corrente estremamente elevata che, tipicamente, porta la macchina alla rottura. Per garantire il corretto funzionamento della macchina in queste condizioni è necessario alimentare il trasformatore con una tensione ridotta (5% ÷ 15% della tensione nominale, con valori crescenti con la potenza), tale da far circolare, al limite, la corrente nominale.

In tali condizioni di funzionamento, la corrente di magnetizzazione che fluisce nel ramo derivato Z_0 e le perdite nel ferro sono trascurabili ed il circuito equivalente può essere semplificato come indicato in Figura 11.18.

Opportune misure di potenza, di tensione e di corrente permettono

quindi di ricavare il valore dei parametri dell'impedenza indicata in Figura 11.19, come riportato in (11.21) e (11.22).

$$R_2 = \frac{P_{cc}}{I_{2n}^2} \quad (11.21)$$

$$Z_2 = \frac{V_{2cc}}{I_{2n}} \quad X_2 = \sqrt{Z_2^2 - R_2^2} \quad (11.22)$$

11.7 Funzionamento in parallelo

Due trasformatori si dicono connessi in parallelo se i loro primari vengono alimentati dalla stessa linea ed i loro secondari erogano potenza su un comune circuito come indicato in Figura 11.20. Il collegamento in parallelo viene adottato solitamente per potenziare un impianto, per aumentarne l'affidabilità (dato che la probabilità di un guasto contemporaneo è remota) e per migliorare il rendimento energetico in quanto a carico ridotto si può lasciare in funzione una sola macchina.

Il funzionamento in parallelo dei trasformatori può essere studiato utilizzando il circuito equivalente ridotto con parametri riferiti all'avvolgimento del secondario come è indicato in Figura 11.21. Le equazioni di funzionamento sono le (11.23) in cui i vari fasori sono legati tra di loro dal diagramma di Figura 11.24. Combinando le equazioni si ricava per le correnti a carico la (11.24).

$$\bar{V}_{20a} = \bar{V}_1 / K_a \quad \bar{V}_{20b} = \bar{V}_1 / K_b \quad (11.23)$$

$$\bar{V}_2 = \bar{V}_{20a} - \bar{Z}_a \bar{I}_a = \bar{V}_{20b} - \bar{Z}_b \bar{I}_b \quad \bar{I}_2 = \bar{I}_a + \bar{I}_b$$

$$\bar{I}_a = \bar{I}^* + \frac{\bar{Z}_b}{\bar{Z}_a + \bar{Z}_b} \bar{I}_2 \quad \bar{I}_b = -\bar{I}^* + \frac{\bar{Z}_a}{\bar{Z}_a + \bar{Z}_b} \bar{I}_2 \quad (11.24)$$

$$\bar{I}^* = \frac{\bar{\Delta}}{\bar{Z}_a + \bar{Z}_b} \quad \bar{\Delta} = \bar{V}_1 \frac{K_b - K_a}{K_a K_b}$$

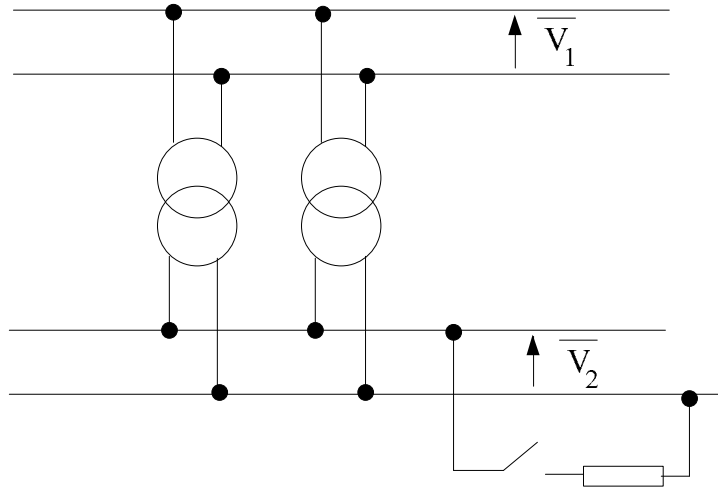


Figura 11.20: Connessione in parallelo di due trasformatori

La corrente erogata da ciascun trasformatore è quindi la somma di una corrente \bar{I}^* , indipendente dal carico, circolante tra i due secondari anche a vuoto e di una corrente corrispondente alla suddivisione della corrente di carico secondo la regola del partitore di corrente.

Dalle precedenti considerazioni si deduce che:

- se i due trasformatori hanno la stessa potenza nominale, gli stessi rapporti di trasformazione $K_a = K_b$ e la stessa impedenza serie $\bar{Z}_a = \bar{Z}_b$ allora la corrente di circolazione è nulla e le correnti sono pari a metà della corrente di carico: questa è la ripartizione ideale;
- se i due trasformatori hanno la stessa potenza nominale, ma $K_a < K_b$ e $Z_a > Z_b$ (come è ragionevole dato che le impedenze vengono trasferite tramite $1/K^2$) la situazione di funzionamento è caratterizzata dallo squilibrio delle correnti indicato nella (11.24), che non consente di utilizzare a pieno la potenza nominale di entrambe le macchine.

Se ora si costruiscono per le due macchine le curve che esprimono la tensione secondaria in funzione del coefficiente di utilizzazione β in corrispondenza del fattore di potenza del carico, si veda la Figura

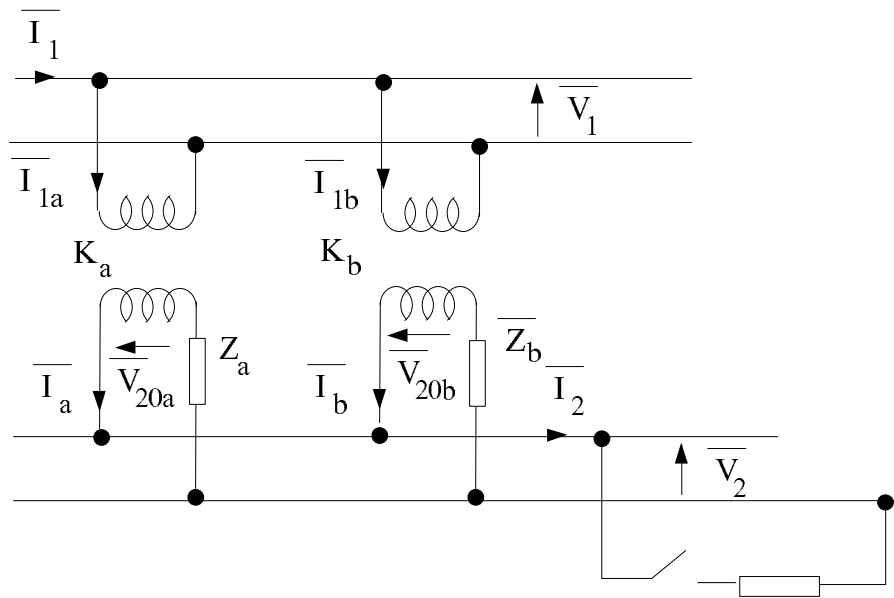


Figura 11.21: Circuito equivalente per lo studio del funzionamento in parallelo

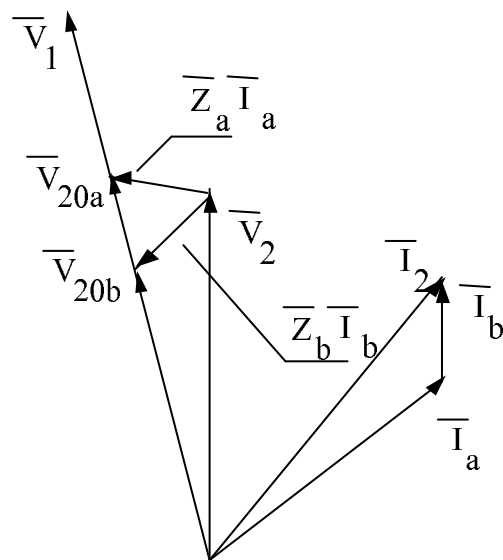


Figura 11.22: Diagramma dei fasori nel funzionamento in parallelo

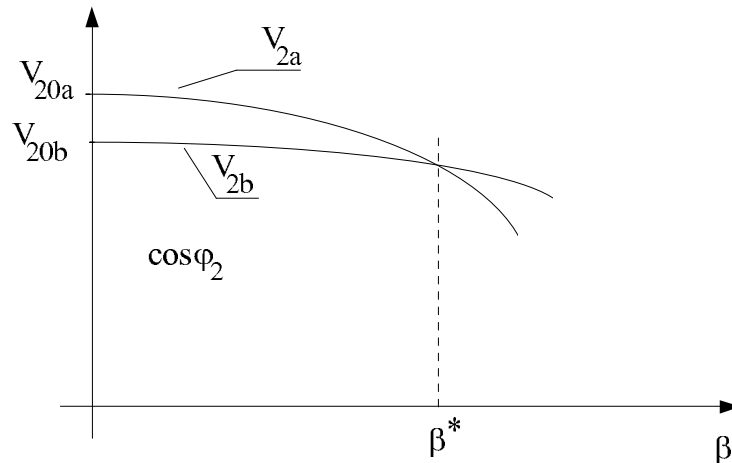


Figura 11.23: Tensioni a carico dei trasformatori in parallelo

11.23, nel punto β^* in cui tali curve si intersecano si realizza il funzionamento in parallelo con ugual coefficiente di carico. Se tale punto si realizza per $\beta^* = 1$ allora a pieno carico entrambe le macchine sono ugualmente utilizzate. E' conveniente ricercare questa condizione avvalendosi della opportunità di modificare la posizione relativa delle due curve di Figura 11.23 alterando il rapporto di trasformazione e cioè modificando il numero delle spire di uno degli avvolgimenti (soluzione possibile se le macchine sono previste con prese su uno dei due avvolgimenti).

Se i due trasformatori hanno potenze nominali diverse ma lo stesso rapporto di trasformazione, la corretta ripartizione si realizza se la corrente in ogni macchina è proporzionale alla potenza nominale della macchina che la eroga e se le correnti sono in fase con la corrente di carico. Questo comporta, si veda la (11.23), che sia soddisfatta la condizione $\bar{Z}_a \bar{I}_a = \bar{Z}_b \bar{I}_b$ e cioè che $v_{ra} = R_{ka} I_{na} / V_n = R_{kb} I_{nb} / V_n = v_{rb}$ (si veda la Figura 11.24) e che altrettanto avvenga per il valore relativo della componente reattiva della tensione di corto circuito.

Lo studio del funzionamento in parallelo ha messo in evidenza l'utilità che uno degli avvolgimenti sia dotato di prese in modo da consentire piccoli aggiustamenti del rapporto di trasformazione. La variazione del rapporto si realizza mediante un dispositivo detto "commutatore",

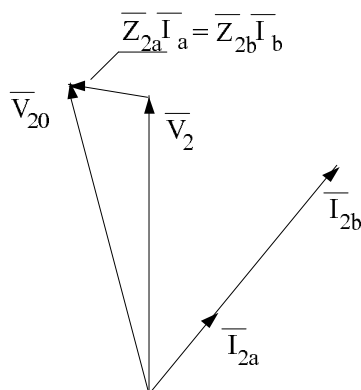


Figura 11.24: Diagramma dei fasori a carico di due trasformatori con diversa potenza nominale in parallelo

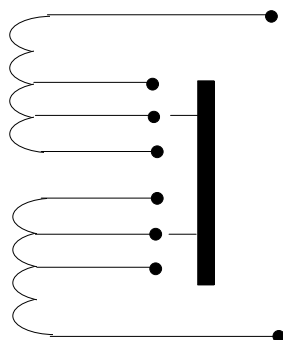


Figura 11.25: Prese per variazione del rapporto a trasformatore disinserito

posto all'esterno della cassa in cui è racchiusa la macchina, manovrabile o a trasformatore disinserito oppure sotto carico (con costo della macchina sensibilmente maggiore).

In tutti i casi occorre ricordare che la modifica del rapporto va eseguita rispettando la condizione di limitare lo scentrimento tra le f.m.m. del primario e quella del secondario in modo da limitare i conseguenti sforzi elettrodinamici. Questa condizione è parzialmente realizzata per i tipi con manovra a macchina disinserita disponendo le prese come è indicato nella Figura 11.25. L'entità della variazione di tensione conseguibile ed il numero dei gradini disponibili viene espresso sulle targhe nella forma $V_n \pm n \times y\%$ dove $2n + 1$ è il numero dei gradini di tensione disponibili ed $y\%$ è l'entità percentuale

della tensione di gradino rispetto alla tensione nominale (ad esempio $10 \text{ [kV]} \pm 2 \times 2.5\%$ significa che sono disponibili i seguenti valori di tensione: $10,5-10,25-10-9,75-9,5 \text{ [kV]}$). Nei trasformatori per uso industriale con manovra a macchina disinserita sono comuni i valori $V_n \pm 2.5\%$ (tre prese) e $V_n \pm 2 \times 2.5\%$ (5 prese).

Nel caso dei commutatori sotto carico il numero dei gradini disponibili è normalmente molto maggiore mentre l'entità del gradino è inferiore rispetto ai tipi precedenti allo scopo di ridurre i problemi di dimensionamento degli organi di manovra: valori correnti sono $V_n \pm 7 \times 1\%$ (15 prese) e $V_n \pm 10 \times 0.75\%$ (21 prese). Una tipica macchina per realizzare la commutazione sotto carico è il "commutatore Jansen", si veda la Figura 11.26, caratterizzata dalla presenza di due "selettori" p (per le prese pari) e d (per le prese dispari), dotati di contatti striscianti che consentono di spostare a vuoto (in assenza di corrente) il contatto da una presa alla successiva.

La manovra dalla presa 1 alla presa 2 (lo stesso vale per le successive) si esegue tramite l'interruttore che viene ruotato in modo da mettere prima in corto circuito i morsetti b-c (le resistenze R_c servono a limitare la corrente di circolazione) per essere quindi disposto nella posizione d. In questa situazione non vi è più corrente ed è in funzione la presa 2, mentre il selettore d può essere predisposto per la manovra successiva nella posizione 3.

11.8 Il trasformatore trifase

11.8.1 Le forme costruttive del nucleo e degli avvolgimenti

Il presente paragrafo si riferisce alle macchine alimentate da un sistema simmetrico di tensioni concatenate di frequenza costante: questo è il caso tipico delle reti adibite alla distribuzione dell'energia elettrica per uso industriale o civile.

Si possono realizzare trasformatori trifasi mediante opportuna connessione degli avvolgimenti di tre macchine monofasi, si veda la Figura 11.27, in tal caso si perdono però le opportunità di risparmio connesse alla natura dei vincoli elettromagnetici che si possono imporre trami-

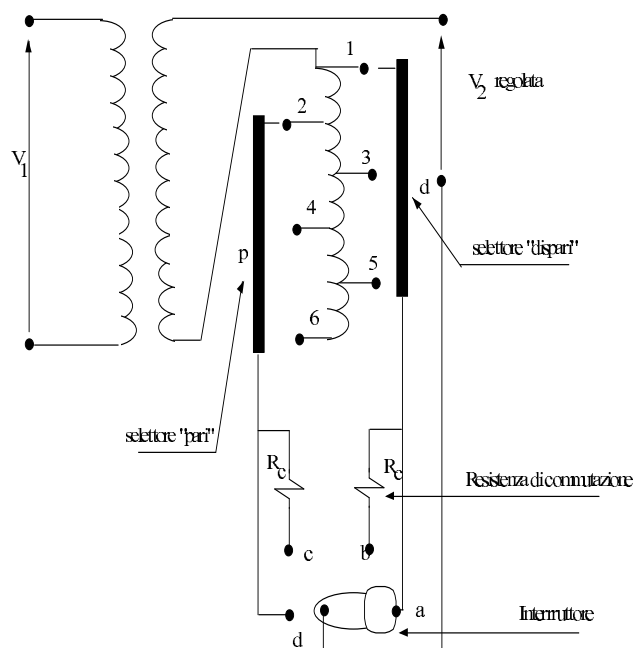


Figura 11.26: Commutatore sotto carico (tipo Jansen)

te la connessione anche dei nuclei. Supponiamo infatti di prendere i nuclei dei tre trasformatori monofasi e di connetterli a stella, si veda la Figura 11.28, mettendo una colonna in comune: se il sistema delle tensioni applicate alle tre fasi è simmetrico allora la somma dei tre flussi di colonna è nullo e la colonna centrale, in comune alle tre macchine, si può eliminare. La costruzione si può semplificare, a scapito della perfetta simmetria costruttiva, eliminando i gioghi (superiore ed inferiore) di una colonna e rendendo il nucleo piano: si ottiene così la forma costruttiva del nucleo a colonne complanari di Figura 11.29.

Se i nuclei monofasi vengono connessi a triangolo, si veda la Figura 11.30, ed il sistema delle tensioni è simmetrico allora il flusso nei gioghi vale la frazione $1/\sqrt{3}$ del flusso nelle colonne, si veda il diagramma dei fasori di Figura 11.31 (linee a tratto continuo), per modo che la sezione dei gioghi può essere vantaggiosamente ridotta. D'altra parte se, dopo averlo ridotto, si taglia uno dei tre gioghi, si dispone la struttura nel piano e si richiude il giogo tagliato, si ottiene, a scapito di una modesta rinuncia alla simmetria, il nucleo a cinque colonne

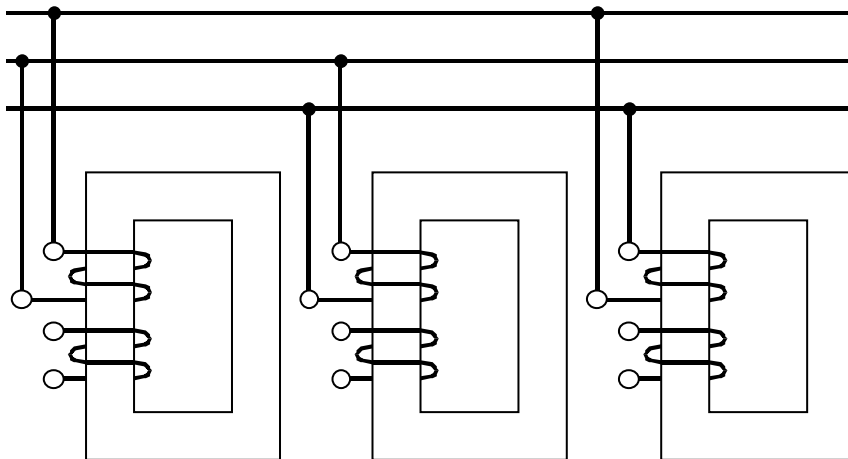


Figura 11.27: Trasformatore trifase come connessione di tre trasformatori monofase

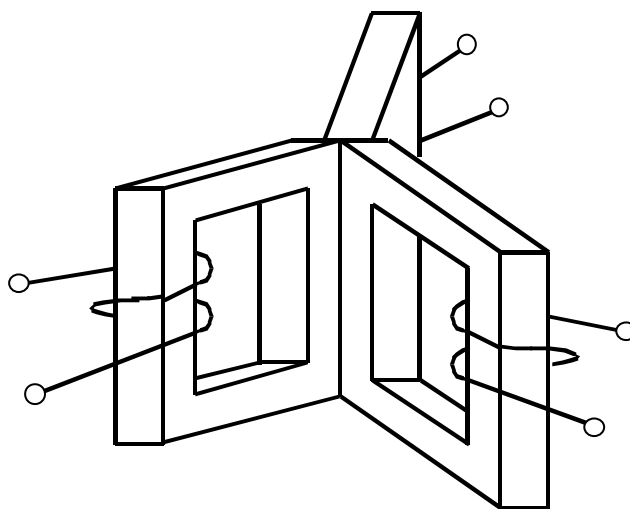


Figura 11.28: Connessione a stella dei nuclei monofase

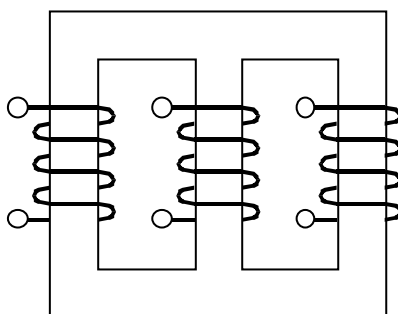


Figura 11.29: Semplificazione della connessione a stella dei nuclei

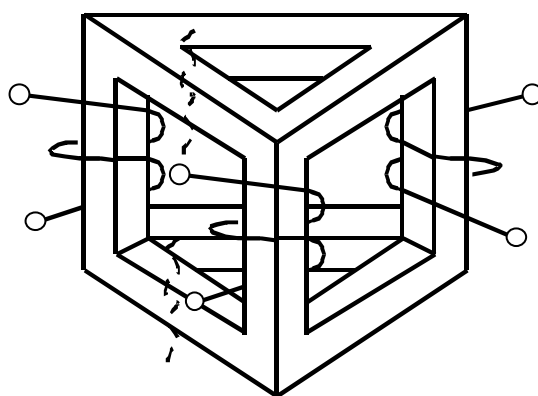


Figura 11.30: Connessione a triangolo dei nuclei monofase

indicato in Figura 11.32 (in questo caso il diagramma dei fasori dei flussi è quello indicato con linea a tratto in Figura 11.31 dato che il flusso nel giogo ac si riduce rispetto agli altri come conseguenza dell'aumento di riluttanza causato dalla maggior lunghezza).

Le tre soluzioni ora delineate sono impiegate nella tecnica: il caso più comune è quello a tre colonne complanari ma per le macchine di potenza limite, per le quali possono insorgere problemi di trasporto in relazione alle dimensioni, sono adottate anche le altre due soluzioni.

In tutti i casi le colonne sono inscrivibili in una circonferenza e sono costituite da pacchi di lamierino magnetico che definiscono gradini di larghezza opportunamente modulata rispetto al diametro della circonferenza. All'interno della colonna, come pure del giogo, sono ricavati canali di raffreddamento longitudinali rispetto alle lamiere, si veda la Figura 11.33 o trasversali, si veda la Figura 11.34 (questi ul-

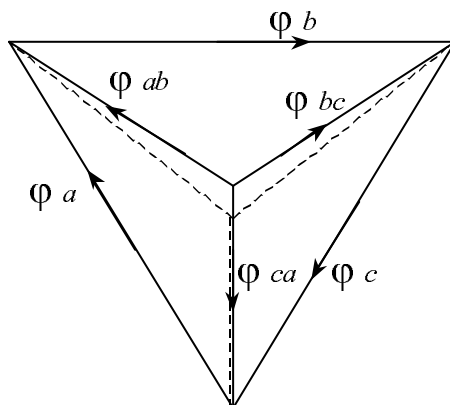


Figura 11.31: Diagramma dei fasori rappresentativi dei flussi nelle colonne e nei gioghi

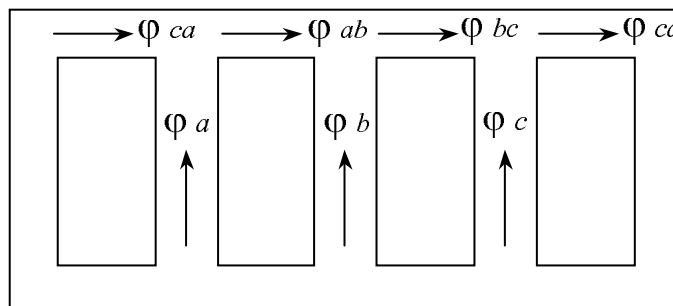


Figura 11.32: Nucleo a cinque colonne

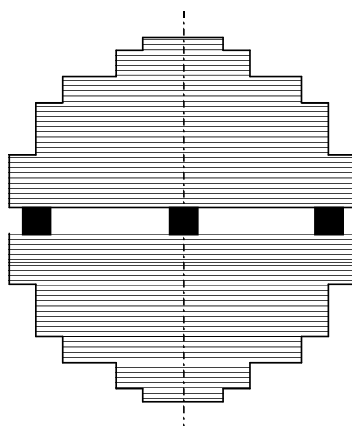


Figura 11.33: Canali di raffreddamento longitudinali

timi sono più efficaci per il raffreddamento dato che pongono tutti i lamierini a contatto con il fluido refrigerante). I pacchi di lamierino sono opportunamente sfalsati in modo da consentire l'unione ad incastro dei gioghi sulle colonne, si veda la Figura 11.35; i pacchi, che occupano le due posizioni a linea piena ed a linea tratteggiata in Figura 11.36, sono realizzati impilando strisce di lamierino mediante opportune guide.

Per quanto riguarda gli avvolgimenti sono normalmente in rame e strutturati come quelli del caso monofase (con la bassa tensione all'interno dell'alta) e l'isolamento più comune è in classe A (carta-olio). Valgono per essi le consuete precauzioni agli effetti degli sforzi elettrodinamici: i) ogni avvolgimento è simmetrico rispetto al piano mediano; ii) le spire dei due avvolgimenti di ogni fase sono spazialmente distribuite con la stessa legge; iii) le altezze dei due avvolgimenti sono uguali; iv) gli avvolgimenti sono centrati.

11.8.2 Collegamenti trifasi degli avvolgimenti

I collegamenti degli avvolgimenti trifasi del trasformatore possono essere a stella, a triangolo ed a zig-zag (connesso a stella, lo zig-zag a triangolo non si usa), si veda la Figura 11.37, e sono designati con i simboli $Y, D, Z/y, d, z$ (in maiuscolo per l'avvolgimento primario e minuscolo per l'altro). Se il neutro è accessibile allora l'indicazione è

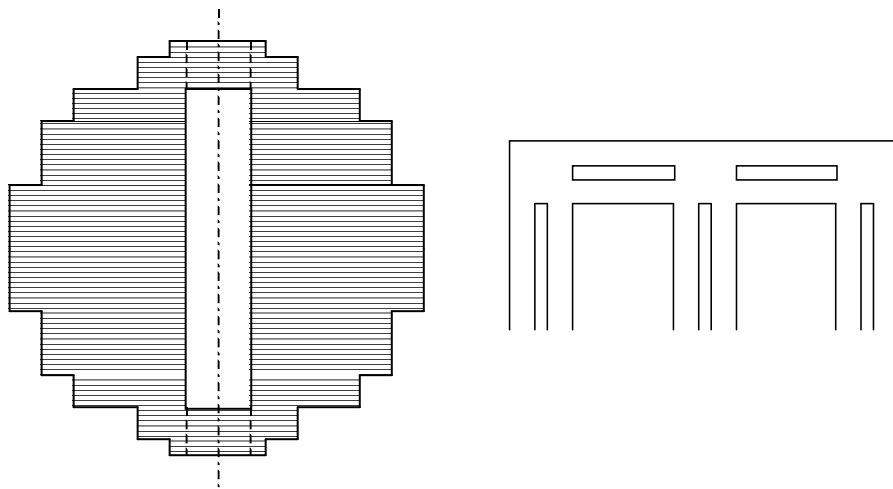


Figura 11.34: Canali di raffreddamento trasversali

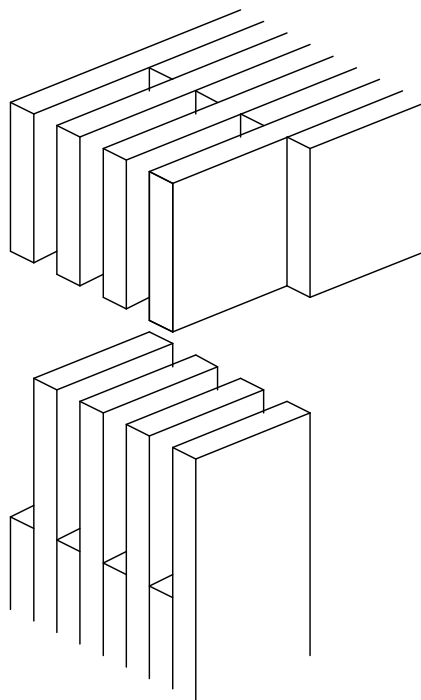


Figura 11.35: Unione ad incastro delle colonne con i gioghi

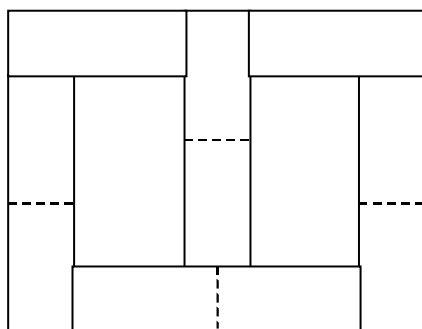


Figura 11.36: Disposizione dei pacchi lamiera negli strati successivi

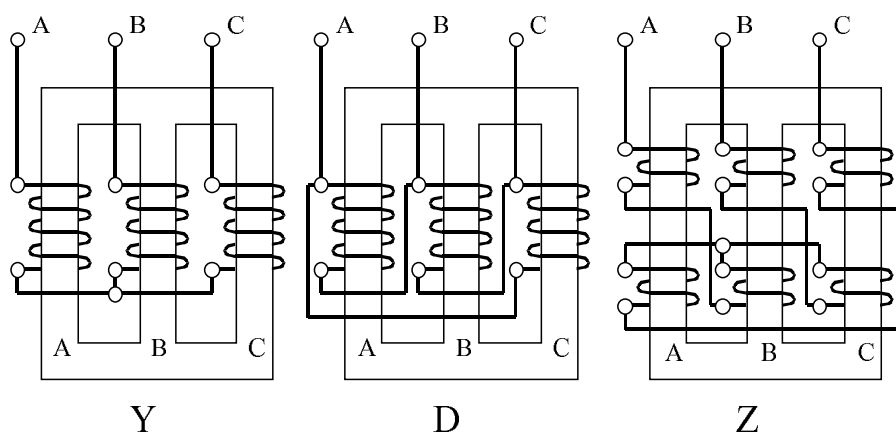


Figura 11.37: Collegamenti trifasi degli avvolgimenti

$Y_n, Z_n / y_n, z_n$ rispettivamente (naturalmente la connessione a triangolo non può avere il neutro accessibile). Le tre fasi vengono designate con lettere successive ad esempio A, B, C / a, b, c (maiuscolo per l'avvolgimento primario, minuscolo per l'altro). I collegamenti più usati sono i primi due (preferibilmente la connessione a stella per le tensioni di linea più elevate e quella a triangolo per le correnti di linea più elevate), lo zig-zag stella con neutro accessibile si usa nei secondari dei trasformatori per distribuzione a quattro fili (quindi con neutro accessibile) con primario collegato a stella, come verrà nel seguito discusso.

Nella spiegazione delle proprietà si ammette che nella rappresentazione della macchina i due avvolgimenti presenti su ogni colonna, concentrici, con eliche equiverse e con morsetti di principio (P,p) e di

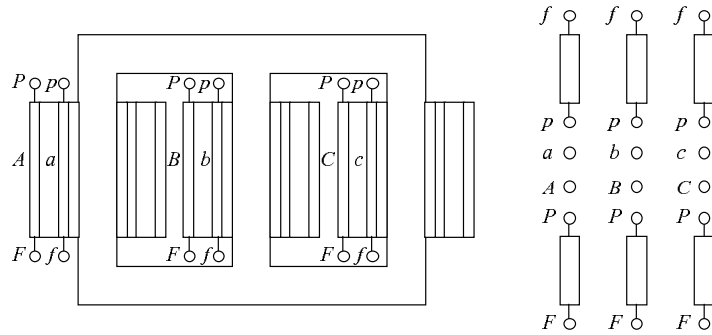


Figura 11.38: Rappresentazione delle connessioni

fine (F,f) dell'elica ugualmente disposti, vengono rappresentati omettendo il disegno dell'elica e del nucleo e ribaltando i principi verso l'interno come è indicato nella Figura 11.38. In questo disegno si mette anche in evidenza che i tre morsetti del primario e del secondario A,B,C/a,b,c hanno la stessa denominazione della colonna sulla quale sono allocati i corrispondenti avvolgimenti.

La connessione trifase dell'avvolgimento primario, abbinata a quella dell'altro avvolgimento, determina tutta una serie di proprietà che vengono nel seguito discusse con particolare riguardo: i) alla terza armonica presente nella corrente magnetizzante di ogni fase quando l'induzione nella colonna corrispondente sia alternata sinusoidale, ii) alla possibilità di carico monofase tra fase e neutro e iii) allo sfasamento tra le tensioni primarie e secondarie (che condiziona la possibilità di funzionamento in parallelo tra due o più trasformatori). Quest'ultimo aspetto è di particolare rilievo e viene discusso più ampiamente nel successivo paragrafo, mentre per i primi due temi si osserva quanto segue.

Consideriamo il funzionamento a vuoto con avvolgimento primario alimentato da un sistema simmetrico di tensioni concatenate. Se entrambi gli avvolgimenti sono a stella allora le f.e.m. di fase non possono essere simmetriche (si veda la prima Figura 11.39) perché se lo fossero lo sarebbero anche le induzioni (mentre le forze magnetiche sarebbero deformate) e nel sistema trifase di correnti dovrebbe essere presente un sistema omopolare di correnti di terza armonica la

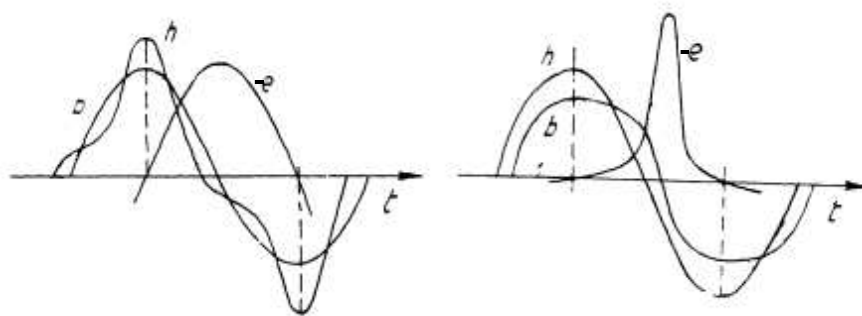


Figura 11.39: Connessione a stella: forza magnetica, induzione e f.e.m.

cui circolazione è impedita dalla connessione a stella. In questo caso allora le correnti sono alternate sinusoidali e costituiscono un sistema equilibrato, mentre sono deformate le induzioni ed i flussi di colonna, si veda la seconda Figura 11.39 (ottenuta tramite la caratteristica di magnetizzazione assumendo che la forza magnetica sia alternata sinusoidale e ricavando l'induzione).

I flussi di colonna presentano un sistema (con frequenza tripla rispetto alla fondamentale) di sequenza omopolare che si richiude all'esterno del nucleo se questo è a tre colonne, nelle due colonne laterali se il nucleo è a cinque colonne. Nel primo caso il flusso omopolare è modesto ma va ad interessare parti esterne al trasformatore, quali la cassa, causando perdite addizionali. Nel secondo caso il flusso di terza armonica è circoscritto nel nucleo ma, essendo bassa la riluttanza che incontra, il suo valore è decisamente maggiore per modo che la deformazione delle forze elettromotrici è più sensibile che nel caso precedente.

Se entrambi gli avvolgimenti sono a stella e sul secondario è connesso (oltre ai carichi di tipo trifase) un carico monofase tra il centro stella ed un morsetto di fase, si veda la Figura 11.40, non può esistere equilibrio tra le forze magnetomotrici di primario e di secondario dovute alla componente fondamentale della corrente del carico monofase.

Si manifesta in tal caso, essendo vincolati i vertici del triangolo delle tensioni concatenate, uno spostamento del centro stella O' delle

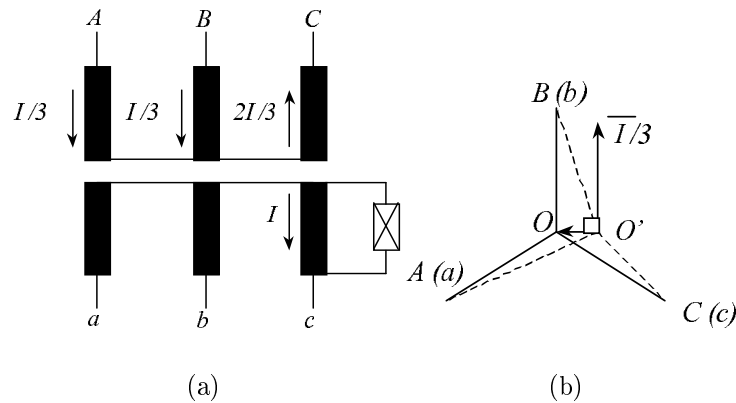


Figura 11.40: Connessione stella-stella con carico monofase: a) circolazione della corrente; b) fasori rappresentativi.

forze elettromotrici. Questo spostamento è causato dalla presenza di una sequenza omopolare nei flussi di colonna generata dall'unica possibile ripartizione delle correnti a regime, quella indicata nella Figura 11.40 nella ipotesi che entrambi gli avvolgimenti abbiano lo stesso numero di spire. Complessivamente la connessione Yy è sconsigliabile nella distribuzione a quattro fili (specie con nucleo a cinque colonne), salvo limitare il carico sul centro stella.

In ogni caso è quindi conveniente la presenza di un avvolgimento a triangolo al fine di evitare gli inconvenienti sopra citati e di fatto le connessioni più usate sono: i) Yd per i trasformatori di maggiore importanza posti agli estremi delle grandi linee di trasmissione dell'energia elettrica a frequenza industriale; ii) Dyn , che consente il carico sul centro stella del secondario con la distribuzione di correnti indicata nella Figura 11.41 ma ha lo svantaggio della connessione a triangolo sull'alta tensione; iii) la connessione Yzn per tensioni elevate e potenze piccole con possibilità di carico monofase sul centro stella della connessione a zig-zag (la distribuzione di correnti è quella indicata in Figura 11.42).

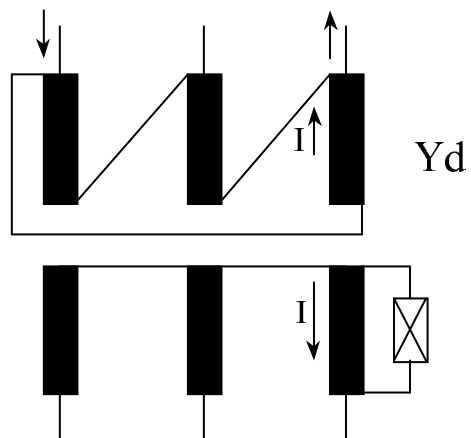


Figura 11.41: Carico monofase nel caso di connessione Dy

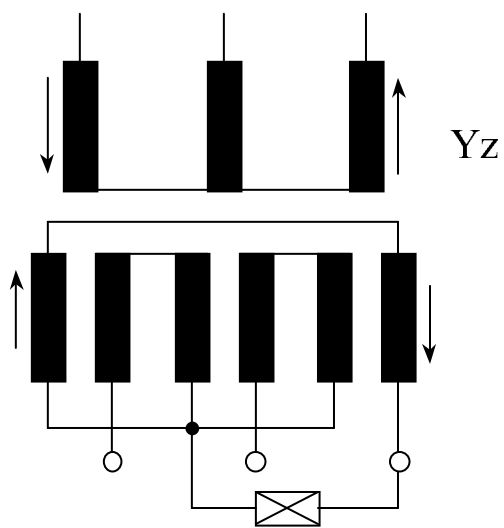


Figura 11.42: Carico monofase nel caso di connessione Yz

11.8.3 Sfasamento tra primario e secondario, indice orario

Nel successivo paragrafo verrà mostrato che nel funzionamento simmetrico ed equilibrato, che è quello di riferimento per le applicazioni industriali, il circuito equivalente di un trasformatore trifase è riducibile a quello di un trasformatore monofase per modo che a proposito del funzionamento in parallelo valgono per le macchine trifasi le considerazioni già fatte in precedenza a proposito delle macchine monofasi. Ne consegue che una prima condizione per il corretto parallelo è che le due macchine presentino ugual rapporto di trasformazione ed uguali componenti (resistiva e reattiva) della tensione di corto circuito. Ulteriore condizione da rispettare è poi che, a pari terna di tensioni di alimentazione del primario, i secondari delle due macchine da collegare in parallelo presentino due terne di tensioni con la stessa fase rispetto ad un comune riferimento (oltre che essere uguali in modulo per effetto dello stesso rapporto di trasformazione).

Lo sfasamento si valuta pensando la macchina funzionante a vuoto con i morsetti A,B,C connessi alle analoghe fasi della rete di alimentazione (che impone un sistema simmetrico di tensioni concatenate), tracciando i diagrammi fasoriali e valutando l'angolo di ritardo della tensione concatenata secondaria rispetto alla rispettiva tensione concatenata primaria.

Dal momento che l'angolo in questione è sempre un multiplo di 30° , lo sfasamento viene designato da tale multiplo, che prende il nome di *indice orario*, perché, come verrà mostrato, esso corrisponde al numero sul quadrante di un orologio su cui punta la tensione di fase a della bassa tensione quando l'omonima A dell'alta tensione sia disposta sulle ore 12.

Tutti i collegamenti che danno luogo al medesimo sfasamento costituiscono un gruppo, designato dal numero dell'indice orario. La designazione completa allora dei collegamenti di un trasformatore trifase si effettua facendo seguire alle lettere rappresentative delle connessioni primarie e secondarie, il numero dell'indice orario (ad esempio Yy0, Yd11...). Come già detto possono funzionare in parallelo solo trasformatori dello stesso gruppo.

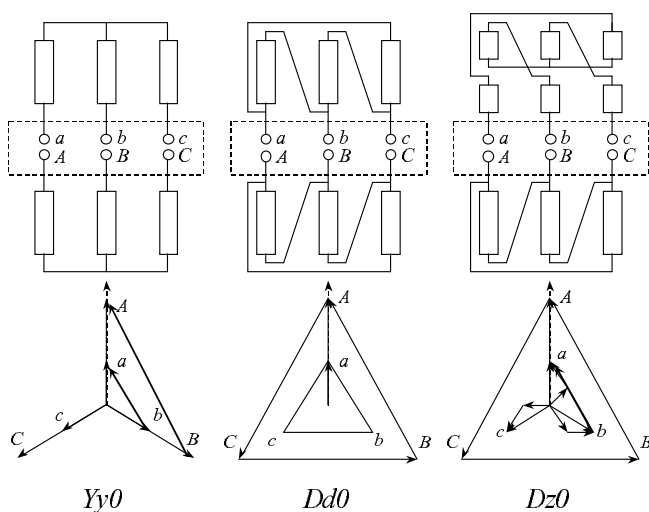


Figura 11.43: Connessioni del gruppo 0

I gruppi possibili sono 12 rappresentati dai numeri da 0 a 11; si hanno in particolare le seguenti peculiarità.

I collegamenti Yy, Dd, Dz possono dare tutti gli sfasamenti rappresentati da numeri pari nel campo 0-11. Nella Figura 11.43 sono rappresentate le connessioni del gruppo 0, ma dal momento che è possibile variare lo sfasamento di ± 4 unità con una semplice rotazione ciclica della designazione dei morsetti, al gruppo 0 sono riducibili i gruppi 4 ed 8. Nella Figura 11.44 sono rappresentate le connessioni del gruppo 6 (non riducibile al gruppo 0 salvo modifiche costruttive) cui sono riducibili i gruppi 2 e 10 con opportuna rotazione degli indici.

I collegamenti Yd, Dy, Yz, possono dare tutti gli sfasamenti rappresentati da indici dispari. Anche in questo caso esistono due gruppi principali il 5 (con le connessioni indicate in Figura 11.45) e l'11 (con le connessioni indicate in Figura 11.46). Questi due gruppi sono tra loro riducibili invertendo il senso ciclico della alimentazione e ruotando ciclicamente la designazione dei morsetti.

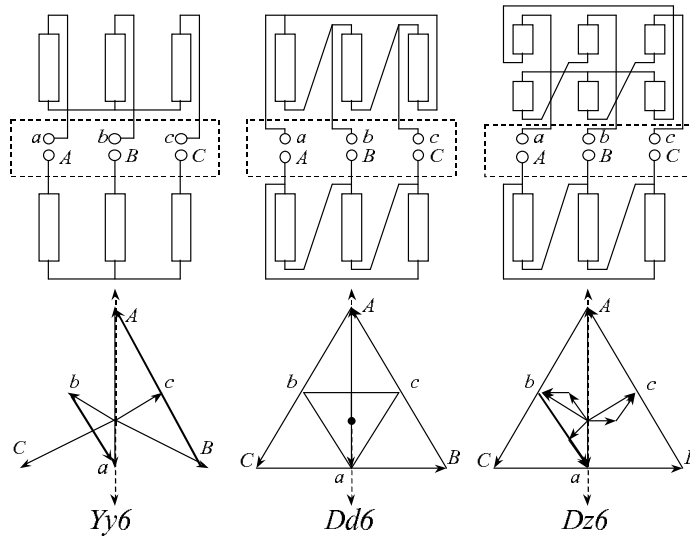


Figura 11.44: Connessioni del gruppo 6

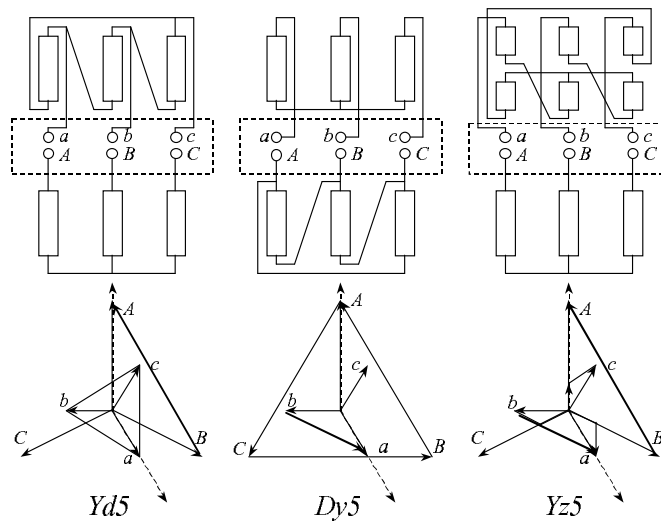


Figura 11.45: Connessioni del gruppo 5

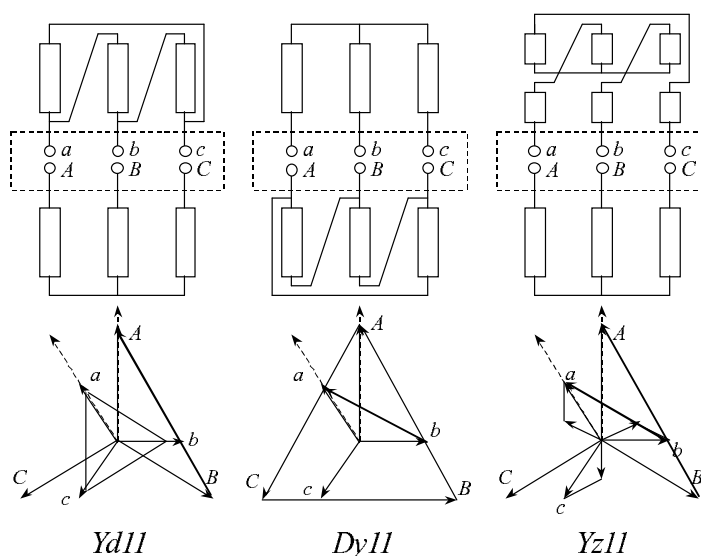


Figura 11.46: Connessioni del gruppo 11

11.9 Circuito equivalente del trasformatore trifase

Per quanto riguarda il circuito equivalente del trasformatore trifase ci si riferirà esclusivamente al caso di utilizzo della macchina elettrica in un sistema simmetrico ed equilibrato in modo che sia possibile rappresentare il trasformatore monofase con un trasformatore equivalente monofase, si veda Figura 11.47, i cui parametri possono essere ricavati dalle prove con le modalità già descritte.

Per casi di utilizzo della macchina in sistemi dissimetrici o squilibrati si rimanda a testi specifici.

11.10 Parallelo di trasformatori trifase

Lo schema di inserzione di due trasformatori trifase in parallelo è indicato in Figura 11.48. Ovviamente per il corretto funzionamento del sistema valgono le stesse considerazioni già fatte nel caso di parallelo di trasformatori monofasi.

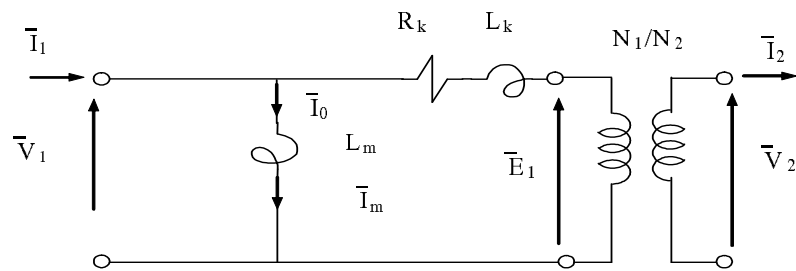


Figura 11.47: Circuito monofase semplificato equivalente di un trasformatore trifase

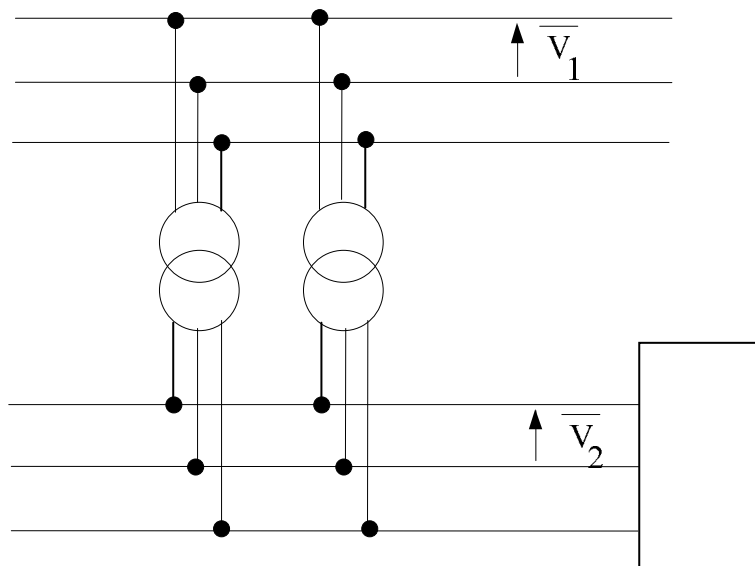


Figura 11.48: Parallelo di trasformatore trifase

- Stesso rapporto di trasformazione a vuoto, per evitare la circolazione di correnti anche in assenza di carico.
- Stesso valore della tensione di corto circuito, per garantire una corretta ripartizione del carico sui due trasformatore
- Stesso gruppo, per evitare sfasamenti tra le tensioni secondarie che porterebbero a circolazioni di correnti non volute.

Capitolo 12

Macchine elettriche rotanti: generalità

12.1 Il giunto elettromagnetico

Si consideri la struttura elettromagnetica rappresentata in Figura 12.1, costituita da due armature in materiale ferromagnetico ideale ($\mu \rightarrow \infty$) di lunghezza l in direzione ortogonale al piano del foglio, con alloggiate due bobine diametrali, rispettivamente, di N_i ed N_e spire¹ e si vogliano determinare i coefficienti di auto e mutua induttanza in funzione della coordinata angolare θ che rappresenta lo sfasamento tra l'asse magnetico della bobina interna e quella esterna.

Data l'ipotesi di considerare il materiale ferromagnetico ideale, il calcolo può essere condotto considerando esclusivamente i tratti in aria e procedendo per sovrapposizione degli effetti.

Si supponga ora che solo l'avvolgimento interno sia percorso da corrente con le convenzioni indicate in Figura 12.1 e si consideri una generica linea di forza del campo magnetico \vec{h} identificata da un vettore di coordinata angolare α il cui verso identificherà il verso di percorrenza positivo della linea. Il lavoro lungo tale linea risponde alla (12.1), dove il termine 2 compare in quanto la linea di campo attraver-

¹I pedici i ed e vengono usati per indicare la configurazione prevalente per le macchine rotanti che prevede un comportamento come avvolgimento di *indotto* (avvolgimento in cui vengono indotte le f.e.m.) degli avvolgimenti che si trovano sulla parte esterna delle macchine rotanti e di *eccitazione* (avvolgimento che crea il campo magnetico principale) degli avvolgimenti della parte interna.

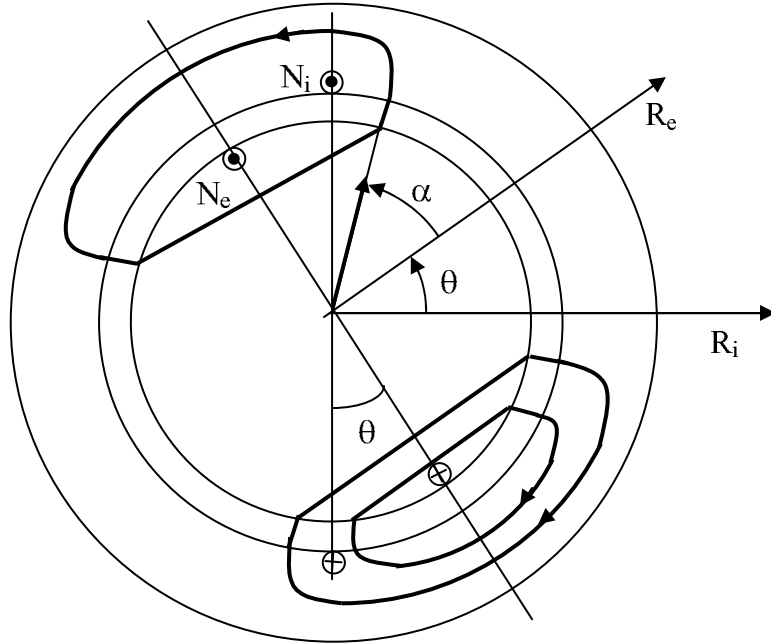


Figura 12.1: Il giunto elettromagnetico

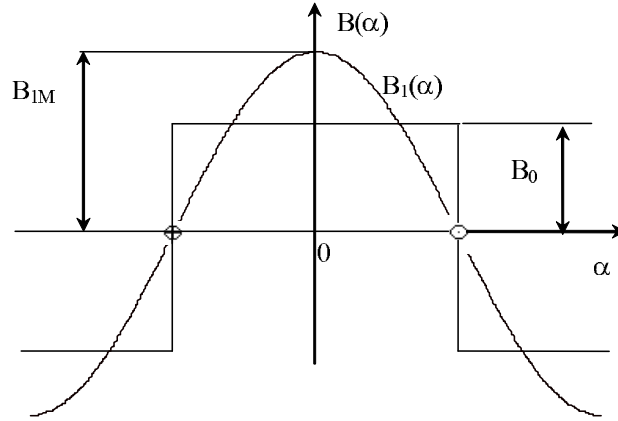
sa due volte il traferro e dove si è indicato con $B(\alpha) = \frac{1}{2t} \int_{2t} b(\alpha, l) dl$ il valore medio di b lungo la linea di forza α .

$$N_e i_e = \oint \vec{h} \cdot d\vec{l} = \oint \frac{\vec{b}}{\mu} \cdot d\vec{l} = \pm \int_{2t} \frac{b(\alpha, l)}{\mu_0} dl = \pm \frac{B(\alpha)}{\mu_0} 2t \quad (12.1)$$

In termini assoluti, il modulo del valore medio $B(\alpha)$ è costante e non dipenda dalla coordinata α , come evidenziato dalla (12.2). Inoltre, per la scelta del sistema di riferimento per la coordinata α , $B(\alpha) < 0$ per $\pi/2 < \alpha < 3\pi/2$ come evidenziato in Figura 12.2 (per $\pi/2 < \alpha < 3\pi/2$, infatti, il verso di percorrenza della linea di campo è scelto in direzione opposta rispetto alla regola del cavatappi).

$$B(\alpha) = \pm \mu_0 \frac{N_e i_e}{2t} \quad (12.2)$$

Nel seguito della trattazione, al fine di semplificarne lo svolgimento, saranno introdotte le seguenti ipotesi: i) il campo \vec{b} al traferro sarà approssimato con il suo valor medio $B(\alpha)$ (ipotesi valida se il traferro

Figura 12.2: Andamento del valore medio di induzione $B(\alpha)$

t è piccolo) e ii) della distribuzione $B(\alpha)$ si terrà conto esclusivamente della prima armonica $B_1(\alpha)$ evidenziata in (12.3) (i campi armonici di ordine superiore danno luogo a fenomeni poco significativi dal punto di vista della conversione elettromeccanica).

$$B(\alpha) = \frac{4}{\pi} \mu_0 \frac{N_e i_e}{2t} \left[\cos \alpha - \frac{1}{3} \cos 3\alpha + \frac{1}{5} \cos 5\alpha + \dots \right] \quad (12.3)$$

$$B_1(\alpha) = \frac{4}{\pi} \mu_0 \frac{N_e i_e}{2t} \cos \alpha \quad B_{1M} = \frac{4}{\pi} \mu_0 \frac{N_e i_e}{2t}$$

Con queste ipotesi, il flusso di autoinduzione prodotto dalla circolazione della corrente i_e e concatenato con l'avvolgimento N_e può essere calcolato come indicato in (12.4) da cui l'espressione dell'autoinduttanza L_{ee} indicata in (12.5).

$$\psi_{ee} = N_e \int_S \vec{b} \cdot \vec{n} dS = N_e \int_{-\pi/2}^{\pi/2} B_1(\alpha) r l d\alpha = \quad (12.4)$$

$$= N_e \frac{4}{\pi} \frac{N_e i_e}{2t} \mu_0 r l [\sin \alpha]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{4}{\pi} \frac{N_e^2 i_e}{t} \mu_0 r l$$

$$L_{ee} = \frac{\psi_{ee}}{i_e} = \frac{4}{\pi} \frac{N_e^2}{t} \mu_0 r l \quad (12.5)$$

Si voglia ora calcolare il flusso ψ_{ie} concatenato con l'avvolgimento esterno i quando gli assi magnetici dei due avvolgimenti siano sfasati di generico angolo θ come indicato in Figura 12.1 nell'ipotesi che tutte le linee di flusso attraversino il traferro. Tale calcolo può essere condotto come indicato in (12.6). A questo proposito, si tenga conto nella formulazione di (12.6) che l'origine della coordinata α è sempre l'asse magnetico dell'avvolgimento interno e che i termini di flusso di induzione magnetica negli archi di periferia $\pi/2 - \theta < \alpha < \pi/2$ e $-\pi/2 < \alpha < -\pi/2 + \theta$ non sono concatenati con l'avvolgimento esterno come evidenziato in Figura 12.1.

$$\begin{aligned}\psi_{ie} &= N_i \int_{-\pi/2+\theta}^{\pi/2-\theta} B_1(\alpha) l r d\alpha = N_i \frac{4 N_e i_e}{\pi} \frac{\mu_0 r l}{2t} [\sin \alpha]_{-\pi/2+\theta}^{\pi/2-\theta} = \\ &= N_i \frac{4 N_e i_e}{\pi} \frac{\mu_0 r l}{2t} \left[\sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) - \sin \left(-\frac{\pi}{2} + \theta \right) \right] = \quad (12.6) \\ &= N_i \frac{4 N_e i_e}{\pi} \frac{\mu_0 r l}{t} \cos \theta\end{aligned}$$

La mutua induttanza L_{ie} può essere, dunque, calcolata come indicato in (12.7) e naturalmente, per il principio di reciprocità delle mutue induttanze, coincide con L_{ei} . Si noti che se $N_e = N_i$ allora è possibile stabilire il legame tra L_{ee} e L_{ie} espresso dalla (12.8)

$$L_{ie} = \frac{\psi_{ie}}{i_e} = \frac{4 N_i N_e}{\pi} \frac{\mu_0 r l}{t} \cos \theta = L_{ei} \quad (12.7)$$

$$L_{ie} = L_{ee} \cos \theta \quad (12.8)$$

In maniera analoga a quanto fatto nel caso di alimentazione del solo l'avvolgimento interno, si può ripetere il calcolo nel caso in cui sia alimentato esclusivamente l'avvolgimento esterno ottenendo la (12.9). Si noti ancora che se il numero di spire $N_i = N_e$ allora $L_{ii} = L_{ee}$.

$$L_{ii} = \frac{\psi_{ii}}{i_i} = \frac{4 N_i^2}{\pi} \frac{\mu_0 r l}{t} \quad (12.9)$$

Se ora entrambi gli avvolgimenti sono alimentati, grazie alle ipotesi introdotte, si può utilizzare il principio di sovrapposizione per

determinare il flusso totale concatenato con i due avvolgimenti come indicato in (12.10), dove ψ_i e ψ_e indicano i flussi totali concatenati con i due avvolgimenti.

$$\psi_i = L_{ii}i_i + L_{ie}i_e \quad (12.10)$$

$$\psi_e = L_{ei}i_i + L_{ee}i_e$$

Le f.e.m. che si generano nei due avvolgimenti possono essere calcolate come indicato in (12.11).

$$e_i = \frac{d\psi_i}{dt} = \frac{d(L_{ii}i_i + L_{ie}i_e)}{dt} \quad (12.11)$$

$$e_e = \frac{d\psi_e}{dt} = \frac{d(L_{ei}i_i + L_{ee}i_e)}{dt}$$

Vale la pena, prima di proseguire nella trattazione, analizzare il caso di funzionamento del sistema nell'ipotesi che il numero delle spire delle due bobine sia lo stesso ($N_i = N_e$), l'avvolgimento interno sia alimentato con una corrente $i_e = \text{cost} = I_e$ e sia posto in rotazione a velocità $\omega = \text{cost}$ ($\theta = \omega t$). In questo caso le relazioni (12.11) assumono la forma indicata in (12.12), ricordando che $L_{ii} = L_{ee} = L$ e $L_{ie} = L_{ei} = L \cos \omega t$. E' evidente in (12.11) la presenza dei termini mozionali dovuti alla rotazione dell'avvolgimento interno.

$$e_i = L \frac{di_i}{dt} - \omega L I_e \sin \omega t \quad (12.12)$$

$$e_e = -\omega L i_i \sin \omega t + L \cos \omega t \frac{di_i}{dt}$$

12.1.1 Coppia trasmessa

Se entrambi gli avvolgimenti della struttura di Figura 12.1 sono alimentati e si pone in rotazione una delle due armature, l'esperienza evidenzia che l'altra armatura si pone in rotazione anch'essa e il sistema può essere usato per trasmettere coppia. Per il calcolo della coppia che può essere trasmessa tra le due armature si può utilizzare

la medesima procedura evidenziata nel Capitolo 9 per il calcolo della forza di attrazione in un attuatore elementare: la coppia T può essere ottenuta per derivazione, secondo la coordinata meccanica (θ), dell'energia magnetica W_m come indicato in (12.13).

$$T = \frac{\partial W_m}{\partial \theta} \quad (12.13)$$

Avendo trascurato l'effetto dei tratti in ferro del circuito, l'energia magnetica può essere calcolata con l'integrale di volume esteso al traferro come indicato in (12.14) dove B è il campo di induzione totale che può essere ottenuto per sovrapposizione degli effetti come indicato in (12.15), ricordando che per entrambi gli avvolgimenti vale la relazione (12.3) e che i due assi magnetici sono sfasati di un angolo θ .

$$W_m = \int_V \frac{B^2}{2\mu_0} dv \quad (12.14)$$

$$B = B_i(\alpha) + B_e(\alpha - \theta) = B_i \cos(\alpha) - B_e \cos(\alpha - \theta) \quad (12.15)$$

$$B_i = \frac{4}{\pi} \mu_0 \frac{N_i i_i}{2t} \quad B_e = \frac{4}{\pi} \mu_0 \frac{N_e i_e}{2t}$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{\partial}{\partial \theta} \int_V \frac{(B_i \cos(\alpha) - B_e \cos(\alpha - \theta))^2}{2\mu_0} dv = \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta} rlt \left(\int_0^{2\pi} \frac{B_i^2 \cos^2(\alpha)}{2\mu_0} d\alpha + \int_0^{2\pi} \frac{B_e^2 \cos^2(\alpha - \theta)}{2\mu_0} d\alpha + \dots \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta} \int_0^{2\pi} \frac{2B_i B_e \cos \alpha \cos(\alpha - \theta)}{2\mu_0} rlt d\alpha = \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{B_i B_e}{2\mu_0} rlt \int_0^{2\pi} [\cos(2\alpha - \theta) + \cos(\theta)] d\alpha \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{B_i B_e}{2\mu_0} r l t \cos \theta [\alpha]_0^{2\pi} \right) = \\
&= -\frac{B_i B_e}{2\mu_0} 2\pi r l t \sin \theta = -\frac{B_i B_e}{2\mu_0} V_0 \sin \theta
\end{aligned} \tag{12.16}$$

Andando ad eseguire l'operazione di derivazione indicata in (12.13) si ottiene la relazione significativa (12.16) dove V_0 rappresenta il volume del traferro. L'espressione (12.16) si ricava osservando che i termini quadratici nel calcolo dell'induzione sono indipendenti da θ (l'integrale di \cos^2 sul periodo è costante ed indipendente dall'argomento).

12.2 La trasformata di Park

Prima di introdurre le relazioni che portano alla definizione dei modelli delle principali macchine elettriche rotanti conviene introdurre la *matrice di trasformazione di Park* indicata in (12.17) che consentirà notevoli semplificazioni nello studio dei sistemi trifase e delle macchine elettriche.

$$[T(\theta)] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos(\theta - 2\pi/3) & \cos(\theta + 2\pi/3) \\ -\sin(\theta) & -\sin(\theta - 2\pi/3) & -\sin(\theta + 2\pi/3) \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \tag{12.17}$$

La matrice (12.17) è una matrice di rotazione ortogonale (l'inversa coincide con la trasposta $[T]^{-1} = [T]^t$) che può essere applicata a terne di variabili nei valori istantanei come indicato in (12.18).

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \\ v_o \end{bmatrix} = [T] \cdot \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} = [T]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} v_d \\ v_q \\ v_o \end{bmatrix} \tag{12.18}$$

Se θ è variabile nel tempo si parla di *trasformazione su assi rotanti*, mentre se θ è costante nel tempo (e solitamente si sceglie il riferimento di θ in modo tale che $\theta = 0$) la trasformazione prende

il nome di *trasformazione su assi fissi*, la matrice diventa quella indicata in (12.19) e per le grandezze trasformate, indicate in (12.20), si usa indicare, nel caso di trasformazione su assi fissi, le prime due grandezze invece che con i pedici d, q , con i pedici α, β (si parla di *componenti su assi α e β e su assi d e q* , rispettivamente). La terza componente, indicata in entrambi i casi con il pedice o , prende il nome di *componente omopolare*.

$$[T] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (12.19)$$

$$\begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \\ v_o \end{bmatrix} = [T] \cdot \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} \quad (12.20)$$

Se la terna di valori v_a, v_b, v_c è del tipo indicato in (12.21) (sistema simmetrico/equilibrato) allora la componente v_o della terna trasformata è sempre nulla (essendo la somma algebrica dei valori istantanei). Conviene dunque definire la variabile complessa indicata in (12.22), che prende il nome di *fasore spaziale*, che nel caso di terne trifasi, identifica completamente il sistema.

$$\begin{aligned} v_a &= V_M \cos(\omega t) \\ v_b &= V_M \cos\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) \\ v_c &= V_M \cos\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right) \end{aligned} \quad (12.21)$$

$$\bar{v} = v_\alpha + jv_\beta \quad (12.22)$$

Definito il fasore spaziale (12.22), la trasformazione su assi fissi indicata in (12.20) può essere scritta come indicato in (), dove è stato introdotto l'operatore complesso $\alpha = e^{j2\pi/3}$.

$$\bar{v}_{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{2}{3}}[v_a + \alpha v_b + \alpha^2 v_c] \quad (12.23)$$

$$v_o = \frac{v_a + v_b + v_c}{\sqrt{3}}$$

Le trasformazioni inverse assumono la forma indicata in () e nel caso di sistema simmetrico/equilibrato si semplificano come indicato in ()

$$v_a = \sqrt{\frac{2}{3}}\text{Re}(\bar{v}_{\alpha\beta}) + \frac{v_o}{\sqrt{3}}$$

$$v_b = \sqrt{\frac{2}{3}}\text{Re}(\alpha^2 \bar{v}_{\alpha\beta}) + \frac{v_o}{\sqrt{3}} \quad (12.24)$$

$$v_c = \sqrt{\frac{2}{3}}\text{Re}(\alpha \bar{v}_{\alpha\beta}) + \frac{v_o}{\sqrt{3}}$$

$$v_a = \sqrt{\frac{2}{3}}\text{Re}(\bar{v}_{\alpha\beta}) \quad v_b = \sqrt{\frac{2}{3}}\text{Re}(\alpha^2 \bar{v}_{\alpha\beta}) \quad v_c = \sqrt{\frac{2}{3}}\text{Re}(\alpha \bar{v}_{\alpha\beta})$$

Nel caso di trasformazione generica su assi rotanti, vale l'osservazione che la matrice di Park $[T(\theta)]$ può essere ottenuta dalla matrice su assi fissi per rotazione attraverso la matrice $H(\theta)$ indicata in (12.25)

$$[T(\theta)] = [H(\theta)][T] \quad [H(\theta)] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12.25)$$

La relazione (12.25) si traduce nella significativa relazione (12.26) nei fasori spaziali (il termine omopolare non cambia nel variare il sistema di riferimento).

$$\bar{v} = e^{-j\theta} \bar{v}_{\alpha\beta} \quad \bar{v}_{\alpha\beta} = e^{j\theta} \bar{v} \quad (12.26)$$

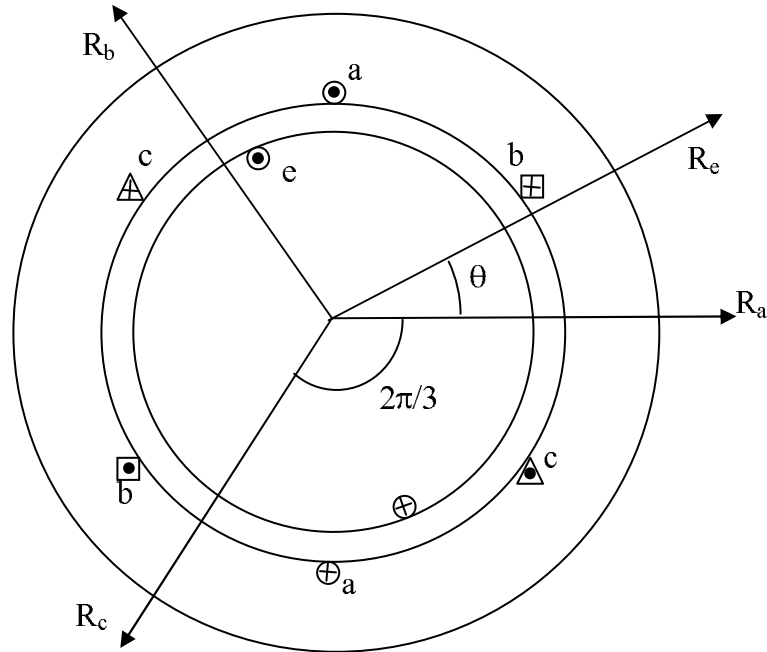


Figura 12.3: Avvolgimento trifase

12.3 Avvolgimenti trifase

Si consideri ora di estendere la configurazione di Figura 12.1, aggiungendo nella struttura esterna altri due avvolgimenti con assi magnetici sfasati di $2\pi/3$ (120°) rispetto all'avvolgimento precedente, come indicato in Figura 12.3. Nell'ipotesi che tutte le linee di flusso attraversino il traferro, si possono ripetere i medesimi ragionamenti effettuati nel paragrafo 12.1 per ottenere i coefficienti di auto e mutua induttanza ottenendo i risultati espressi dalle (12.27)-(12.28), dove si è fatta l'ipotesi che i tre avvolgimenti presentino il medesimo numero di spire N .

$$L_{aa} = L_{bb} = L_{cc} = L = \frac{4 N^2}{\pi t} \mu_0 r l \quad (12.27)$$

$$L_{ab} = L_{ba} = L_{ac} = L_{ca} = L_{bc} = L_{cb} = L \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{L}{2} \quad (12.28)$$

Il legame tra il flusso concatenato totale con ogni avvolgimento e

le correnti può essere espresso dalla relazione matriciale indicata in (12.29).

$$\begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L & -L/2 & -L/2 \\ -L/2 & L & -L/2 \\ -L/2 & -L/2 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad (12.29)$$

Nel caso di sistema simmetrico, i legami costitutivi delle singole fasi possono essere espressi come indicato in (12.30).

$$\begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L & -L/2 & -L/2 \\ -L/2 & L & -L/2 \\ -L/2 & -L/2 & L \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad (12.30)$$

Le relazioni (12.30) possono essere trasformate con la matrice di Park su assi fissi, assumendo l'espressione indicata in (12.31).

$$\begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \\ v_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L + L/2 & 0 & 0 \\ 0 & L + L/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_o \end{bmatrix} \quad (12.31)$$

Alimentando ora le tre bobine con la terna di correnti trifase equilibrate indicata in (12.32), essendo nulla la componente omopolare i_o , la relazione (12.31) può essere sintetizzata nella relazione (12.33) nei fasori spaziali.

$$\begin{aligned} i_a &= \sqrt{2}I \cos \omega t \\ i_b &= \sqrt{2}I \cos(\omega t - 2\pi/3) \\ i_c &= \sqrt{2}I \cos(\omega t - 4\pi/3) \end{aligned} \quad (12.32)$$

$$\bar{v}_{\alpha\beta} = R\bar{i}_{\alpha\beta} + \frac{3}{2}L \frac{d\bar{i}_{\alpha\beta}}{dt} = R\bar{i}_{\alpha\beta} + L_s \frac{d\bar{i}_{\alpha\beta}}{dt} \quad (12.33)$$

Il termine $3L/2$ indicato in (12.33) prende il nome di *induttanza sincrona* e si indicherà nel seguito con il simbolo L_s . Oltre che in un

sistema di assi fissi, la (12.33) può essere naturalmente espressa in un generico sistema di assi di riferimento d, q mobile, ricordando che $\bar{i} = \bar{i}_{\alpha\beta}e^{-j\theta}$ e $\bar{v} = \bar{v}_{\alpha\beta}e^{-j\theta}$. In questo caso assume la forma indicata in (12.34) dove compare un ulteriore termine di f.e.m. di tipo mozionale dovuto esclusivamente alla scelta del sistema di riferimento rotante.

$$\begin{aligned}\bar{v} &= R\bar{i}_{\alpha\beta}e^{-j\theta} + \frac{3}{2}L\frac{d(\bar{i}_{\alpha\beta}e^{-j\theta})}{dt} = \\ &= R\bar{i} + \frac{3}{2}L\frac{d\bar{i}}{dt} - j\theta\frac{3}{2}L\frac{d\bar{i}}{dt} = R\bar{i} + L_s\frac{d\bar{i}}{dt} - \underbrace{j\theta L_s\frac{d\bar{i}}{dt}}_{\text{fem moz.}}\end{aligned}\quad (12.34)$$

Se ora si alimenta l'avvolgimento interno con una corrente i_e , l'esperienza mostra che (in opportune condizioni), l'armatura interna si porta in rotazione alla pulsazione delle correnti di statore. Questo può essere dimostrato ricordando che la coppia trasmessa può essere determinata come derivata secondo la coordinata spaziale θ , dell'energia magnetica e osservando che l'unico termine che dipende da θ è il termine in cui compaiono le mutue induttanze tra l'avvolgimento interno e gli avvolgimenti esterni, in quanto gli avvolgimenti esterni non si muovono uno rispetto all'altro. Operando con le formule di somma e sottrazione di angoli si può ottenere la soluzione significativa indicata in (12.35) (dove si sono tralasciati i passaggi intermedi).

$$L_{ae} = L_{be} = L_{ce} = M$$

$$\begin{aligned}T &= \frac{\partial}{\partial\theta} \left[M \cos(\theta)i_a + M \cos\left(\frac{2}{3}\pi - \theta\right)i_b + M \cos\left(\frac{2}{3}\pi + \theta\right)i_c \right] i_e = \\ &= \frac{\partial}{\partial\theta} \left[\frac{3}{2}Mi_e\sqrt{2}I(\cos\omega t \cos\theta + \sin\omega t \sin\theta) \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial\theta} \left[\frac{3}{2}Mi_e\sqrt{2}I \cos(\omega t - \theta) \right] = -\frac{3}{2}Mi_e\sqrt{2}I\dot{\theta} \sin(\omega t - \theta)\end{aligned}\quad (12.35)$$

La () evidenzia che la coppia T è costante se l'avvolgimento interno è posto in rotazione a velocità $\dot{\theta} = \omega$ (e quindi in presenza di

una coppia resistente costante, la condizione di regime, per avere accelerazione nulla, è con velocità dell'avvolgimento interno pari a ω , confermando l'esperienza).

12.4 Potenze nelle variabili di Park

In un sistema trifase la potenza totale del sistema può essere espressa come indicato in (12.36). Applicando la trasformata di Park su assi fissi alla relazione (12.36) si giunge alla relazione significativa indicata in (12.37), che evidenzia la proprietà della trasformata di Park di non alterare le potenze, in quanto trasformata ortogonale.

$$p = v_a i_a + v_b i_b + v_c i_c = \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = [v]^t [i] \quad (12.36)$$

$$[v] = [T]^t [v_{\alpha\beta o}] \quad [i] = [T]^t [i_{\alpha\beta o}]$$

$$p = [v]^t [i] = [v_{\alpha\beta o}]^t [T] [T]^t [i_{\alpha\beta o}] = [v_{\alpha\beta o}]^t [i_{\alpha\beta o}] \quad (12.37)$$

Naturalmente la medesima proprietà è verificata applicando la trasformazione su assi rotanti (in quanto la matrice è comunque ortogonale) come indicato in (12.38).

$$p = [v]^t [i] = [v_{dqo}]^t [i_{dqo}] \quad (12.38)$$

Esprimendo la (12.38) in termini del fasore spaziale si ottiene la relazione significativa indicata in (12.39).

$$p = \operatorname{Re}(\bar{v}i) + v_o i_o \quad \operatorname{Re}(\bar{v}i) = (v_d + jv_q)(i_d - ji_q) = v_d i_d + v_q i_q \quad (12.39)$$