



Matricola:

0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9

*Istruzioni: riempire **completamente** le bolle con le cifre del numero di matricola (una cifra per colonna); nella parte sotto del foglio, riempire **completamente** le bolle con le risposte alle domande a scelta multipla. Per riempire, usare penna o matita nera, colorando tutto l'interno e cercando di non uscire dal bordo. Non sono ammesse correzioni, dato che il foglio verrà analizzato da un computer.*

Cognome:.....Nome:.....

Segnare le risposte delle domande a scelta multipla

- (1) (A) (B) (C) (D) (E)
- (2) (A) (B) (C) (D) (E)
- (3) (A) (B) (C) (D) (E)
- (4) (A) (B) (C) (D) (E)
- (5) (A) (B) (C) (D) (E)
- (6) (A) (B) (C) (D) (E)

- (7) (A) (B) (C) (D) (E)
- (8) (A) (B) (C) (D) (E)
- (9) (A) (B) (C) (D) (E)
- (10) (A) (B) (C) (D) (E)
- (11) (A) (B) (C) (D) (E)
- (12) (A) (B) (C) (D) (E)

Domande a scelta multipla

* Gli esercizi marcati con un asterisco valgono più punti e vanno giustificati in maniera sintetica e chiara sul retro del primo foglio. In particolare, per i test specificare: tipo di test, ipotesi nulla ed alternativa, statistica utilizzata e suo valore numerico, regione di rifiuto o P-value con relativa stima (a seconda dei casi e di quanto richiesto nel testo).

(1) * In un test d'ipotesi per la media a varianza nota con $H_0 : \mu \geq \mu_0$ e $H_1 : \mu < \mu_0$ si rifiuta H_0 ad un livello $\alpha = 0.05$ in corrispondenza ad un campione di ampiezza n . Si prenda ora un campione di ampiezza $m > n$ tale che $\bar{x}_m = \bar{x}_n$; cosa succede al P-value $\bar{\alpha}$? (Sugg: ricordarsi che $\phi(x) < 1/2$ se e solo se $x < 0$.)

- (a) aumenta.
- (b) non cambia.
- (c) [=] diminuisce.
- (d) dipende dal valore della deviazione standard σ .
- (e) dipende dal segno di \bar{x}_n .

(2) Siano X e Y due variabili aleatorie normali indipendenti, $X \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$, $Y \sim \mathcal{N}(b, \kappa^2)$. Che legge ha $X - Y$?

- (a) $\mathcal{N}(a + b, \sigma^2 + \kappa^2)$.
- (b) $\mathcal{N}(a - b, \sigma^2 - \kappa^2)$.
- (c) $\mathcal{N}(a - b, (\sigma - \kappa)^2)$.
- (d) [=] $\mathcal{N}(a - b, \sigma^2 + \kappa^2)$.
- (e) $\mathcal{N}(a - b, \sigma^2 \kappa^2)$.

(3) Sia $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una successione di v.a. indipendenti identicamente distribuite con valore atteso μ e varianza σ^2 . Per n grande si ha:

- (a) $\bar{X}_n - \sigma^2/n \sim \mathcal{N}(\mu, 0)$.
- (b) $\bar{X}_n - \sigma^2/n \sim \mathcal{N}(\mu - \sigma^2/n, 0)$.
- (c) $\bar{X}_n - \sigma^2/n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$. (*) Qui basta che $x_1 < x_2 = \cdot x_n$; se $n \rightarrow \infty$ allora $s_n^2 \rightarrow 0$ e $\bar{x}_n \rightarrow x_2$.
- (d) [=] $\bar{X}_n - \sigma^2/n \sim \mathcal{N}(\mu - \sigma^2/n, \sigma^2/n)$.
- (e) $\bar{X}_n - \sigma^2/n \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

(4) Un dado viene lanciato 600 volte ottenendo le seguenti frequenze relative: $f_r(1) = 1/8$, $f_r(2) = 5/24$, $f_r(3) = 1/6$, $f_r(4) = 1/8$, $f_r(5) = 3/20$ e $f_r(6) = 9/40$. Cosa possiamo concludere sul fatto che il dado sia equilibrato a

livello 5%, 2.5% e 1%?

- (a) Accetto all'1%, rifiuto al 2.5% e al 5%.
- (b) Accetto all'1%, al 2.5% e al 5%.
- (c) [=] Rifiuto all'1%, al 2.5% e al 5%. (*) La stima $q = 32$ da cui $\bar{\alpha} < 0.001$.
- (d) Accetto all'1% e al 2.5%, rifiuto al 5%.
- (e) Rifiuto all'1% e al 2.5%, accetto al 5%.

(5) Il tempo di lavorazione di un pezzo meccanico è una variabile aleatoria di media $\mu = 2$ minuti e deviazione standard $\sigma = 0.3$ minuti. Qual è il minimo numero di pezzi che dobbiamo misurare per essere certi almeno al 95% che la media dei loro tempi di lavorazione non differisca da 2 minuti per più di 4 secondi?

- (a) Almeno 67.
- (b) [=] Almeno 78. (*) Riportando tutto in secondi, $\mathbb{P}(|\bar{X}_n - 120|/\sqrt{n}/18) \leq 4\sqrt{n}/18) \geq 0.95$ implica $2\Phi(4\sqrt{n}/18) - 1 \geq 0.95$ da cui $\sqrt{n} \geq 9q_{0.975}/2$ ed infine $n \geq 77.7895$.
- (c) Almeno 93.
- (d) Almeno 104.
- (e) Almeno 50.

(6) * Due tipi di pezzi A e B vengono lavorati contemporaneamente da due macchine che operano in maniera indipendente. Siano $\{X_i\}_{i=1}^{10}$ e $\{Y_i\}_{i=1}^{10}$ i tempi di lavorazione (che si suppongono indipendenti) di 10 pezzi di tipo A e 10 pezzi di tipo B rispettivamente. Supponendo che, per ogni $i = 1, \dots, 10$, valga $X_i \sim \mathcal{N}(1, 4)$ e $Y_i \sim \mathcal{N}(4, 1)$; quanto vale la probabilità che per qualche i si verifichi $X_i > Y_i$?

- (a) Circa 0.0116.
- (b) Circa 0.9173.
- (c) [=] Circa 0.6097. (*) $X_i - Y_i \sim \mathcal{N}(-3, 5)$. Si utilizzi $\mathbb{P}(X_i - Y_i \leq 0) = \Phi(3/\sqrt{5}) = \Phi(1.341) \approx 0.9102$, da cui la probabilità cercata è $1 - \mathbb{P}(X_1 \leq Y_1)^{10} \approx 0.6097$
- (d) Circa 0.3274.
- (e) Circa 0.5.

(7) Supponiamo di calcolare un intervallo di confidenza I_1 per la media di una popolazione normale a varianza incognita, al livello α_1 . Cosa accade se calcoliamo poi (con gli stessi dati) l'intervallo di confidenza I_2 al livello α_2 ,

con $\alpha_2 < \alpha_1$?

- (a) [=] I_2 è più stretto di I_1 .
- (b) La numerosità del campione aumenta.
- (c) Non ci sono regole.
- (d) I_2 è più ampio di I_1 .
- (e) La varianza campionaria diminuisce.

(8) * Nella produzione di semiconduttori non è possibile controllare esattamente la resistenza degli elementi prodotti. Supponiamo che vengano misurati i valori della resistenza per $n = 20$ semiconduttori, ottenendo una media campionaria $\bar{x} = 12.3$ ed una varianza campionaria $s^2 = 40$.

Determinare l'intervallo bilaterale di confidenza al 95% per la media della resistenza dei semiconduttori prodotti.

- (a) [9.34, 14.15].
- (b) [=] [9.34, 15.26].
- (c) [7.12, 17.48].
- (d) [10.45, 14.15].
- (e) [11.05, 13.55].

(9) Che cos'è l'errore di prima specie?

- (a) [=] Quello che si commette rifiutando H_0 quando in realtà è vera.
- (b) Quello che accade quando H_0 è falsa.
- (c) Una ipotesi statistica.
- (d) Quello che si commette accettando H_0 quando in realtà è falsa.
- (e) Quello che si commette rifiutando H_0 quando si accetta H_1 .

(10) Supponiamo di voler eseguire un test d'ipotesi di livello α per testare l'ipotesi H_0 contro l'ipotesi H_1 . Quale delle seguenti affermazioni è sempre vera?

- (a) Se accetto H_0 , essa è vera con probabilità al massimo α .
- (b) [=] Se H_0 è vera, la probabilità di rifiutarla è al massimo α .
- (c) Se H_0 è falsa la probabilità di rifiutarla è al massimo α .
- (d) Se H_0 è falsa la probabilità di accettarla è al massimo α .
- (e) Se H_0 è vera, la probabilità di accettarla è almeno α .

(11) * Un amico di Romualdo, di nome Procopio, ha un problema particolare. Da anni Procopio, quando cammina per strada, sbatte la testa contro i cartelli stradali sistematicamente almeno in 25 uscite su 30, quasi ne fosse attratto da una forza misteriosa. Romualdo ha deciso quindi di mettere in atto il seguente rimedio: prima di ogni uscita lo fa ubriacare sperando che l'andatura barcollante lo aiuti ad evitare i cartelli. Dall'inizio di questa "cura" su 20 passeggiate Procopio ha sbattuto contro qualche cartello solo in 15 uscite. Valutare se il rimedio di Romualdo è davvero efficace, proponendo un test e calcolandone il P -value. Quale tra le seguenti affermazioni è corretta?

- (a) Ci sono abbastanza evidenze dell'efficacia della cura.
- (b) Non si hanno sufficienti informazioni per poter stabilire il valore del p -value, ma possiamo dire che la cura non è efficace al livello di significatività del 5%.
- (c) [=] Non ci sono abbastanza evidenze dell'efficacia della cura. (*) $p_0 = 5/6$, $\bar{p} = 3/4$, $H_1 : p < p_0$ da cui il P -value è $\Phi(z)$ dove $z = (3/4 - 5/6) / \sqrt{5/(36 \cdot 20)} = -1$. Essendo $\Phi(-1) \approx 0.158655$ non ci sono evidenze sull'efficacia.
- (d) Non si hanno sufficienti informazioni per poter stabilire il valore del p -value, ma possiamo dire che la cura non è efficace al livello di significatività del 10%.
- (e) Il P -value è circa 0.22.

(12) * Si cerca di capire se vi siano evidenze del fatto che la lunghezza media delle foglie di una certa pianta sia differente dai $9/100$ dell'altezza della pianta stessa. Da un campione di 100 foglie si ottiene una media campionaria pari a $\bar{x} = 8.848/100$. Sapendo che la deviazione standard vera è $\sigma = 8 \cdot 10^{-4}$, quali conclusioni possiamo trarre ai livelli di significatività del 1%, 5% e del 7%?

- (a) [=] Rifiuto H_0 all'1%, al 5% e al 7%. (*) $H_1 : \mu \neq \mu_0 = 9/100$ e $\bar{x} = 2(1 - \Phi(|z|))$ dove $z = (8.848/100 - 9/100) \cdot 10 / (8 \cdot 10^{-4}) = -19$ da cui $\bar{x} \approx 0$.
- (b) Accetto H_0 all'1%, al 5% e al 7%.
- (c) Accetto H_0 al 7% ma non al 5% e nemmeno all'1%.
- (d) Accetto H_0 all'1%, al 5% ma non al 7%.
- (e) Accetto H_0 all'1% ma non al 5% e nemmeno al 7%.